数理解析研究所講究録
第243巻 1975年 25-29

$S^1\underset{\tau}{\times}S^2$ のIsotopy classについて.

上智大 理　平井孝夫.

3次元多様体 $S^1\underset{\tau}{\times}S^2$ からそれ自身への同相写像全体がつくる群を恒等写像と"isotopic"であるような同相写像で構成される正規部分群で同値類分割した剰余群 $I(S^1\times S^2)$ は $\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$ であることをGluckは[1]で示した。ここでは3次元nonorientable多様体 $S^1\underset{\tau}{\times}S^2$ に於いて，この剰余群 $I(S^1\underset{\tau}{\times}S^2)$ がある仮定の下で $\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$ となることを示す。

§1.

r^2 を S^2 の antipodal map とする。$I\times S^2$ で $0\times S^2$ と $1\times S^2$ とを r^2 で同一視したものを $S^1\underset{\tau}{\times}S^2$ と考える。従って，$p: I\times S^2\to 0\times S^2$ を標準的な射影とすれば，同相写像 $f: I\times S^2\to I\times S^2$ が $f(0\times S^2)=0\times S^2$, $f(1\times S^2)=1\times S^2$, 更に $rf(0,x)=pf(1,r(x))$ （任意の $x\in S^2$）を満たせば，f を $S^1\underset{\tau}{\times}S^2$ の同相写像 f と見做すことができる。S^2 の点を極座標 (ϕ,θ) $(0\leqq\phi\leqq 2\pi,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ で書き，各 $u\in I$ に対して，T_u を S^2 の同相写像で $(0,u\pi)$ と $(\pi,\pi-u\pi)$ を通る直径を軸に

ある決められた方向に $2\pi u$ だけ回転するものとすれば，$T(u,x)=(u, T_u(x))$ $(\forall u\in I, \forall x\in S^2)$ で定義される $I\times S^2$ の同相写像Tは $S^1\tilde{\times}S^2$ の同相写像Tと見做せる。更に $I\times S^2$ の部分集合 $U=\{\bar{u}=(u,(0,u\pi))\ ;\ u\in I\}$ は $H_1(S^1\tilde{\times}S^2;\mathbb{Z})$ の generator である。

$S^1\tilde{\times}S^2$ の同相写像は $H_1(S^1\tilde{\times}S^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ の自己同型写像を誘導するが，isotopic であるふたつの同相写像の誘導自己同型は一致するから準同型 $\varphi: \mathcal{I}(S^1\tilde{\times}S^2)\to\mathbb{Z}_2$ が定義できる。$s(u,x)=(r'(u),x)$（但し $r'(u)=1-u$, $\forall u\in I, \forall x\in S^2$）で定義される $I\times S^2$ の同相写像を $S^1\tilde{\times}S^2$ の同相写像 s と考え，これを含む isotopy class と $S^1\tilde{\times}S^2$ の恒等写像1を含む isotopy class とで生成される $\mathcal{I}(S^1\tilde{\times}S^2)$ の部分群を $\mathcal{I}'\cong\mathbb{Z}_2$ とし，ρ を $\varphi\rho=1$ で定義される同型写像 $\rho:\mathbb{Z}_2\to\mathcal{I}'$ とする。今，$\mathrm{Ker}\,\varphi\cong\mathbb{Z}_2$ であることが示されれば，$\mathcal{I}\cong\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$ となることが分る。

§2.

補題1. 任意の $S^1\tilde{\times}S^2$ の同相写像 f を $f|_{0\tilde{\times}S^2}=1_{0\tilde{\times}S^2}$ となるように isotopy で変形できる。

証明、一般の位置の理論，3次元 Schenflies Theorem，及び Annulus Theorem より $f(0\tilde{\times}S^2)=0\tilde{\times}S^2$ となるように f を isotopy で変形できる。S^2 の同相写像 $f|_{0\tilde{\times}S^2}$ がもし S^2 の orientation をかえていれば，$S^1\tilde{\times}S^2$ で $0\tilde{\times}S^2$ を S^1 方向に一回だけまわす isotopy を f に作用してやれば，$f|_{0\tilde{\times}S^2}$ は S^2 の orientation をかえてい

ないことになり，$0\tilde{\times}S^2$ の $S^1\tilde{\times}S^2$ での bi-collar を使って，$f|_{0\tilde{\times}S^2}=1_{0\tilde{\times}S^2}$ とすることができる。

補題2. Ker φ に含まれる $S^1\tilde{\times}S^2$ の任意の同相写像は，1，又は，T と isotopic である。

$S^1\tilde{\times}S^2$ を $0\tilde{\times}S^2$ に沿って切りひらけば，補題1より当該の同相写像 f は $I\times S^2$ の同相写像で，$f|_{0\times S^2}=1_{0\times S^2}$, $f|_{1\times S^2}=1_{1\times S^2}$ となっているから，Gluck の [1] の方法とまったく同じようにして証明される。

§3.

ある仮定の下で，1 と T とが isotopic でないことを示す為に定義と記号を述べる。但し，π を標準的な射影 $\pi: S^1\tilde{\times}S^2\to S^1$ とする。

定義1. 任意の $u\in S^1$ に対して，$f(u\tilde{\times}S^2)=\pi^{-1}(v)$ となる $v\in S^1$ が存在するような $S^1\tilde{\times}S^2$ の同相写像を，レベルを保つ同相写像といい，レベルを保っている同相写像を結ぶ isotopy F_t が，任意の $t\in[0,1]$ に対して，同相写像 F_t がレベルを保っている時，レベルを保つ isotopy であるという。

ふたつの $F_0|U=1_U$, $F_1|U=1_U$ である $I\times S^2$ の同相写像を結ぶ isotopy F_t が，任意の $t\in I[0,1]$ に対し，$F_t|\dot{U}=1_{\dot{U}}$ であるとする。（これらを条件＊と呼ぶ）この isotopy F_t を homotopy と考えると，$pF|_{\dot{U}\times I}: U\times I\to 0\times S^2$ は条件＊より S^2 から S^2 へ

の連続写像になっていると考えてよいから，この $pF|_{U\times I}$ に対し写像度が決まる。

定義2. 条件＊をみたす isotopy F_t に対し，$\omega(F)=\deg(pF|_{U\times I})$ とする。この ω は isotopy F_t によって，U が $0\times S^2$ のまわりを何回転しているかを示すものである。そこで，次の様な記号を用意する。

記号. R を $I\times S^2$ の isotopy で，$R_0=1$，$R_t|_{0\times S^2}=1_{0\times S^2}$，$R_t|_{1\times S^2}=1_{1\times S^2}$　（$\forall t\in[0,1]$），更に，条件＊をみたし，レベルを保ちながら U を $0\times S^2$ のまわりをある一定方向に n 回転するものとする。勿論，これは $S^1\underset{\sim}{\times}S^2$ の isotopy でもある。

仮定. $S^1\underset{\sim}{\times}S^2$ のふたつのレベルを保つ同相写像が isotopic であれば，レベルを保つ isotopy が存在する。

定理. 仮定の下で，1 と T とは isotopic でない。

証明. 今，1 と T とが isotopic であるとする。1 も T もレベルを保つ同相写像であるから，仮定より，1 と T とを結ぶレベルを保つ isotopy F_t がある。この isotopy を S^1 方向に射影して考えれば，S^1 の isotopy になっているから標準的な $S^1\underset{\sim}{\times}S^2$ の isotopy G_t で，$G_0=1$，$G_1=1$，更に，$G_t(u\underset{\sim}{\times}S^2)=F_t(u\underset{\sim}{\times}S^2)$ （$\forall t\in[0,1]$ $\forall u\in S^1$） となるものが得られる。よって，この逆 isotopy を F_t にかければ，1 と T とを結ぶ isotopy H_t で，$H_t(u\underset{\sim}{\times}S^2)=u\underset{\sim}{\times}S^2$ （$\forall t\in[0,1]$，$\forall u\in S^1$） となっているものが得られる。$S^1\underset{\sim}{\times}S^2$ を $0\underset{\sim}{\times}S^2$

に沿って切りひらいて，この isotopy を $I\times S^2$ の isotopy H_t と考えると，一般の位置の理論を使って条件$*$を満たすようにできる。そこで，$\omega(H)=-n$ とする。すると 1 と $T\circ R_1$ とを結ぶ isotopy Ψ_t （$0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ の時 $\Psi_t=H_{2t}$，$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ の時 $\Psi_t=T\circ R_{2t-1}$）は $\omega(\Psi)=0$ を満たす。よって，ωの定義より，homotopy Φ: $(U\times I)\times I\to 0\times S^2$ で，$\Phi_0=p\circ\Psi$，$\Phi_1=p\circ 1_{U\times I}$ となるものがあるから，この homotopy Φ を使って，Uを各S^1上のレベルにひきもどすことにより，1 と $T\circ R_1$ とを結ぶ isotopy Ψ_t が Uを止めているようにできる。これを $S^1\tilde{\times}S^2$ の中で考えると，1 と $T\circ R_1$ とがUを止めて isotopic であることを示している。しかし，$U\subset S^1\tilde{\times}S^2$ の正則近傍の境界は Klein の壺で，$T\circ R_1$ は Klein の壺を奇数回ひねっているから，Klein の壺の恒等写像と isotopic になることはないので矛盾である。故に，仮定の下で，1 と T とは isotopic でない。

以上の事より，T^2は 1 と isotopic であるから，$\ker\varphi\cong\mathbb{Z}_2$ である。

参考文献

[1] Gluck. H　Embeddings of 2-spheres in 4-sphere. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308~333.