数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 161-169

フォン・カルマンの方程式にたいする混合型の有限要素法の応用について

熊本大(理)　　三好哲彦

1. 序

板やシェルの大変型の解析には一般に4階の非線型偏微分方程式を解く必要が生じる。このために変位法の使用には試験関数の構成などをめぐりいくつかの問題がある。

ここでは、板の非線型曲げに関連して、いわゆるフォン・カルマン方程式を取り上げて、これたいしある種の混合法が適用可能であるということを示す。

2. v. K. 方程式とその弱い型

フォン・カルマン(v. K.)の方程式は $[f,w]=f_{,11}w_{,22}+f_{,22}w_{,11}-2f_{,12}w_{,12}$ とすると次の型に表わせる。

(2.1) $$\Delta^2 f = -[w,w]$$

(2.2) $$\Delta^2 w = [f,w]+p$$

我々はこの方程式を境界条件 $f=df/dn=w=dw/dn=0$ のもとで

解くことを考える. 次の記号を使う.

Ω; 板の占める領域(変形前の)

$W_p^k(\Omega)$; Sobolev空間. k; positive integer, $p>1$

$\overset{\circ}{W}{}_2^k(\Omega)$; Ωにsupportを持つC^∞-関数を次のノルムで完備化したもの.

$$|u|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k}\int |D^\alpha u|^2 dx_1 dx_2$$

$\mathbb{L}_2(\Omega)$; 直積空間 $\overset{\circ}{W}{}_2^1 \times L_2 \times L_2 \times L_2$, ノルムは普通のもの.

$\mathbb{H}(\Omega)$; 直積空間 $\overset{\circ}{W}{}_2^1 \times W_2^1 \times W_2^1 \times W_2^1$, ノルムは普通のもの, i.e.,

$$\mathbb{H} \ni \mathbb{W} \qquad \|\mathbb{W}\|_{\mathbb{H}}^2 = |w|_1^2 + \sum_{i\le j} \|w_{ij}\|_1^2 \qquad (\mathbb{W} = (w, w_{11}, w_{12}, w_{22}))$$

次に, $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$上で定義された双一次形式を定義する.

$$\mathbb{L}(\mathbb{W},\Phi) = \sum_{i\le j}\{(D_j w, D_i \Phi_{ij})_{L_2} + (w_{ij}, \Phi_{ij})_{L_2}\} + \sum_{i,j}(D_i w_{ij}, D_j \phi)_{L_2}$$

ただし, $\mathbb{W} = (w, w_{11}, w_{12}, w_{22})$, $\Phi = (\phi, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22})$, $w_{21} = w_{12}$ etc.

[定義1] $(F, \mathbb{W}) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ が次の方程式をみたすとき, これをv. K.方程式の弱解という.

(2.3) $\quad \mathbb{L}(F,\Phi) = ([\mathbb{W},\mathbb{W}], \phi)_{L_2} \qquad \forall \Phi \in \mathbb{H}$

(2.4) $\quad \mathbb{L}(\mathbb{W},\Phi) + ([F,\mathbb{W}], \phi)_{L_2} + (p, \phi)_{L_2} = 0 \qquad \forall \Phi \in \mathbb{H}$ ∎

[定理1] 任意のp(充分滑か)にたいし弱解は常に存在し, $\partial\Omega$が十分滑かであればこの解も十分滑かである. ([2], [8]) ∎

(2.3), (2.4)の方程式は単独方程式として表わせる. いま, $\mathbb{C}(F,\mathbb{W};\Phi) \equiv ([F,\mathbb{W}], \phi)_{L_2}$ とおけばある作用素 $\mathbb{C}$ により

$$\mathbb{C}(F,\mathbb{W};\Phi) = (\mathbb{C}(F,\mathbb{W}), \Phi)_{\mathbb{H}} \qquad \forall \Phi \in \mathbb{H}$$

と表現されることが Sobolev の埋蔵定理および Riesz の表現定理によりわかるので $\mathbb{L}(w,\Phi)=(\mathbb{L}w,\Phi)_{\mathbb{H}}$, $(p,\phi)_{L_2}=(\mathbb{B}p,\Phi)_{\mathbb{H}}$ と表現することにすれば (2.3), (2.4) はそれぞれ次のようになる.

(2.5) $$\mathbb{L}F=\mathbb{C}(w,w)$$

(2.6) $$\mathbb{L}w+\mathbb{C}(F,w)+\mathbb{B}p=0$$

[補題 2] $\mathbb{L}$ は $\mathbb{H}_{1+\varepsilon}=(W^2_{1+\varepsilon}\cap\mathring{W}^1_2)\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}$ $(\varepsilon>0)$ の上で invertible で,次の式が成立する

(2.7) $$\|\mathbb{L}^{-1}v\|_{L_2}\le c\|v\|_{L_2} \qquad \forall v\in\mathbb{H}_{1+\varepsilon}$$ ■

したがって次の単独方程式が得られる ($W^4_{1+\varepsilon}\subset W^2_2$ を使う).

(2.8) $$\mathbb{L}w+\mathbb{C}(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(w,w),w)+\mathbb{B}p=0.$$

3. 混合法の導入

Ω_h $(h\to0)$ を,三角形からなる Ω の部分領域とする. Ω_h 上の区分的一次の有限要素空間を $\hat{S}_1$, $\partial\Omega_h$ でゼロとなるものの全体 ($\hat{S}_2$ の部分空間) を $\hat{S}_0$ で表わす. $\Omega-\Omega_h$ へは適当に拡張する(詳しくは [14] 参照). 我々が提案する scheme は (2.3)~(2.4) の Galerkin 近似のようなものである.

(3.1) $$\mathbb{L}(\hat{F},\hat{\Phi})=([\hat{w},\hat{w}],\phi)_{L_2} \qquad \forall\hat{\Phi}\in\hat{\mathbb{H}}$$

(3.2) $$\mathbb{L}(\hat{w},\hat{\Phi})+([\hat{F},\hat{w}],\phi)_{L_2}+(p,\phi)_{L_2}=0 \qquad \forall\hat{\Phi}\in\hat{\mathbb{H}}$$

ただし, $\hat{F},\hat{w}\in\hat{\mathbb{H}}$. 容易にわかるようにこの方程式も

次の形の単独方程式で表される.

(3.3) $$\hat{\mathbb{L}}\hat{w} + \mathbb{P}\mathbb{C}(\hat{\mathbb{L}}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{C}(\hat{w},\hat{w}),\hat{w}) + \mathbb{P}\mathbb{B}p = 0$$

ただし, $\mathbb{P} : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{H}}$ (projection), $\hat{\mathbb{L}} = \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{P}$.

4. 重調和方程式の場合の誤差評価.

分割の規則性を適当に仮定すると（以下この仮定を常に置く）次の誤差評価が, 問題

(4.1) $$\Delta^2 w = p \qquad w = dw/dn = 0$$

の場合について成立する.

〔定理3〕. $w \in \mathbb{H}$ を (4.1) の解, $\hat{w} \in \hat{\mathbb{H}}$ を (4.1) の近似解とすると h を最大辺長とするとき

(4.2) $$\| w - \hat{w} \|_{\mathbb{L}_2} \le C h^{\frac{1}{2}} \| p \|_{L_2}$$ ■

5. 線型化(された)方程式

(3.3)の解の存在性, 収束性を示すためある種の反復法を利用する. この節ではこの反復に現われる線型方程式の可解性を調べる. (2.8)を次の型に書く.

(5.1) $$w + \mathbb{C}(w) + \mathbb{L}^{-1}\mathbb{B}p = 0$$

ただし, $\mathbb{C}(w) = \mathbb{L}^{-1}C(\mathbb{L}^{-1}C(w,w),w)$.

$z = \varpi_1 - \varpi_0$ ($\varpi_i \in \mathbb{H}$) とみれば $\mathbb{C}(\varpi)$ は"3次多項式"だから

(5.2) $$\mathbb{C}(\varpi_1) - \mathbb{C}(\varpi_0) = \mathbb{C}'_{(\varpi_0)}(\varpi_1 - \varpi_0) + \mathbb{D}(\varpi_0, z)$$

ただし,

$$\mathbb{C}'_{(\varpi_0)} z = \mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\varpi_0, \varpi_0), z) + 2\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\varpi_0, z), \varpi_0)$$

$$\mathbb{D}(\varpi_0, z) = 2\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\varpi_0, z), z) + \mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}(z, z), \varpi_0 + z)$$

(3.3) の離散システムも同様に $\hat{\varpi} + \hat{\mathbb{C}}(\hat{\varpi}) + \hat{\mathbb{L}}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{B}\, p = 0$ とすれば,

(5.3) $$\hat{\mathbb{C}}(\hat{\varpi}_1) - \hat{\mathbb{C}}(\hat{\varpi}_0) = \hat{\mathbb{C}}'_{(\hat{\varpi}_0)}(\hat{\varpi}_1 - \hat{\varpi}_0) + \hat{\mathbb{D}}(\hat{\varpi}_0, \hat{z}) \quad \text{etc.}$$

となる. 以下 $\hat{\varpi}_0$ は (5.1) の1つの解 ϖ の補間と考える.

[補題4] $\mathbb{C}'_{(\varpi_0)}$, $\hat{\mathbb{C}}'_{(\hat{\varpi}_0)}$ は $\mathbb{L}_2$ 上で well defined であって, $\mathbb{L}_2$ への作用素とみて compact である. ■

以下, 次の方程式

(5.4) $$\hat{\mathbb{K}} z = (\mathbb{I} + \hat{\mathbb{C}}'_{(\hat{\varpi}_0)}) z = G \qquad G \in \mathbb{L}_2$$

の可解性を, 方程式

(5.5) $$\mathbb{K} z = (\mathbb{I} + \mathbb{C}'_{(\varpi_0)}) z = 0$$

が trivial な解しか持たないと仮定して考える.

[補題5] $\hat{U} = \hat{\mathbb{L}}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{C}(\hat{v}, \hat{\varpi})$, $(\hat{v}, \hat{\varpi} \in \hat{\mathbb{H}})$ とすれば $0 < \varepsilon < 1/2$

ただし,

(1) $$\|\hat{U}\|_{\mathbb{L}_2} \le c_\varepsilon \|[\hat{v}, \hat{\varpi}]\|_{L_{1+\varepsilon}}$$

(2) $$\|\hat{U}\|_{\mathbb{L}_2} \le c_\varepsilon \|\hat{v}\|_{\mathbb{H}} \cdot \|\hat{\varpi}\|_{\mathbb{L}_2}$$

(3) $$\|\hat{U}\|_{\mathbb{L}_2} \le c\, |\hat{v}|_{max} \|\hat{\varpi}\|_{\mathbb{L}_2}. \quad ■$$

[補題 6] $\hat{v} \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{L}_2$, $0 < \varepsilon < 1$ のとき
$$\|[\hat{v}, z]\|_{L_{1+\varepsilon}} \leq c\, h^{-2\varepsilon/(1+\varepsilon)} \|\hat{v}\|_{\mathbb{L}_2} \|z\|_{\mathbb{L}_2}$$

[定理 7] (5.5)が trivial solution しか持たないならば，h が十分小さいとき $H^* = K^{-1}G$ にたいし次の式が成立する．

(5.6) $$\|\hat{K} H^* - G\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_\varepsilon\, h^{\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|G\|_{\mathbb{L}_2}$$

[定理 8]．前定理の仮定のもとで (5.4) は十分小さな h について一意可解であり．次の式が成立する．

(5.7) $$\|(\mathbb{I} + \hat{\mathbb{C}}'(\hat{w}_0))^{-1}\|_{\mathbb{L}_2} \leq c < \infty \quad \text{as } h \to 0.$$

6． 近似解の存在性，一意性，収束性．

[補題 9]． $w_0 \in \mathbb{H}$ を正確解，$\hat{w}_0$ を w_0 の補間とする．
$$\|\hat{E}\|_{\mathbb{L}_2} \equiv \|\hat{w}_0 + \hat{\mathbb{C}}(\hat{w}_0) + \hat{\mathbb{L}}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{B}p\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_\varepsilon\, h^{\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

我々が使う反復法は次の形の書き換えから始まる．

(6.1) $$\hat{w} = \mathbb{R}\hat{w}$$

ただし，
$$\mathbb{R}\hat{w} = \hat{w}_0 - (\mathbb{I} + \hat{\mathbb{C}}'(\hat{w}_0))^{-1}[\hat{E} + \hat{\mathbb{D}}(\hat{w}_0, \hat{z})] \quad (\hat{z} = \hat{w} - \hat{w}_0).$$

(6.1) は (3.3) 式と全く同じであることに注意．

[定理10] ϖ_0 を T.K. 方程式の一つの解，$\hat{\varpi}_0$ をその補間とする．ϖ_0 はまた (5.5) における $\mathbb{K}$ を特異にはしないとする．このとき反復

$$\hat{\varpi}_n = \mathbb{R}\,\hat{\varpi}_{n-1}$$

は contracting である．すなわち閉球

$$S_\delta = \{\hat{\varpi} \in \hat{\mathbb{H}} \,;\, \|\hat{\varpi} - \hat{\varpi}_0\|_{L_2} \le \delta\}$$

で次の条件をみたすものが存在する．

(A) $\quad \|\hat{\varpi}_0 - \mathbb{R}\hat{\varpi}\|_{L_2} \le \delta \qquad \forall \hat{\varpi} \in S_\delta$

(B) $\quad \|\mathbb{R}\hat{\varpi}_1 - \mathbb{R}\hat{\varpi}_2\|_{L_2} \le \varepsilon \|\hat{\varpi}_1 - \hat{\varpi}_2\|_{L_2} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

$$(\hat{\varpi}_1, \hat{\varpi}_2 \in S_\delta)$$

$\varepsilon = \frac{1}{h}$ $(n \geqq 11)$, $\delta = h^{\frac{1}{2} - 3/(n+1)}$ とおけば h が十分小さいとき (A),(B) が成立することがわかる．

[定理11]．$n\ (\geqq 11)$ を固定し $\delta = h^{\frac{1}{2} - 3/(n+1)}$ とする．h が十分小さければ離散式 (3.3) は $\hat{\varpi}_0$ の δ－近傍にただ一つの解を持つ．ただし，ϖ_0 は $\mathbb{K}$ の特異にしないと仮定する．

[注意] 以上の議論及び結果は lumped type の近似スキームにたいしても全く同様に行える（[14] 参照）．

1. Agmon,S.: The L_p approach to the Dirichlet problem. Ann. Scuola Normale Pisa 13, 405-448(1959).
2. Berger, M.S.: On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate I, Comm.Pure and Appl.Math. 20, 687-720(1967).
3. Berger,M.S. and P.Fife: On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate II, Plate with general edge conditions. Comm.Pure and Appl.Math. 21, 227-241(1968).
4. Friedrichs,K.O. and J.J.Stoker: The nonlinear boundary value problem of the buckled plate. Amer.J.Math. 63, 839-888(1941).
5. Johnson,C.: On the convergence of a mixed finite element method for plate bending problems. Numer.Math. 21, 43-62 (1973).
6. Kantorovich,L.V. and G.P.Akilov: Functional analysis in normed spaces: Pergamon press 1964.
7. Keller,H.B. and E.Reiss: Iterative solutions for non-linear bending of circular plates. Comm.Pure and Appl.Math. 11, 273-292(1958).
8. Knightly,G.H.: An existence theorem for the von Kármán equations. Arch.Rational Mech.Anal. 27, 233-2429(1967).
9. Krasnosel'skii,M.A. et al.: Approximate solution of operator equations: Wolters-Noordhoff publishing 1972.
10. Miyoshi,T.: A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations. Kumamoto J. Sci. (Math.) 9, 87-116(1972).
11. Miyoshi,T.: Finite element method of mixed type and its convergence in linear shell problems. Kumamoto J. Sci. (Math.) 10, 35-58(1973).
12. Morosov,N.: On the non-linear theory of thin plates. Dokl.Akad.Nauk SSSR 114, 968—971(1957).
13. Pian,T.H.H. and P.Tong: Basis of finite element method for solid continua.Int.J.Numerical Methods Eng. 1, 3-28(1969).

14. Miyoshi,T.: A mixed finite element method for the Solutions of the von Kármán Equations.(to appear)