数理解析研究所講究録
第 243 巻 1975 年 30-41

S^3 判定の Algorithm について

東工大 理学部　本間龍雄

§1. Introduction

3次元閉多様体M^3が与えられたときに、M^3が3次元球面S^3であるかどうかを判定する一般的な algorithm は未だ知られていない。Poincare は最初 homology群により判定できるだろうと予想したが，反例が存在するのでこの予想は否定された。続いて Poincare は「homotopy 群がS^3の homotopy群と同型な3次元閉多様体M^3は，S^3である」という有名な Poincare の予想をたてたが，これはもちろん未解決である。

たとえ Poincare 予想が解決したとしても，S^3判定の algorithm が決定できるとは限らない。Poincare 予想が否定された場合は勿論であるが，肯定された場合でも，生成元と関係で表示された群が trivial であるかないかを判定する一般的 algorithm が存在しない以上何とも言えない。

しかしPoincare予想が肯定的に解決された場合は同時にS^3判定のalgorithmも完成される可能性は強い。

この稿でHeegaard分解（すなわち単体分割）を用いて判定のalgorithmを作ることを試みる。正確に言うと与えられたHeegaard分解から，irreducibleなHeegaard分解を作るalgorithmである。Heegaard分解がirreducibleであるという概念は§4で定義するが，M^3がirreducibleであるとは異なる概念である。「S^3のirreducibleなHeegaard分解は標準形に限る」ことが予想されるので，この予想が正しければ，S^3判定のalgorithmとなる。genus 2の場合はこの予想は肯定的に証明されるので，genus 2のHeegaard分解に対してはS^3判定のalgorithmとなる。しかしgenus 2の場合はBirman－Hilden[2]，高橋元雄[3]，Haken[1]の結果によってもalgorithmの存在は保証されている。

M^3がorientableであるかないかは簡単に判定できるのでM^3はorientableであると初めから仮定しておく。

§2 Heegaard分解のgenusを減らすalgorithm

M^3はgenus nのHeegaard分解 $M^3=M_1 \cup M_2$をもつものとする。すなわちM_1, M_2はgenus nのsolid torusで

$$\partial M_1 = \partial M_2 = M_1 \cap M_2$$

を満足するものとする。

$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ をそれぞれ M_1 と M_2 の meridian disc の系とする。すなわち

$$C_i \cap \partial M_1 = \partial C_i,\ D_i \cap \partial M_2 = \partial D_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$C_i \cap C_j = D_i \cap D_j = \phi \qquad i \neq j.$$

であって，$M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$, $M_2 - (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$ は連結である。

$$M_1 \cap M_2 = \underline{N}, \quad \partial C_i = \underline{A_i}, \quad \partial D_i = \underline{B_i}$$

と書く。$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ はそれぞれ M_1, M_2 の meridian 系となる。二つの meridian 系の交わり $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ は常に有限個の点としてさしつかえない。

Heegaard 分解を $T = \{N \mid A_1, \cdots, A_n ; B_1, \cdots, B_n\}$ と書くことにする。A_i と B_i が一点で交わり，$i = 1, \cdots, n$, $A_i \cap B_j = \phi$, $i \neq j$ であるとき，T は標準形であるという。M^3 が標準形の Heegaard 分解をもてば，M^3 はもちろん S^3 である。meridian 系の合併集合を

$$\underline{G(T)} = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

と書き，Heegaard 分解 T の genus を $\underline{n(T)}$，meridian 系の交わりの点の個数を $\underline{\#(T)}$ と書くことにする。

3次元球$\underline{B^3}$をとり，B^3の境界である2次元球面∂B^3上に2n個の互いに交わらない2次元球$\underline{C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1n}, C_{21}, C_{22}, \cdots, C_{2n}}$をとり，$B^3$から$M_1$の上への写像$\underline{F_1 : B^3 \to M_1}$をつぎのように作る。

a) $F_1 \mid B^3 - (C_{11} \cup \cdots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \cdots \cup C_{2n})$は$M - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$上への同相写像である。

b) $F_1 \mid C_{1i}$, $F_2 \mid C_{2i}$は共にC_i上への同相写像である。$i = 1, 2, \cdots, n$。

同様に$\underline{F_2 : B^3 \to M_2}$を定義する。

<u>定理1</u>．$F_1^{-1}(G(T))$（または$F_2^{-1}(G(T))$が連結でない場合，M^3に含まれる2次元球面S^2が存在し，$S^2 \cap M_1$, $S^2 \cap M_2$はそれぞれM_1, M_2の<u>*proper*</u>な2次元球で，$S^2 \cap N$はNで*homotop* 0でない1次元球面となり

$$S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n) = \phi$$

を満足する。

<u>証明</u>　F_1の場合に証明する。条件b)より

$$F_1(\partial C_{1i}) = F_1(\partial C_{2i}) = A_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

であるから，

$$F_1^{-1}(G(T)) = F_1^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n)$$

$$= (\partial C_{11} \cup \cdots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \cdots \cup \partial C_{2n}) \cup F_1^{-1}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$$

となる。$F_1^{-1}(G(\Gamma))$は2次元球面∂B^3上の連結でない<u>graph</u>であるから，∂B^3上に1次元球面$\tilde{S}$が存在して，

$$\tilde{S} \cap F_1^{-1}(G(\Gamma)) = \phi$$

で，$\tilde{S}$を境界とする∂B^3の二つの領域は共に$F_1^{-1}(G(\Gamma))$と交わる。$C_{11}, \cdots, C_{1n}, C_{21}, \cdots, C_{2n}$は互いに交わらない2次元球であるから，

$$\tilde{S} \cap (C_{11} \cup \cdots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \cdots \cup C_{2n}) = \phi$$

である。従って<u>$S^1 = F(\tilde{S})$</u>とおくと，S^1はNの1次元球面で，$\tilde{S} \cap F^{-1}(G(\Gamma)) = \phi$より

$$S^1 \cap G(\Gamma) = \phi$$

である。S^1はM_1の meridian 系$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$と交わらないから，$M_1$の meridian disc の系$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$と交わらない$M_1$の proper な2次元球$C^2$が存在し，$\partial C^2 = S^1$となる。同様に$S^1$は$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$と交わらないから，$\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$と交わらない$M_2$の proper な2次元球$D^2$が存在し，$\partial D^2 = S^1$となる。

$$S^2 = C^2 \cup D^2$$

とおくと，$S^2 \cap M_1 = C^2$, $S^2 \cap M_2 = D^2$であるからそれぞれM_1, M_2の proper な2次元球である。

$$S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n)$$
$$= (S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (S^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_n))$$
$$= (C^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (D^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_n))$$
$$= \phi$$

また $\tilde{S}$ を境界とする ∂B^3 の二つの領域は共に $F_1^{-1}(G(\Gamma))$ と交わるから，$S^1(=F(\tilde{S}))$ が $N(=\partial M_1=\partial M_2)$ において homotop 0（すなわち N の2次元球の境界）となることはない。

証明終り

系1　$G(\Gamma)$ が連結でなければ，定理1の条件を満たす S^2 が存在する。

証明　$G(\Gamma)$ が連結でないから，$F^{-1}(G(\Gamma))$ は連結でない。

定理1において，$S^1=S^2\cap N$ は N で homolog 0 の場合と，homolog 0 でない場合に分かれるが，S^1 が homolog 0 でない場合は M^3 は2次元 handle をもつことになるから，次の系が成り立つ。

系2　定理1の条件のもとで，$S^1=S^2\cap N$ が N で homolog 0 でないときは，M^3 は2次元 handle をもつ，従って M^3

は2次元球面と1次元球面の直積と3次元閉多様体の connected sum となる。故に M^3 は3次元球面でない。

S^1 が N で homolog 0 でない場合は，つぎの系が成り立つ。

系3　定理1の条件のもとで，$S^1(=S^2\cap N)$ が N で homolog 0 ならば，S^2 は M^3 で homolog 0 となり，Heegaard 分解は S^2 により二つの Heegaard 分解 T_1 と T_2 に分かれ

$$n(T_1),\ n(T_2) > 0$$
$$n(T) = n(T_1) + n(T_2)$$
$$\#(T) = \#(T_1) + \#(T_2)$$

を満足する。

故に $F_1^{-1}(G(T))$ または $F_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は S^3 判定の algorithm はもっと genus の低い場合に帰着できる。

§3　meridian 系の交点数を減らす algorithm

前章で $F_1^{-1}(G(T))$, $F_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は Heegaard 分解の genus を減らすことができることが判

明したので，この章では$F_1^{-1}(G(T))$，$F_2^{-1}(G(T))$が共に連結であることを仮定する。

定理2　あるi, j，$i=1, 2$，$j=1, 2, \cdots, n$，が存在して，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$（または$F_2^{-1}(G(T))-\partial D_{ij}$）が連結でないならば，$M^3$の Heegaard 分解$\tilde{T}$が存在して，

$$\#(\tilde{T}) < \#(T)$$
$$n(\tilde{T}) = n(T)$$

を満足する。

証明　$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$が連結でない場合に証明する。$F_1^{-1}(G(T))$は2次元球面$\partial B^3$から$2n$個の開2次元球$\mathring{C}_{11}, \cdots, \mathring{C}_{1n}, \mathring{C}_{21}, \cdots, \mathring{C}_{2n}$を除いた2次元多様体$X$に含まれていて，$\partial X = \partial C_{11} \cup \cdots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \cdots \cup \partial C_{2n}$である。$F_1^{-1}(G(T))$は連結で，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$は連結でないのであるから，$X$上に proper な1次元球$A$が存在して，

$$A \cap \partial X = A \cap \partial C_{ij} = \partial A$$
$$A \cap F^{-1}(G(T)) = \partial A$$

を満足し，Aによって分けられるXの二つの領域は共に，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$と交わる。

$\partial A = \underline{p \cup q}$ と書くことにする。A_i は M_1 の meridian だから，N で homolog 0 でない。p と q によって定まる ∂C_{ij} の二つの一次元球の適当な一方 $\underline{R}$ をとり，$\underline{\tilde{A}_i} = F_1(A \cup R)$ とおくと $\tilde{A}_i$ は N の一次元球面で，N で homolog 0 でない。しかし $A \cup R$ は X の1次元球面であるから，$\tilde{A}_i$ は M_1 の proper な2次元球 $\underline{\tilde{C}_i}$ の境界であり，

$$\tilde{C}_i \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_n) = \phi$$

として良い。$M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$ は連結であるから

$$M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup \tilde{C}_i \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_n)$$

も連結である。故に $\{C_1, \cdots, C_{i-1}, \tilde{C}_i, C_{i+1}, \cdots, C_n\}$ は M_1 の meridian disc の系であり，$\{A_1, \cdots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \cdots, A_n\}$ は M_1 の meridian 系である。$F_1^{-1}(G(T))$ は連結で，$F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ が連結でなく，A が $F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ を分けていることより，$\partial C_{ij} - R$ は $F_1^{-1}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ と交わる。故に $A_i - F_1(R)$ は $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ と交わる。$\tilde{A}_i$ と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数は A_i と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数より，$A_i - F_1(R)$ と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数の分だけ少なくなる。M^3 の新しい Heegaard 分解として，

$$\tilde{T} = \{N \mid A_1, \cdots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \cdots A_n, B_1, \cdots, B_n\}$$

を選ぶと，明らかに

$$\#(\tilde{T}) < \#(T)$$

$$n(\tilde{T}) = n(T)$$

である。

<u>証明終り</u>

§4 <u>判定の algorithm</u>

3次元閉多様体 M_1^3, M_2^3 の Heegaard 分解を T_1, T_2 とするとき, T_1 と T_2 の connected sum は自然に定義することができ, (§2の系3参照) それを <u>$T_1 \# T_2$</u> と書くことにする。もちろん $T_1 \# T_2$ は M_1^3 と M_2^3 の connected sum <u>$M_1^3 \# M_2^3$</u> の Heegaard 分解になっている。

<u>定義</u> Heegaard 分解 T において, 任意の $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して, $F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$, $F_2^{-1}(G(T)) - D_{ij}$ が連結ならば T は <u>s-irreducible</u> であると呼ぶことにする。さらに T がいくつかの s-irreducible な Heegaard 分解の connected sum となるとき, T を <u>irreducible</u> であると呼ぶことにする。

<u>定理3</u> M^3 が 2-handle をもたない3次元閉多様体であれば, M^3 の irreducible な Heegaard 分解を作る algorithm が存在する。

証明　M^3 の勝手な Heegaard 分解 T をとり，定理1と定理2を繰り返し用いて，genus がもっと小さい Heegaard 分解の connected sum に分けることと，meridian 系の交点数 $\#(T)$ を低くする algorithm を反復して，これ等の algorithm が進行できなくなるまで実施する。最後に irreducible な Heegaard 分解を得る。

証明終り

以上の algorithm が S^3 判定の algorithm となるという保証はないがつぎの予想をたてている。

予想　「S^3 の irreducible な Heegaard 分解は標準形だけである。」

この予想は genus 2 の場合だけしか証明できていないが，もしも genus が一般の場合に正しければ，S^3 判定の algorithm が存在することとなる。

[1] Haken. Wolfgang
Theorie der Normalflächen
Acta Math. 105 (1961), 245~376

[2] Birman J. S. & Hilden H. M.
The homeomorphism problem for S^3.
Bulletin of the A.M.S. vol.79 No.5
(1973), 1006~1010

[3] 高橋 元男
種数2の Heegaard 分解についての Birman-Hilden の定理の別証
数理解析研究所講究録

[4] 本間 龍雄
Heegaard 分解と曲面上の曲線系について
数理解析研究所講究録