

境界の近似が有限要素解に及ぼす影響について

東大 生研 田 端 正 久

§1. 序

多角形でない領域でなりたつ微分方程式に有限要素法を適用すると、有限要素法で考えている領域ともとの領域とは一般に一致しない。そこで、より良い境界の近似を得るために isoparametric を用いることなどが考えられるが、このような近似境界条件が有限要素解にどのような影響を与えるかを述べる。 Ω を平面上の有界領域、 Γ をその境界として次の問題について考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{du}{dn} = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1.2)$$

Γ は十分滑らかで次のようにあらわされているものとする。

$$\Gamma = \{ (x(t), y(t)) : \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \equiv 1 \text{ for } \forall t \}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{d}{dn}$ は Γ での外向き法線方向の微分である。

$H^k(\Omega)$ を Ω 上で定義された関数で k 階までの導関数がすべて Ω 上二乗可積分なもの全体の集合とし、ノルムを次で表わす。

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

とくに、 $H^0(\Omega) \in L^2(\Omega)$ と書く。同様に、 $H^k(\Gamma)$ は境界 Γ 上で言いかえたものである。また、 $C(\bar{\Omega})$ を $\bar{\Omega}$ 上で連続な関数の集合とする。 C は、 k, u, f, g に依存しない定数で場所が異なれば異なる定数であるとして使う。

§2. 領域の三角形分割と近似境界

$\bar{\Omega}_h = \cup K_h$ として近似領域 Ω_h を得る。ここに、 K_h は開三角形要素で isoparametric 要素のように曲った三角形も許してゐる ([1], [2] 参照)。 h は細分の程度を表わすパラメータ、 Γ_h を Ω_h の周とする。このとき、 Γ と Γ_h は Γ の normal により 1 対 1 に対応してゐるものとする。この対応を ψ と書く。 $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma_h$
 $P: (x(t), y(t)) \in \Gamma, Q(t) = \text{dist}(P, \psi(P))$ とするとき、次の仮定を途中で用いる。

$$A1: |Q(t)| \leq C h^{\beta} \quad \text{for } \forall t \quad (2.1)$$

$$A2: |Q'(t)| \leq C h^{\beta-1} \quad \text{for } \forall t \quad (2.2)$$

$\bar{\Omega}_h$ にある格子点(節点)の集合を $\{P_i\}_{i=1}^{N_2}$, そのうち Γ_h 上にあるものを $\{P_i\}_{i=N_1+1}^{N_2}$ とする。 $\mathcal{S}(\Omega_h) \in N_2$ 次元の関数空間でその basis を $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_2}$ とする。 i.e., $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N_2$

このとき、 $\varphi_i \in C(\bar{\Omega}_h)$ で各 K_h 上では十分滑らかであるとする。
 $\mathring{\mathcal{S}}(\Omega_h) \in \mathcal{S}(\Omega_h)$ の部分空間で Γ_h 上の節点では零になるものの
 全体とする。 $\dim \mathring{\mathcal{S}}(\Omega_h) = N_1$ 。 $\mathcal{S}_B(\Omega_h) \in \mathcal{S}(\Omega_h)$ の部分集合
 で Γ_h 上の節点では与えられた関数 $\bar{v} \in C(\Gamma_h)$ と一致するもの
 の全体とする。 $C(\bar{\Omega}_h)$ からの次の mapping を定義する。

$$P: C(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega_h) \quad (2.3)$$

$$\text{s.t.}, (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \quad j=1, \dots, N_2$$

$$\mathring{P}: C(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow \mathring{\mathcal{S}}(\Omega_h) \quad (2.4)$$

$$\text{s.t.}, (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \quad j=1, \dots, N_1$$

$$(P\varphi)(Q_j) = 0 \quad j=N_1+1, \dots, N_2$$

$$P_B: C(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow \mathcal{S}_B(\Omega_h) \quad (2.5)$$

$$\text{s.t.}, (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \quad j=1, \dots, N_1$$

$$(P\varphi)(Q_j) = \bar{v}(Q_j) \quad j=N_1+1, \dots, N_2$$

次の仮定を途中で用いる。

$$B1: \|Pf - f\|_{L^i(\Omega_h)} \leq C h^{\alpha+1-i} \|f\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_h)} \quad i=0,1 \quad (2.6)$$

$$\text{for } f \in H^{\alpha+1}(\Omega_h) \cap C(\bar{\Omega}_h)$$

$$B2: \|Pv - v\|_{H^1(\Gamma_h)} \leq C h^{\alpha+1} \|v\|_{H^{\alpha+2}(\Omega_h)} \quad (2.7)$$

$$\text{for } v \in H^{\alpha+2}(\Omega_h) \cap C(\bar{\Omega}_h)$$

また、次の notation を用いる。

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \quad \text{for } u, v \in H^1(\Omega)$$

$$\text{in } \mathbb{R}^2 \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_h(u, v) &= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy & \text{for } u, v \in H^1(\Omega_h) \\
(f, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx dy & \text{for } f, v \in L^2(\Omega) \\
(f, v)_h &= \int_{\Omega_h} f \cdot v \, dx dy & \text{for } f, v \in L^2(\Omega_h) \\
[g, v] &= \int_{\Gamma} g \cdot v \, dt & \text{for } g, v \in L^2(\Gamma) \\
[g, v]_h &= \int_{\Gamma_h} g \cdot v \, dt & \text{for } g, v \in L^2(\Gamma_h)
\end{aligned}$$

§3. Dirichlet 問題

$\bar{f} \in L^2(\Omega_h)$, $\bar{g} \in C(\Gamma_h)$ をそれぞれ f, g の近似関数として与える。このとき、(1.1) の有限要素解 \hat{u} は次のものをいう。

$$\begin{cases} \hat{u} \in \mathcal{S}_B(\Omega_h) \\ a_h(\hat{u}, \hat{\phi}) = (\bar{f}, \hat{\phi})_h \quad \text{for } \forall \hat{\phi} \in \mathcal{S}(\Omega_h) \end{cases}$$

$u \in H^2(\Omega)$ は (1.1) の厳密解, $\tilde{u} \in H^2(\Omega \cup \Omega_h)$ は u の拡張とす。 $\|\tilde{u}\|_{2, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|u\|_{2, \Omega}$ 。 $e \equiv \hat{u} - \tilde{u} \in H^1(\Omega_h)$ は拡張して $\tilde{e} \in H^1(\Omega \cup \Omega_h)$ とす。 $\|\tilde{e}\|_{1, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|e\|_{1, \Omega_h}$ 。 $w \in$

$$\begin{cases} -\Delta w = \tilde{e} & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の厳密解とすると $w \in H^2(\Omega)$ であり w の拡張 $\tilde{w} \in H^2(\Omega \cup \Omega_h)$ とす。 $\|\tilde{w}\|_{2, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|w\|_{2, \Omega}$ (3.1)

Theorem 3.1

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq C \{ \|\tilde{u} - P\tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|P\tilde{u} - P_B\tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \} \quad (3.2)$$

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \leq c \left\{ \|e\|_{1, \Omega_h} \frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1, \Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} + \sqrt{\|e\|_{1, \Omega_h} \|Pw - \hat{P}w\|_{1, \Omega_h}} \right. \\ \left. + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} + \|\bar{g} - \tilde{u}\|_{0, \Gamma_h} + \sqrt{I} \right\} \quad (3.3)$$

$$I \in \mathbb{R} \cup \mathbb{I} = \int_{\Omega_{h-\Omega}} |e|^2 dx dy + \int_{\Omega-\Omega_h} |\tilde{e}|^2 dx dy \quad \blacktriangle$$

(証明)

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq \|\hat{u} - P_B \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|P_B \tilde{u} - P \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|P \tilde{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \quad (3.4)$$

$$\hat{u} - P_B \tilde{u} \in \mathcal{S}(\Omega_h) \text{ である}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\hat{u} - P_B \tilde{u}\|_{1, \Omega_h}^2 &\leq a_h(\hat{u} - P_B \tilde{u}, \hat{u} - P_B \tilde{u}) \\ &= a_h(\hat{u} - \tilde{u}, \hat{u} - P_B \tilde{u}) + a_h(\tilde{u} - P_B \tilde{u}, \hat{u} - P_B \tilde{u}) \\ &= c\bar{f} + \Delta\tilde{u}, \hat{u} - P_B \tilde{u}) + a_h(\tilde{u} - P_B \tilde{u}, \hat{u} - P_B \tilde{u}) \\ &\leq \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \|\hat{u} - P_B \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} + \|\tilde{u} - P_B \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \|\hat{u} - P_B \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.4), (3.5) と結合して (3.2) が得る。

$$\begin{aligned} \|e\|_{0, \Omega_h}^2 &= \int_{\Omega_h} e(-\Delta\tilde{w} + e + \Delta\tilde{w}) dx dy \\ &= a_h(e, \tilde{w}) - \int_{\Gamma_h} e \frac{d\tilde{w}}{dn} + \int_{\Omega_{h-\Omega}} e(e + \Delta\tilde{w}) dx dy \quad (3.6) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$$I_1 = a_h(e, \tilde{w} - P\tilde{w}) + a_h(e, P\tilde{w} - P_0\tilde{w}) + a_h(e, P_0\tilde{w})$$

$$\text{第3項} = (\bar{f} + \Delta\tilde{u}, P\tilde{w}) \leq c \| \bar{f} + \Delta\tilde{u} \|_{0, \Omega_h} \max_{\Omega_h} |\tilde{w}| \quad (3.7)$$

$$I_2 \leq \|e\|_{0, \Gamma_h} \left\| \frac{d\tilde{w}}{dn} \right\|_{0, \Gamma_h} \leq c \| \bar{g} - \tilde{u} \|_{0, \Gamma_h} \| \tilde{w} \|_{2, \Omega_h} \quad (3.8)$$

$$I_3 \leq \int_{\Omega_{h-\Omega}} |e|^2 dx dy + \sqrt{\int_{\Omega_{h-\Omega}} |e|^2 dx dy} \cdot \| \tilde{w} \|_{2, \Omega_h} \quad (3.9)$$

$$\text{よって} \quad \| \tilde{e} \|_{0, \Omega} \leq \| e \|_{0, \Omega_h} + \sqrt{I} \quad (3.10)$$

Sobolev の lemma と 微分方程式の理論から

$$\max_{\Omega_h} |\tilde{w}| \leq c \| \tilde{w} \|_{2, \Omega_h} \leq c \| w \|_{2, \Omega} \leq c \| \tilde{e} \|_{0, \Omega} \quad (3.11)$$

(3.1), (3.6) ~ (3.11) から (3.3) を得る。 ▀

A_1, B_1, B_2 を仮定し厳密解 u が必要ならだけの $H^p(\Omega)$ に入っているとす。さらに、 $\bar{f} = P_f f$, \bar{g} としては Γ 上の節点では \bar{g} , Γ 上にない節点では $\bar{g}(cp) = g(\mathcal{U}^{-1}(cp))$ として $\bar{g} = P\bar{g}|_{\Gamma_h}$ とすると

$$\|\tilde{u} - P\tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq Ch^\alpha \|u\|_{\alpha+1, \Omega}$$

$$\|P\tilde{u} - P_B\tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq \begin{cases} 0 \\ Ch^{\beta-\frac{1}{2}} \|u\|_{3, \Omega} \end{cases}$$

$$\|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \leq Ch^\alpha \|u\|_{\alpha+2}, \quad Ch^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+3}$$

$$\frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1, \Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} \leq Ch$$

$$\|P\tilde{w} - P_B\tilde{w}\|_{1, \Omega_h} \leq \begin{cases} 0 \\ Ch^{\beta-\frac{1}{2}} \|e\|_{1, \Omega_h} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{g} - \tilde{u}\|_{0, \Gamma_h} &\leq \|\bar{g} - P\tilde{u}\|_{0, \Gamma_h} + \|P\tilde{u} - \tilde{u}\|_{0, \Gamma_h} \\ &\leq \begin{cases} 0 \\ Ch^\beta \|u\|_{3, \Omega} \end{cases} + Ch^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{I} \leq Ch^{\frac{\beta}{2}} \|e\|_{1, \Omega_h}$$

が証明できる。ただし、 $\{ \}$ の上段は Γ 上の節点があつて Γ 上にある場合、下段はそうでない場合である。したがって

Cor. 3.1

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq C \left[\begin{cases} 0 \\ Ch^{\beta-\frac{1}{2}} \|u\|_{3, \Omega} \end{cases} + h^\alpha \|u\|_{\alpha+2} \right]$$

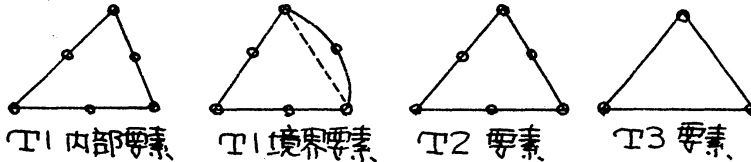
$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \leq c \left[h^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+3, \Omega} + \left\{ \frac{h}{h} + h^{\frac{\beta}{2}} \right\} \|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ h^{\beta} \|u\|_{3, \Omega} \end{array} \right\} \right]$$

例

T1: 三角形要素で境界では2次の isoparametric 要素を使い
内部要素では直線三角形。 $\varphi_i(x, y)$ は2次式を使う。

T2: 境界要素も直線三角形。 $\varphi_i(x, y)$ は2次式。

T3: 境界要素も直線三角形。 $\varphi_i(x, y)$ は1次式。



このとき、次の結果を得る。

	α	β	H^1 -元	L^2 -元
T1	2	3	h^2	h^3
T2	2	2	$h^{\frac{3}{2}}$	h^2
T3	1	2	h	h^2

T2では頂上の節点で Γ 上になんもないものが生じている。Cor.3.1
をそのまゝ用いると、T2の L^2 元は $h^{\frac{3}{2}}$ となるが、 $2h$ と
したT2はT3を含むので h^2 が保たれる。

§4. Neumann問題

(1.2) が解をもつためには $\int_{\Omega} f dx dy + \int_{\Gamma} g dt = 0$ でなければ
ならない。 $\int_{\Omega} u dx dy = 0$ のもとで厳密解が一意的に存在し
 $H^1(\Omega)$ に入っているとある。 $\tilde{u} \in H^1(\Omega \cup \Omega_h)$ は u の拡張で

$\|\tilde{u}\|_{k, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|u\|_{k, \Omega}$ となる。

$$k_1 = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_h)} \int_{\Omega_h} \tilde{u} \, dx dy, \quad u_1 \equiv \tilde{u} - k_1$$

$\bar{f} \in L^2(\Omega_h), \bar{g} \in C(\Gamma_h)$ による f, g の近似

$$k_2 = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_h)} \left\{ \int_{\Omega_h} \bar{f} \, dx dy + \int_{\Gamma_h} \bar{g} \, dt \right\}, \quad f_1 \equiv \bar{f} - k_2$$

このとき (1.2) の有限要素解は次の \hat{u} となる。

$$\begin{cases} \hat{u} \in \mathcal{S}(\Omega_h) \\ a_h(\hat{u}, \hat{\varphi}) = (f_1, \hat{\varphi})_h + [\bar{g}, \hat{\varphi}]_h \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\Omega_h) \\ \int_{\Omega_h} \hat{u} \, dx dy = 0 \end{cases}$$

$e \equiv \hat{u} - \tilde{u} \in H^1(\Omega_h)$ の拡張 $\tilde{e} \in H^1(\Omega \cup \Omega_h)$, $\|\tilde{e}\|_{1, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|e\|_{1, \Omega_h}$

$$k_3 = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_h)} \int_{\Omega_h} \tilde{e} \, dx dy, \quad e_1 \equiv \tilde{e} - k_3$$

$w \in \mathcal{S}_0$ かつ $\int_{\Omega_h} w \, dx dy = 0$ として

$$\begin{cases} -\Delta w = e_1 & \text{in } \Omega \\ \frac{dw}{dn} = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の厳密解とすると $w \in H^2(\Omega)$ であり $\tilde{w} \in H^2(\Omega \cup \Omega_h)$ による拡張と

$$\|\tilde{w}\|_{2, \Omega \cup \Omega_h} \leq C \|w\|_{2, \Omega} \quad (4.1)$$

Theorem 4.1

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq C \left\{ \|P\tilde{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0, \Gamma_h} + |k_1| + |k_2| \right\} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \leq C & \left\{ \|e\|_{1, \Omega_h} \frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1, \Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0, \Gamma_h} \frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1, \Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} \right. \\ & + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0, \Omega_h} + |k_2| + |k_3| + \sqrt{I} + \frac{|[\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w}]_h|}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} \\ & \left. + \frac{J}{\|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h}} \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega_{m2}} |e|^2 dx dy + \int_{\Omega - \Omega_h} |\tilde{e}|^2 dx dy \\ J &= \int_{\Omega - \Omega_h} |\nabla \tilde{e} \cdot \nabla w| dx dy + \int_{\Omega_h - \Omega} |\nabla e \cdot \nabla \tilde{w}| dx dy \end{aligned}$$

(証明)

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq \|\hat{u} - u_1\|_{1, \Omega_h} + c|k_1| \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \|\hat{u} - u_1\|_{1, \Omega_h}^2 &\leq a_h(\hat{u} - u_1, \hat{u} - u_1) \\ &= a_h(\hat{u} - \tilde{u}, \hat{u} - \tilde{u}) \\ &= a_h(\hat{u} - \tilde{u}, \hat{u} - P\tilde{u}) + a_h(\hat{u} - \tilde{u}, P\tilde{u} - \tilde{u}) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= (f_1 + \Delta \tilde{u}, \hat{u} - P\tilde{u}) + [\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \hat{u} - P\tilde{u}]_{\Gamma_h} \\ &\leq c \{ \|\bar{f} + \Delta \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} + |k_2| + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0, \Gamma_h} \} \{ \|P\tilde{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + \|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \} \\ &\quad (4.4) \sim (4.6) \text{ と } (4.2) \text{ を使って.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{0, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} e_1(-\Delta w) dx dy \\ &= a(e_1, w) \\ &= a_h(e, \tilde{w}) + \int_{\Omega - \Omega_h} \nabla \tilde{e} \cdot \nabla \tilde{w} dx dy - \int_{\Omega_h - \Omega} \nabla e \cdot \nabla \tilde{w} dx dy \\ &\leq a_h(e, \tilde{w} - P\tilde{w}) + a_h(e, P\tilde{w}) + J \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{*2 項} &= (f_1 + \Delta \tilde{u}, P\tilde{w})_h + [\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, P\tilde{w}]_h \\ &= (f_1 + \Delta \tilde{u}, P\tilde{w})_h + [\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, P\tilde{w} - \tilde{w}]_h + [\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w}]_h \\ &\leq \|f_1 + \Delta \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \|\tilde{w}\|_{2, \Omega_h} + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{\Gamma_h} \|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1, \Omega_h} \\ &\quad + |[\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w}]_h| \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{よって} \quad \|e\|_{0, \Omega_h} \leq \|e_1\|_{0, \Omega} + |k_3| + \sqrt{I} \quad (4.9)$$

$$\|w\|_{2, \Omega} \leq c \|e\|_{0, \Omega} \quad (4.10)$$

(4.1), (4.7)~(4.10) から (4.3) が得る。 ▣

$\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{S}_3$ と同様に $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{S}_3$ と仮定すると

$$|k_1| \leq C h^\beta \|u\|_{1,\Omega}$$

$$|k_2| \leq C \left[\|\bar{f} + \Delta \tilde{u}\|_{0,\Omega_h} + h^\beta \|u\|_{3,\Omega} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ h^\beta \|u\|_{4,\Omega} \end{array} \right\} + h^\alpha \|u\|_{\alpha+2}, h^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+3} \right]$$

$$|k_3| \leq C \left[h^\beta \|e\|_{1,\Omega_h} + h^\beta \|u\|_{1,\Omega} \right]$$

$$\|P\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}\|_{1,\Omega_h} \leq C h^\alpha \|u\|_{\alpha+1,\Omega}$$

$$\|\bar{f} + \Delta \tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \leq C h^\alpha \|u\|_{\alpha+2}, C h^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+3}$$

$$\|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0,\Omega_h} \leq C \left[h^\alpha \|u\|_{\alpha+2} + h^{\beta-1} \|u\|_{2,\Omega} \right]$$

$$\frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \leq C h$$

$$\sqrt{I} \leq C h^{\frac{\beta}{2}} \|e\|_{1,\Omega_h}$$

$$\frac{J}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \leq C h^{\frac{\beta}{2}} \|e\|_{1,\Omega_h}$$

よって

$$\begin{aligned} \left[\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w} \right]_h &= \left[\bar{g}, \tilde{w} \right]_h - a_h(u, \tilde{w}) + (-\Delta \tilde{u}, \tilde{w})_h \\ &= \left\{ \left[\bar{g}, \tilde{w} \right]_h - \left[g, \tilde{w} \right] \right\} - \int_{\Omega_h} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{w} \, dx dy + \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla w \, dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_h} (-\Delta \tilde{u}) \tilde{w} \, dx dy - \int_{\Omega_h} (-\Delta u) w \, dx dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

==>

$$\left[g, w \right]_T - a(u, w) + (-\Delta u, w) = 0 \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{S}_3 \text{ と } \tilde{w} \in \mathcal{S}_3.$$

(4.11) を用いて

$$\frac{\left| \left[\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w} \right]_h \right|}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \leq C \left[h^\beta \|u\|_{3,\Omega} + h^{\alpha+1} \|u\|_{\alpha+3,\Omega} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ h^\beta \|u\|_{4,\Omega} \end{array} \right\} \right]$$

が証明できる。

Cor. 4.1

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq C [h^\alpha \|u\|_{2+2, \Omega} + h^{\beta-1} \|u\|_2]$$

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{0, \Omega_h} \leq C \left[(h + h^{\frac{\beta}{2}}) \|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} + h^{\alpha+1} \|u\|_{2+3} + h^\beta \|u\|_{3, \Omega^+} \right] \left. \begin{matrix} 0 \\ h^\beta \|u\|_{4, \Omega} \end{matrix} \right\} \triangle$$

例

	α	β	H^1	L^2
T1	2	3	h^2	h^3
T2	2	2	h	h^2
T3	1	2	h	h^2

§5. 数値実験

領域 Ω を半径10の円として Dirichlet問題の数値実験を行った。要素分割図は P12 で (1), (2), (3) は §3 の例 T1, T2, T3 に相当する。NI は四分円に含まれる節点数、NB は境界上の節点数である。グラフは有限要素解と厳密解との相対誤差を表わしており ENERGY-NORM は $|e|_A = \{a_{ij} e_i e_j\}^{\frac{1}{2}}$ を示している。横軸は節点数でその逆数が h に比例する量である。グラフ 1, 2 は解として次のものを用いたものである。

$$u = (100 - x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$$

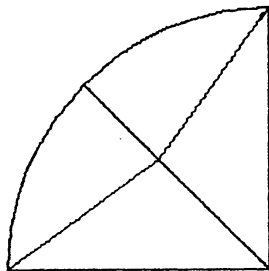
$$u = \log \frac{300 - 2(x^2 + y^2)}{100}$$

参考文献

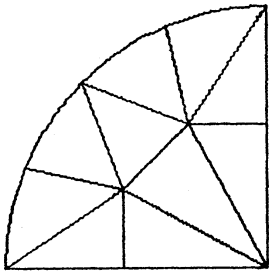
- [1] Ciarlet, P.G. & Raviart, P.A: Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng. 1 (1972), PP217-249
 [2] 田端正久: 京大数理解析研 講義録 202 (1974), PP53-61

要素分解図

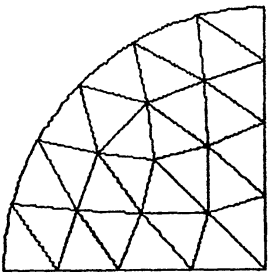
SD1
NI=8
NB=5



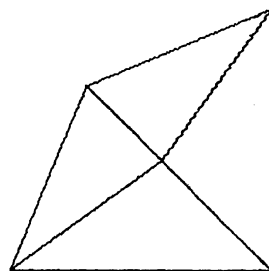
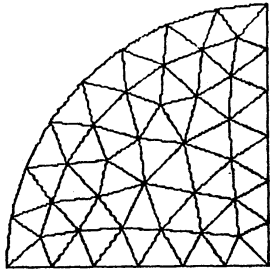
SD2
NI=20
NB=9



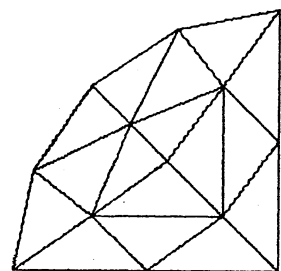
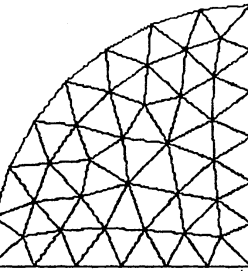
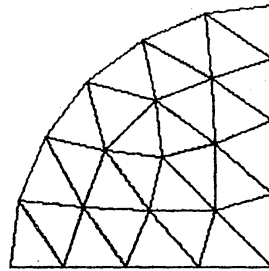
SD3
NI=58
NB=13



SD4
NI=140
NB=17



(2)



(3)

