数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 178-181

二重指数関数型数値積分公式（１次元）
——端点に特異性を持つ積分の数値計算
（鷲津教授の Lecture に対する Comment）

京大 数理研 森 正武

有限区間 $(-1, 1)$ における積分

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \tag{1}$$

において，例えば

$$f(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \quad , -1 < \alpha, \beta < 0 \tag{2}$$

のように $f(x)$ は可積分ではあるが端点 ± 1 に特異性を持つとき，その数値積分に次に述べる二重指数関数型数値積分公式 (double exponential formula) が実用的である．ただし $f(x)$ は $(-1, 1)$ で解析的であると仮定する．

そのアイディアは，適当な変数変換

$$x = \varphi(t) \tag{3}$$

によって積分 (1) を

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{4}$$

に変換し，これに刻み幅一定の台形則

$$I_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\varphi(nh))\,\varphi'(nh) \tag{5}$$

を適用することにある．解析関数の無限区間にわたる積分に対しては刻み幅一定の台形則が最適であることは [1] に証明されている．一方変換 $\varphi(t)$ は，(4) の被積分関数が

$$|f(\varphi(t))\varphi'(t)| \longrightarrow \exp(-\exp|t|) \quad , \quad t \to \pm\infty \tag{6}$$

のように二重指数関数的に減衰するように選ぶのが最適であることが [2] に示されている．

有限区間の積分 (1) に対しては，例えば変換

$$x = \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right) \tag{7}$$

が最適の公式

$$I_h = \frac{\pi}{2} h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh nh\right)\right) \frac{\cosh nh}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sinh nh\right)} \tag{8}$$

を与える．和 (8) の上下限は適当な場所で打切る．

有限区間に限らず，半無限区間あるいは無限区間自身における積分に上記の考え方を適用して効率の良い数値積分公式

を得ることができる．その原理は

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad (a\text{は}-\infty,\ b\text{は}+\infty\text{でもよい}) \tag{9}$$

に対して (6) を満足するような変換 $x=\varphi(t)$ をほどこし，得られる無限区間の積分 (4) に台形則を適用することである．このようにして得られる一群の公式を二重指数関数型公式という．

二重指数関数型公式の誤差 ΔI_h は，台形則の刻み幅 h が十分小さいとき漸近的に

$$\Delta I_h = I - I_h \simeq \exp\left(-\frac{a}{h}\right) \tag{10}$$

で与えられる．これは，h が 0 に近づくと共に公式の精度が著しく向上することを示していると同時に，h を $h/2$ にしたとき結果の有効桁数が約2倍になることを示している．このため，この公式では精度の自動制御が可能になる．また積分 (1) で $f(x)$ が ±1 で正則な場合でも，結果に約15桁以上の精度が要求される場合にはいわゆる Romberg 積分よりも効率が良い．さらに，この公式の標本点および重みはすべて指数関数の組合せで表現されるから，その計算は著しく容易である．いろいろな積分に対する二重指数関数型積分公式および誤差を自動的に制御する具体的フォートランプログラムが [3] に

示されている。

参考文献

[1] H. Takahasi and M. Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Report of the Computer Centre, Univ. of Tokyo, 3 (1970) 41-108.

[2] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 9 (1974) 721-741.

[3] 森正武，曲線と曲面，教育出版，1974.