

Manifold の Ball Covering について

北大 理 小林 一章
相模工大 津久井康之

compact manifold は有限個の *ball* で *cover* される。この最小数は明らかに *topological invariant* である。この極く自然な、一見荒っぽい、*invariant* がどのような性質を持ち、どのくらい有効なものなのか。この *note* ではこれらについての概観を試みることにし、証明の多くは省略する [Kobayashi-Tsukui]。全て *PL category* で考える (*Top. Dif.* でもこの概念は有効ではあろうと思われる)。特に断らな限り、*manifold* は全て *compact* かつ *connected PL manifold* で、*map* 等も全て *PL* とする。

Definition 1. M^n を n -manifold, $\beta = \{B_i\}$ を M^n の中にある n -ball (closed ball) の finite set とする。

- (1) $\cup B_i = M^n$ のとき β を M^n の weak ball covering と呼び、
- (2) M^n の weak ball covering $\beta = \{B_i\}$ が、 $B_i, B_j \in \beta$, $B_i \neq B_j$ について $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$: $(n-1)$ -manifold (connected でなく

ても良い) であるとき β を M^n の *ball covering* という。

$$\beta(M^n) = \min. \{ \#\beta; \beta \text{ は } M^n \text{ の weak ball covering } \},$$

$$b(M^n) = \min. \{ \#\beta; \beta \text{ は } M^n \text{ の ball covering } \}$$

と定義する。($\#\beta$ は set β の *element* の数を示す。)

manifold M の (weak) ball covering β が $\#\beta = b(M)$ (or $\beta(M)$) のときに β を *minimal* と呼ぶ。明らかに $\beta(M) \leq b(M)$ 。

Lemma 1. $\beta = \{B_i\}$ が manifold M の (weak) ball covering で, $\exists B_i, \exists B_j \in \beta, B_i \neq B_j, B_i \cap B_j = \emptyset$ 。

$\implies \exists \beta' : M$ の (weak) ball covering で $\#\beta' < \#\beta$ 。

Proof. β が M の ball covering のときの証明をする。

M が connected だから $\bigcup_{k \neq i, j} \partial B_k$ 上に B_i と B_j を結ぶ simple arc γ をとり、その regular neighborhood を $N = N(\gamma; M)$ とする。 $B_i \cup N \cup B_j$ は ball だから B'_i とし、 $B'_k = \text{cl}(B_k - B'_i)$, $k \neq i, j$ とすれば、 $\beta' = \{B'_k\}_{k \neq j}$ は M の ball covering で $\#\beta' = \#\beta - 1$ 。

Corollary 2. β が manifold M の minimal な (weak) ball covering ならば、 $\forall B_i, \forall B_j \in \beta, B_i \neq B_j$ について $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ 。

lemma 1. をくり返し用いると次が得られる。

Proposition 3. $b(M_1 \# M_2) \leq \max. \{ b(M_1), b(M_2) \}$ 。

次に $\dim M$ と $b(M)$ との関係について考えてみよう。

$$M^n = h^0 \cup \cup h_{k_1}^{p_1} \cup \dots \cup \cup h_{k_m}^{p_m}$$

と M^n の handle 分解を考え、 ($1 \leq p_1 < \dots < p_m \leq n$)。

lemma 1 の方法により同じ index の handle (m -ball) を 1 まとめ
にすることを inductive に行えば、

Proposition 4. M^n が上のような handle 分解をもてば、
 $b(M^n) \leq n+1$, である。

$M^n \searrow K^k$ ならば M^n は index $\leq k$ 以下の handle に分解され
るから、

Corollary 5. (1) $M^n \searrow K^k \Rightarrow b(M^n) \leq k+1$.

(2) $\partial M^n \neq \emptyset \Rightarrow b(M^n) \leq n$

(3) $M^n - \Delta^n \searrow K^k, M^n: \text{closed} \Rightarrow b(M^n) \leq k+2$.

従って $b(M)$ と $\dim M$ の関係としては一般に、

Theorem 6. $b(M^n) \leq n+1$.

Example 7. $b(S^p \times S^q) = 3, (p, q \geq 1)$

$S^p \times S^q$ は $0, p, q, p+q$ の index の 4 つの handle に分解さ
れ、かつ general position で p -handle と q -handle は交わらな
いから $b(S^p \times S^q) \leq 3$. ところが $S^p \times S^q$ は closed で、 $b(M)=2$
なら M は sphere 故 $b(S^p \times S^q) = 3$ を得る。

Contractible Manifolds について.

Lemma 8. $M^n: n$ -manifold, $b(M^n) = 2$ とする. $\{B_1, B_2\}$ が
 M^n の ball covering ならば、

(1) $\pi_1(M^n)$: free group of rank = rank $\tilde{H}_0(B_1 \cap B_2)$.

(2) $H_i(M^n) \cong H_{i-1}(B_1 \cap B_2) = H_{i-1}(\partial B_1 \cap \partial B_2)$, $2 \leq i \leq n$,

(3) $n \leq 4$ では, $H_2(M^n)$ は free abelian で, その generator は 2-sphere で実現される。

Proof. p_i を B_i の center とすれば $B_i \rightarrow p_i * (\partial B_1 \cap \partial B_2)$ 従って $M^n = B_1 \cup B_2 \rightarrow p_1 * (\partial B_1 \cap \partial B_2) * p_2 = \Sigma(\partial B_1 \cap \partial B_2) = \Sigma(B_1 \cap B_2)$ (suspension). (1)(2) はこの直接の結果。

$X \subset S^k$, $k \leq 3$ なら $H_1(X)$: free abelian だから, (2) から $H_2(M^n) \cong H_1(\partial B_1 \cap \partial B_2)$, $n \leq 4$, は free abelian. $H_1(\partial B_1 \cap \partial B_2)$ の generator は simple loop で表現されるから $H_2(M^n)$ の generator もその suspension として実現できる。

Theorem 9. M^n : homology n -sphere, $b(M^n) \leq 3$ ならば $M^n \cong S^n$.

Proof. $b(M^n) = 3$ と仮定し, $\{B_1, B_2, B_3\}$ を M^n の minimal な ball covering とする. lemma 8 と $\tilde{H}_*(B_1 \cup B_2) = 0$ から $\tilde{H}_*(\partial B_1 \cap \partial B_2) = 0$. Poincaré duality から $\partial(B_1 \cap B_2) = \partial(\partial B_1 \cap \partial B_2)$ は homology $(n-2)$ -sphere である. 従って $n \leq 4$ なら $\partial(B_1 \cap B_2) \cong S^{n-2} \subset \partial B_1$, $B_1 \cap B_2 \cong B^{n-1}$. 従って $B_1 \cup B_2 \cong B^n$ より $M^n \cong S^n$. $n \geq 5$ では, $\pi_1(B_1 \cup B_2) \cong \pi_1(\Sigma(B_1 \cap B_2)) \cong 0$ と Generalized Poincaré conjecture より $M^n \cong S^n$.

上の証明をみると次が成立している。

Corollary 10. M^n : acyclic manifold, $b(M^n) \leq 2$, $n \leq 4$

$\Rightarrow M^n \cong B^n$.

5次元以上ではこの事は正しくなく, $b(M^n)=2$ で (ball でない) contractible manifold M^n が存在する。構成の方法の細かい所は省略するが, $n \geq 4$ で contractible manifold U^n で $S^n \supset U^n$, $\pi_1(S^n - U^n) \neq 0$ なる example [Newman] [Neuzil] を用いる。

Proposition 11. [Glaser] $n \geq 4$ について, (ball でない) contractible n -manifold M^n で $\beta(M^n)=2$ なるものが存在する。

この Glaser の例は $n \geq 5$ では $\beta(M^n)=b(M^n)=2$ が確かめられるが $n=4$ について Corollary 10 と比べると;

Corollary 12. contractible 4-manifold M^4 が存在して $\beta(M^4)=2$ だが $b(M^4)=3$ である。

Glaser の Example M^4 は 2次元の spine P^2 ; $M^4 \supset P^2$ を持つから Corollary 5 から $b(M^4) \leq 3$, Corollary 10 より $b(M^4)=3$. Glaser は $n \geq 5$ では割合カンタンにできた Proposition 11 の例を $n=4$ では非常に苦労して作っている。その理由は 10 にあり、しかし苦労の甲斐あって我々は 12 を得られた。

contractible manifold M^n , $n \geq 5$ については handle 分解

での *cancelling* の議論から $2 \leq b(M^n) \leq 3$ が分っている。

Proposition 13 (Wall) M^4 : homotopy 4-sphere

$$\Rightarrow \exists k \geq 0, \quad b(M^4 \# k(S^2 \times S^2)) \leq 3.$$

これは Diff. case での Wall の $M^4 \# k(S^2 \times S^2) \stackrel{\text{Dif.}}{\cong} k(S^2 \times S^2)$ と example 7, proposition 3 から得られる。

一方 [Zeeman] は M^4 : 1-connected, closed $\Rightarrow \beta(M^4) \leq 3$. を示している。

このように *ball covering* は 4次元で興味ある問題をもつが、その前に 3次元で得られる結果をみてみよう。

3次元で。

manifold の handle 分解と *ball covering* の関係については前に一般的に見てきたが、3次元 manifold ではいっとう強い関係を handle 分解 - Heegaard Splitting - との間に認められる。証明が細部ですこしメンドーになるので結果のみを記すことにする。 S^3 から disjoint な有限個の balls の内部を取り去った manifold (with boundary) を punctured 3-sphere と呼ぶことにする。

Proposition 14. M^3 : 3-manifold, $\partial M^3 \neq \emptyset$.

M^3 は 1-handles (non orientable でも良い) 付の punctured

3-sphere である

$$\Leftrightarrow b(M^3) = 2.$$

Theorem 15. M^3 : closed 3-manifold.

$$b(M^3) = 3$$

$$\Leftrightarrow M^3 \cong k(S^1 \times S^2) \# \varepsilon(S^1 \times_{\tau} S^2) \text{ for some } k + \varepsilon \geq 1$$

$\varepsilon = 0$ or 1 ($\varepsilon = 1$: M^3 : non orientable).

ここで $S^1 \times_{\tau} S^2$ は twisted S^2 bundle over S^1 を示す.

Theorem 16. M^3 : closed 3-manifold, $M^3 \neq S^3$, $\pi_1(M^3) = 0$
or $H_2(M^3) = 0$ (このとき theorem 15 から $b(M^3) = 4$ である.)

$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を M^3 の ball covering とすると.

(1) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は 有限個の 2-ball である, $i \neq j$.

(2) $(M; B_{i_1} \cup B_{i_2}, B_{i_3} \cup B_{i_4})$ は M^3 の Heegaard Splitting
を与えている, $i_k \neq i_h$ if $k \neq h$.

4次元では.

予想 B(n, m): M^n : closed n-manifold, $\beta(M^n) \leq m \Rightarrow b(M^n) \leq m$.

予想 C(n): M_1^n, M_2^n : closed n-manifolds.

$$\Rightarrow b(M_1^n \# M_2^n) = \max\{b(M_1^n), b(M_2^n)\}$$

$B(n, m)$ は "closed" は本質的で「そうでない」と corollary 12
が反例である。定義等から $B(n, 2)$ ($n \neq 4$), $B(n, n+1)$ 及び $C(2)$
が正しいことは明らか。Theorem 15. から $C(3)$ も正しい。

Proposition 17. $P(4)$ で 4次元 Poincaré 予想, SC で Schoenflies 予想を示すと, 次の関係が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} B(4,3) & \xrightarrow{\textcircled{1}} & P(4) & \xrightarrow{\textcircled{3}} & SC & \xrightarrow{\textcircled{4}} & B(4,2) \\ & \searrow & \nearrow & & & & \\ & & C(4) & & & & \end{array}$$

③はよく知られているから ①, ②, ④を示そう.

①: M^4 を homotopy 4-sphere とすると proposition 13 の下の注意により $\beta(M^4) \leq 3$. $B(4,3)$ が正しいとすると theorem 9 より $M^4 \cong S^4$.

②: 同じく M^4 を homotopy 4-sphere とする. proposition 13 より, ある $k \geq 0$ について $b(M^4 \# k(S^2 \times S^2)) \leq 3$. $C(4)$ が正しいならば $b(M^4) \leq 3$. 再び theorem 9 により $M^4 \cong S^4$.

④ M^4 : closed, $\beta(M^4) = 2$ とする. $\{B_1, B_2\}$ が M^4 の minimal weak ball covering とすると, B_2 の boundary collar により $\partial B_1 \subset \text{Int} B_2$ としてもよい. SC より $\mathcal{C}(B_2 - B_1) \cong B^4$. すると $M^4 = B_1 \cup \mathcal{C}(B_2 - B_1)$, $B_1 \cap \mathcal{C}(B_2 - B_1) = \partial B_1 = \partial \mathcal{C}(B_2 - B_1)$. 故に $M^4 \cong S^4$ で $b(M^4) = 2$. (④の逆が正しいかどうかは知らない.)

もし, $B(4,2)$ が正しくなければ theorem 9 より, $\exists M^4$ で $\beta(M^4) = 2$ (i.e. topological には S^4) だが $b(M^4) = 5$ or 4 .

その他の事など.

1. $1 \leq b(M^n) \leq n+1$ (Theorem 6.) であるが, 実際に $1, \dots, n+1$ なる $b(M^n)$ をとる manifold が存在するのか, というのは当然の問題となる. $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n 回) について $b(T^n) = n+1$ が合っている. 従って T^n の ball covering $\beta = \{B_0, \dots, B_n\}$ をとると $M_n = T^n - \dot{B}_n$, $M_{n-1} = \text{cl}(M_n - B_{n-1}) = \bigcup_{i=0}^{n-2} B_i, \dots, M_2 = B_0 \cup B_1$, について $b(M_n) = n$ となっている.

しかし closed manifold という制限をつけると, 99% $b(S^1 \times \dots \times S^m) = m+1$ だろうと思われるが, 今のところ証明できていない。

2. X^n を ANR とするとき, X^n の sub set (closed) で X^n で contract する C_i について $X^n = C_1 \cup \dots \cup C_k$ と表わせるときこのような数 k の最小数 $\text{cat}(X^n)$ を X^n の Lusternik-Schnirelman category という. 「 X^n の中で contract」を「 C_i 自身が contractible」という条件で置き換えたとき $\text{cat}(X^n)$ と書き strong category と呼ぶ. $1 \leq \text{Cat}(X^n) \leq n+1$ が知られていて, theorem 6 との類似性に気がつくが, ball は contractible 故 $\text{cat}(M^n) \leq \beta(M^n) \leq b(M^n)$ である. $\text{cat}(X^n)$ はまた代数的な homotopy, cohomology theory との関係もある程度つけられ, $b(S^1 \times \dots \times S^m) \geq m+1$ 等もこれらの助けによって求められている.

3. n -manifold M^n について、 M の combinatorial manifold としての triangulation での n -simplex の最小数を $S(M)$, M の handle 分解での handle の最小数を $h(M)$ とすると、

$$\text{cat}(M) \leq \text{Cat}(M) \leq \beta(M) \leq b(M) \leq h(M) \leq S(M).$$

$h(M)$ と $b(M)$ との間にはかなりのギャップがありそうなので場合によっては次のような強い ball covering が有効かもしれない。 $\beta = \{B_i\}$ が M^n の ball covering のとき更に条件をつけて、 $B_i, B_j \in \beta$, $B_i \neq B_j$ のとき、

(i) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$: connected $(n-1)$ -manifold.

(ii) $\partial B_i \cap \partial B_j$: finite $(n-1)$ -balls

(iii) $\partial B_i \cap \partial B_j \cong B^{n-1}$: $(n-1)$ -ball.

4. ball covering はその定義の自然さから、多くの問題を ball covering の言葉で定式化することができる。その事によって問題の見通しが良くなるかどうかは今後考えるべき事であろう。closed n -manifolds と connected boundary を持つ $(n+1)$ -manifolds とを考えて、 $b(M)$ との関係である種の bordism を考えることも可能であろう。

REFERENCES

- Glaser, L.C., Contractible Complexes in S^n , Proc. AMS. 16 (1965) 1357 ~ 1364 .
- , Intersections of Combinatorial balls and of Euclidean spaces , Trans. A.M.S. 122 (1966) 311 ~ 12.
- Neuzil, J.P. , Embedding the dunce hat in S^4 , Topology 12 (1973) 411 ~ 415.
- Newman, M.H.A., Boundaries of ULC sets in Euclidean space , Proc. N.A.S. 34 (1948) 193 ~ 196.
- Wall, C.T.C., On simply connected 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964) 141 ~ 149.
- Zeeman, E.C. , The Poincaré Conjecture for $n \geq 5$, Topology of 3-manifolds, Prentice Hall, (1962) 198 ~ 204.
- Kobayashi, K. and Tsukui, Y., The Ball Coverings of manifolds, (to appear).