数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 249-258

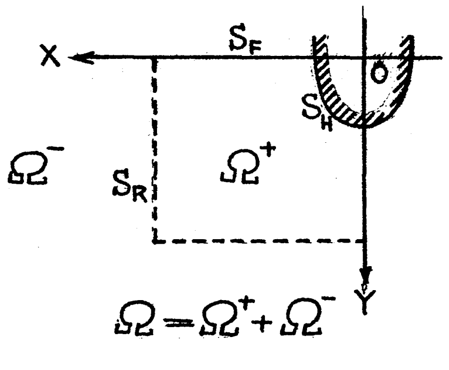
定常波動問題への有限要素法の応用

東大　工系大学院　瀬戸秀幸

§1. 緒言

波動問題の有限要素法による定式化については、Bai[3]により行なわれたものがあるが、数値計算上の困難が少なくない。本研究では、遠方における解の漸近的解析表示を用いる、物理的な考察に基づいた有限要素法の定式化を提唱した。本定式化によると、構造解析用のプログラムがほとんどそのまま使えるという利点がある。

§2. 基礎的な条件式



以下において、右図のような左右対称な2次元物体の上下揺について述べるが 他の運動の場合へも容易に適用できる。

連続の方程式（Laplaceの方程式）

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad in\ \Omega \qquad (1)$$

自由表面条件式

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + K\phi = 0 \qquad \text{on } S_F \qquad (2)$$

ここに、$K = \dfrac{\omega^2}{g}$

物体表面条件式

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + f = 0 \qquad \text{on } S_H \qquad (3)$$

無限遠における条件式

$$\phi \sim i H^{+}(\nu) e^{-\nu y - i\nu x} \qquad x \to +\infty \qquad (4)$$

ここに、ν は、一定水深（$y = h$）のとき、

$$K = \nu \tanh \nu h$$

の実根であり、無限水深のとき、$\nu = K$ となる。また $H^{+}(\nu)$ は、Kochin函数と呼ばれるものである。

水底条件式

有限水深の場合

$$\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{on } S_B \qquad (5)$$

無限水深の場合（S_BはS_Rに含まれる）.

$$\nabla\phi \sim \text{exponentially zero} \qquad y \to +\infty \qquad (5')$$

以下において、無限水深の場合を考えると、(1),(2),(4),(5)を満たし、点$(0, y')$に置かれた source のポテンシャルをGとすると、Gは

$$G(x, y; 0, y') = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+(y-y')^2}{x^2+(y+y')^2} - 2\int_0^\infty \{k\cos k(y+y') - K\sin k(y+y')\}\frac{e^{-k|x|}}{k^2+K^2}\,dk + 2\pi i\, e^{-K(y+y')-iK|x|} \qquad (6)$$

$$G(x,y;0,y') \sim 2\pi i e^{-K(y+y')-iK|x|} \equiv \tilde{G}(x,y) \qquad x\to+\infty \quad (7)$$

である。一般に、速度ポテンシャルϕは、無限遠で進行波を表わすポテンシャルと局部攪乱を表わすポテンシャルとの和として、次の形に一意に表わされる。

$$\phi = \sigma G + \phi_L \qquad (8)$$

または、

$$\phi = \sigma\tilde{G} + \tilde{\phi}_L \qquad (8')$$

ここに、σは source の強さを表わす未知の定数である。解析領域の決定には、原点に特異点をおき、そのポテンシャルが進行波の成分のみになったと見做せる領域に仮想境界S_Rをとって、その内部を有限要素法にて解析する。流体が占める領域ΩをS_Rで区切り、その内部の量に添字＋，外部の量に添字－，S_R上の量に添字へをつけて表わす。

§3. 重ね合わせ法

流体場の変分原理は、Tong のいわゆる Hybrid Displacement Model IIにより定式化すると、つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}\chi[\phi^+,\phi^-,\hat{\phi},\lambda^+,\lambda^-] = &\frac{1}{2}\iint_{\Omega^+}(\nabla\phi^+)^2 dS - \frac{1}{2}\int_{S_F^+}K(\phi^+)^2 dx + \int_{S_H} f\phi^+ ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_{S_R^-}\phi^-\frac{\partial\phi^-}{\partial n}ds - \frac{1}{2}\iint_{\Omega^-}\phi^-\Delta\phi^- dS + \frac{1}{2}\int_{S_F^-}\phi^-\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial n}+K\phi^-\right)ds \\ &- \int_{S_R^+}\lambda^+(\phi^+-\hat{\phi})ds - \int_{S_R^-}\lambda^-(\phi^- - \hat{\phi})ds \longrightarrow \text{stationary} \qquad (9)\end{aligned}$$

付帯条件

$$\phi^- \sim iH^+(K)e^{-Ky-iKx} \qquad x\to+\infty \qquad (10)$$

有限要素法を適用する場合、内挿函数を(A)解析函数よりなる部分と(B)区分的に連続な線形函数よりなる部分との和の形にとる。(A)としては、固有函数または素解の線形結合にとる。特に、Green函数が知られている場合 $\sum_{i+j=m} a_m \frac{\partial^m G}{\partial x^i \partial y^j}$ とればよい。(B)としては、外部 Ω^- で恒等的に 0 で、S_R 上で(A)の函数に滑らかに接続するという条件の下で、通常の有限要素法のように、要素内で線形函数をとる。

本論文で用いる重ね合わせ法は、線形性を用い、解析函数部を等価速度項として扱うものである。以下の定式化においては、簡単のため、解析項として1項のみをとった。

定式化 I[1)]

S_R の外部 Ω^- で進行波の挙動をする速度ポテンシャルを内部へ延長したものを ϕ^G とする。つぎに、連続の方程式(1)および自由表面条件(2)を満たし、つぎの条件

$$\frac{\partial \phi^0}{\partial n} = -\frac{\partial \phi^G}{\partial n} \equiv V_{n(0)} \quad \text{on } S_H, \quad \frac{\partial \phi^0}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_R$$

$$\frac{\partial \phi^r}{\partial n} = -f \equiv V_{n(r)} \quad \text{on } S_H, \quad \frac{\partial \phi^r}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_R$$

を満たすポテンシャルをそれぞれ ϕ^0 および ϕ^r とする。

対応する変分原理は、つぎのようになる。

$$\Lambda^*[\phi] = \frac{1}{2}\iint_{\Omega^+} (\nabla\phi)^2 dS - \frac{1}{2}\int_{S_F} K\phi^2 dx - \int_{S_H} V_{n(\alpha)}\phi \, ds \to \text{stationary} \quad (11)$$

ここに、$\alpha = 0, r$ である。

問題の線形性により

$$\phi = m(\phi^G + \phi^0) + \phi^r = m\phi^G + m\phi^0 + \phi^r \tag{12}$$

とおいたものは、(1),(2),(3),(5′) を満たしている。さらに ϕ が"S_R 上で進行波の成分のみになる"という条件(4)をも満足するためには、

$$\phi = m\phi^G \qquad \text{on } S_R \tag{13}$$

でなければならない。したがって、未定の特異点の強さ m が、

$$m\phi^0 + \phi^r = 0 \qquad \text{on } S_R \tag{14}$$

より定まる。この m の具体的な決定には、collocation、最小自乗法、Hybrid法のいずれを用いてもよい。しかし、適当に S_R 上の点 P を選べば、collocation が簡単で精度も十分である。すなわち、

$$m = -\frac{\phi^r}{\phi^0} \qquad \text{at } P \tag{15}$$

として、m が求まり、したがって ϕ が確定する。

<u>定式化 II</u>

S_R の近傍および外部の解 ϕ をそれぞれ $\sigma_1\tilde{G}$, $\sigma_2\tilde{G}$ と仮定したとき、対応する S_R 上の速度は、それぞれ

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \sigma_\alpha\frac{\partial\tilde{G}}{\partial n} \equiv \tilde{V}_{n(\alpha)} \qquad \alpha = 1, 2 \tag{16}$$

と与えられる。このとき、対応する変分原理はつぎのようになる。

$$\Lambda^{**}[\phi] = \frac{1}{2}\iint_{\Omega^*}(\nabla\phi)^2 dS - \frac{1}{2}\int_{S_F} K\phi^2 dx + \int_{S_H} f\phi\, ds - \int_{S_R}\tilde{V}_{n(\alpha)}\phi\, ds \tag{17}$$

$$\longrightarrow \text{stationary}$$

$\alpha=1,2$ に対応する有限要素解 ϕ_1, ϕ_2 の線形結合 $m\phi_1+(1-m)\phi_2$ も解であり、しかもはじめの仮定より、S_R 上で $m\sigma_1\tilde{G}+(1-m)\sigma_2\tilde{G}$ と一致しなければならない。すなわち、S_R 上における適当な平均の意味で

$$m\phi_1+(1-m)\phi_2 = m\sigma_1\tilde{G}+(1-m)\sigma_2\tilde{G} \tag{18}$$

が満たされねばならない。m の決定は、定式化 I の場合と同様に行えばよいが、collocation によるときは、適当な点 P を選び

$$m = \frac{\phi_2 - \phi_1}{(\phi_2-\sigma_2\tilde{G})-(\phi_1-\sigma_1\tilde{G})} \qquad \text{at } P \tag{19}$$

より、特異点の強さ m が決まる。

<u>Collocation point の決定</u>

ここでは、定式化 I についてのみ論ずるが定式化 II についても同様である。式(9)において変分を行ない、S_R に関係のある項のみを書き下すと、

$$\delta\chi[\phi^+,\phi^-,\hat{\phi},\lambda^+,\lambda^-] = \cdots + \int_{S_R^+}\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial n}-\lambda^+\right)\delta\phi^+ds + \int_{S_R^-}\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial n}-\lambda^-\right)\delta\phi^-ds$$
$$-\int_{S_R^+}(\lambda^+-\lambda^-)\delta\hat{\phi}ds - \int_{S_R^+}\delta\lambda^+(\phi^+-\hat{\phi})ds - \int_{S_R^-}\delta\lambda^-(\phi^--\hat{\phi})ds + \cdots = 0 \tag{20}$$

となる。$\phi^-=m\phi^G$, $\phi^G=\hat{G}$ ととると付帯条件は満たされる。

S_R 上の自然条件として、

$$\frac{\partial\phi^+}{\partial n}-\lambda^+=0, \quad \frac{\partial\phi^-}{\partial n}-\lambda^-=0, \quad \lambda^+-\lambda^-=0 \tag{21}$$

$$\phi^+-\hat{\phi}=0, \quad \phi^--\hat{\phi}=0 \tag{22}$$

が得られる。ここに、S_R^+ と S_R^- は方向が逆であり、S_R^+ を単に S_R

で表わす。本重ね合わせ法においては、

$$\phi^+ = m\phi^G + m\phi^0 + \phi^r \quad , \quad \phi^- = m\phi^G \tag{23}$$

ととり、さらに

$$\lambda^+ = \lambda^- = m\frac{\partial \phi^G}{\partial n} \quad , \quad \frac{\partial \phi^0}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi^r}{\partial n} = 0 \qquad on\ S_R \tag{24}$$

とおいているので、式(21)は満たされている。また、(24)より、

$$\delta\lambda^+ = \delta\lambda^- = \delta m\frac{\partial \phi^G}{\partial n}$$

であるから、これを式(20)に代入すると、式(22)の条件に対応する式として

$$\delta m \cdot \int_{S_R} \frac{\partial \phi^G}{\partial n}(\phi^+ - \phi^-)\, ds = 0$$

を得る。式(23)を考慮すると、

$$m\int_{S_R} \frac{\partial \phi^G}{\partial n}\phi^0 ds - \int_{S_R} \frac{\partial \phi^G}{\partial n}\phi^r ds = 0$$

が導かれる。この積分を実行してmを求めればよいが、実際には、$\frac{\partial \phi^G}{\partial n}$という深さ方向に指数的に減少する重みがかかっているので、自由表面の近傍の点Pにおいてcollocationを実行し、

$$m\phi^0 - \phi^r = 0 \qquad\qquad at\ P$$

よりmを定めればよい。この式は、(15)式を導く。

<u>数値計算の際の注意事項</u>

定式化Iにおいて、ϕ^Gとして一般に$\tilde{G}$をとればよいが、無限水深または一般水深の場合のように流体場の素解Gが知られているときは、Gを用いた方が精度がよくなると思われる。

定式化IIにおいて、σ_1, σ_2は$\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$のようにとって計算すればよい。

数値計算例

半径aの円柱が、無次元化された波数$Ka=1$で、振幅ηの上下揺をする場合の物体表面における無次元化された圧力分布$\bar{p}=p/\rho g\eta$について、本方法による結果とPorter[4]による結果を比較する。つぎに、物体の円振動数の変化による付加質量係数C_Aおよび減衰係数C_Dの変動を、Kaを横軸にとって示す。

§4. 結言

船舶流体力学の解析において、有限要素法は、物体や水底が任意の形状をしている場合にも容易に応用できるという点で等角写像を用いる方法より、また、*irregular frequency*がないという点で特異点分布を用いる方法より優れている。本重ね合わせ法は、山本らによりCrackのK値計算の分野で開発された方法[1]を流体解析の分野に拡張したものであるが、Bai[3]の方法と比べると、つぎの利点をもっている。同型の境界条件で2回解かねばならないという難点はあるが、modeがcoupleする進行波の部分を漸近的解析解で代表させ、しかもこの項を等価速度項として扱うため、行列は正値対称となる上に、mode coupleは取除かれ、1節点1自由度として扱える。

このため、行列の記憶容量は約$\frac{1}{4}$程度になり、しかも大型構造解析用のプログラムがほとんどそのまま利用できる。また、同様にして、前進速度を有する場合をも含めた3次元問題、弾性振動、非定常運動に対しても同様に適用できるのみならず、弾性波の伝播の問題へも拡張できる。

文　献

[1] Y. Yamamoto, N. Tokuda and Y. Sumi, "Finite Element Treatment of Singularities of Boundary Value Problems and its Application to Stress Intensity Factors", in Theory and Practice in Finite Element Stractural Analysis, (1973), University of Tokyo Press.

[2] A.K. Rao, I.S. Raju and A.V. Krishna Murty, "A Powerful Hybrid Method in Finite Element Analysis", Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 3, 1971.

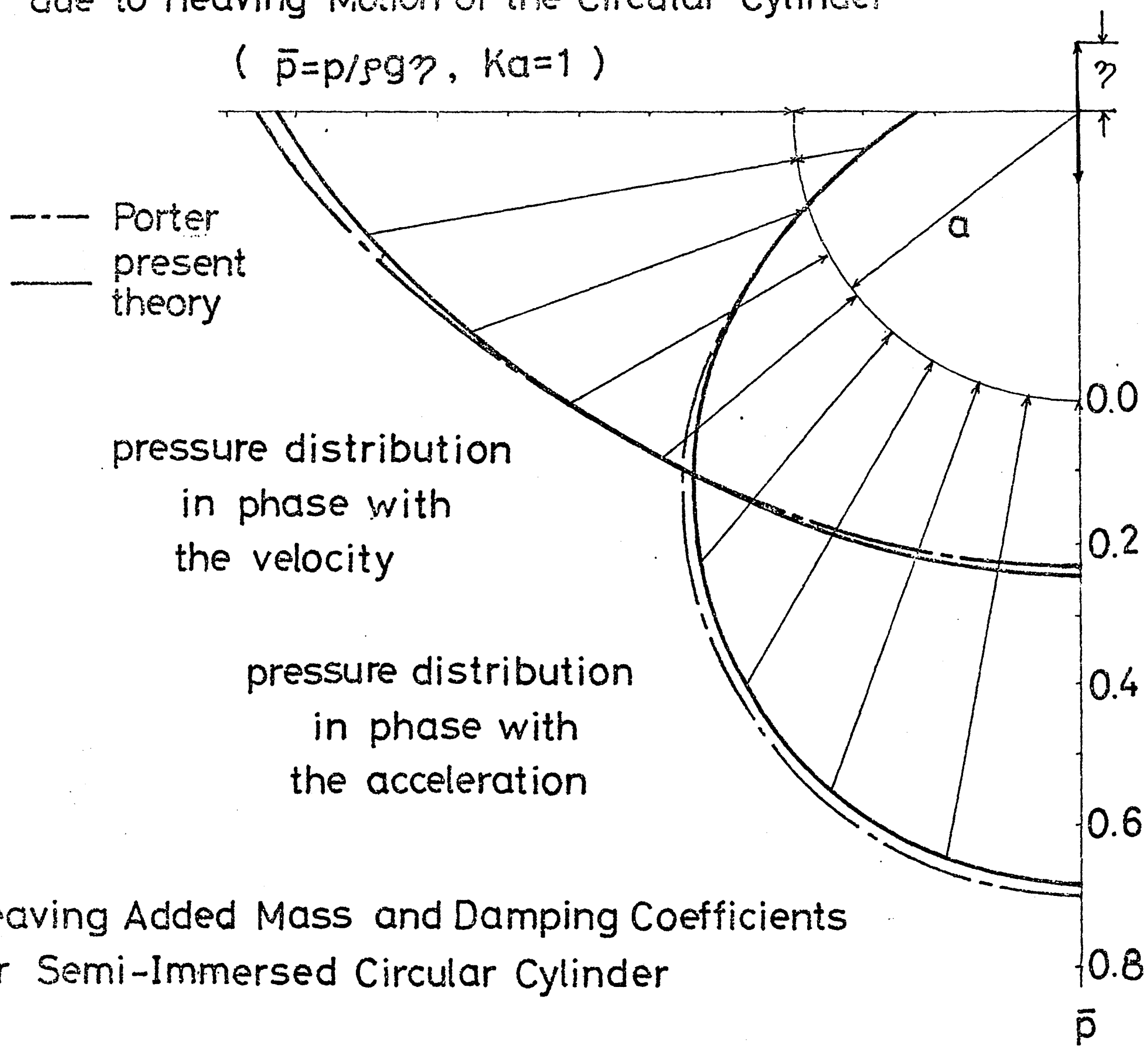
[3] K.J. Bai, "A Variational Method in Potential Flow with a Free Surface", Report No. NA 72-2, September, 1972. College of California, Berkeley.

[4] W.R. Porter, "Pressure Distributions, Added Mass and Damping Coefficients for Cylinders Oscillating in a Free Surface", Inst. Engrg. Res., Univ. Calif., Berkeley, Series 82, (1960).

Non-dimensional Pressure Distribution

 due to Heaving Motion of the Circular Cylinder

($\bar{p}=p/\rho g\eta$, Ka=1)



Heaving Added Mass and Damping Coefficients for Semi-Immersed Circular Cylinder