

変調 Langmuir 波と非線型 Landau 減衰^{*)}

九大 応力研 矢島信男
及川正行

§1. はじめに

1次元分散系の非線型変調波が非線型 Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q |u|^2 u = 0 \quad (1)$$

で記述されることは周知の通りである。⁽¹⁾ u は変調のためにゆるやかに変化する平面波の複素振幅である。実際、物理学の様々な分野でその実例が見出されている。⁽²⁾⁻⁽⁷⁾ 変調不安定 ($PQ > 0$) の場合に, Karpman & Kruskal,⁽⁸⁾ Yajima & Cuti⁽⁹⁾ および Satsuma & Yajima⁽¹⁰⁾ は (1) 式の初期値問題を数値的に調べた。その結果, 与えられた初期値は非線型性と分散性との釣合いのために Soliton 列に分裂し, これらの Soliton は相互作用を通じて極めて安定であることが明らかになった。Zakharov & Shabat⁽¹¹⁾ は (1) 式の初期値問題を, Lax⁽¹²⁾ によって定式化された方法を用いて, 解析的に解いた。(注: 彼らは $PQ < 0$ の場合の解析解も見出している。⁽¹⁷⁾) それによって, 数値的研究の結果が確認されただけでなく, 同

一の場所で周期的に脈動する解 (Solitonの束縛状態) の存在が明らかになった。

一般には、複数個の波が共存し得る。このような場合には、系は非線型変調波の重ね合せで記述され、各変調波は(1)式で支配される。⁽¹³⁾ これら変調波の速度は他の波の影響で群速度とは異ってくる。

さて、無衝突プラズマ波の非線型変調は(1)式で記述されるが、⁽⁵⁾ 実際のプラズマにおいては、波は共鳴粒子と強く相互作用する。例えば、非線型変調波はその群速度に等しい速度を持つ粒子によって散乱される。粒子の速度分布がMaxwell分布の場合、この散乱によって非線型Landau減衰がひき起される。Schikawa & Taniuti⁽¹⁴⁾はこの現象を調べ、次の微積分方程式を得た。

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q |u|^2 u + R \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(x', t)|^2}{x - x'} dx' u = 0, \quad (2)$$

ただし、 ρ はCauchyの主値を示す。波と粒子の相互作用の影響は積分項として現われるだけでなく、係数 Q も(1)式の場合と異ってくる。イオン波の変調に対しては、 Q はイオン温度と電子温度の比に依存して符号を変える。

われわれの目的は(2)式の積分項が非線型変調波、とくに、孤立波に与える影響を調べることである。このために、(2)

式を数値的に解く。結果を述べる前に、計算結果を解釈するときの手助けとなる若干の考察を行う。

$$u = \{ \psi_0 + \phi_1 e^{i(8x - \omega t)} + \phi_2 e^{-i(8x - \omega^* t)} \} e^{-i\omega_0 t} \quad (3)$$

式(2)に代入し、 ϕ_1, ϕ_2 について線型化する。 $*$ は複素共役を示す。分散関係は

$$\omega_0 = -Q/4 \psi_0^2, \quad (4)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4} P^2 g^4 \left\{ 1 - \frac{4Q}{P^2 g^2} \psi_0^2 + i \frac{4R}{P^2 g^2} \psi_0^2 \right\} \quad (5)$$

となる。 $\omega = \Omega + iP$ (Ω, P は実数) とおくと、

$$\Omega^2 - P^2 = \frac{1}{4} P^2 g^4 \left(1 - \frac{4Q}{P^2 g^2} \psi_0^2 \right), \quad (6.a)$$

$$\Omega P = \frac{1}{2} P R g^2 \psi_0^2. \quad (6.b)$$

$R=0$ とすると、(6)は通常の実数安定条件を与える。すなわち、 $4Q/4 \psi_0^2 / (P^2 g^2) > 1$ ならば、系は不安定 ($\Omega=0, P^2 > 0$) であり、さもなければ安定である。一方、 $R \neq 0$ のときは、成長率 P は決して 0 にならず、平面波は不安定となる。

$PR > 0$ の場合を考える。 $\Omega g > 0$ ならば $P > 0$ 、 $\Omega g < 0$ ならば $P < 0$ となる。従って、変調波が x の正方向に伝播する時、その振幅は成長し、負方向に伝播する時には減衰する。

§2. 方程式(2)の数値解 ($PQ > 0$ の場合)

— Envelope Soliton に対する非線型 Landau 減衰の影響 —

この場合には, (1)は次の *Envelope Soliton* 解を持つ。

$$S(x, t) = \exp\{i\{(V/P)x - (V^2/2P)t + (QA^2/2)t\}\} \\ \times A \operatorname{sech}\{(Q/P)^{1/2}A(x - Vt)\}. \quad (7)$$

この解は $x \rightarrow \pm\infty$ で $S, S_x, \dots \rightarrow 0$ という境界条件を満足し, 絶対値は形を変えずに伝播する。 $V=0$ とおくと, 静止 *Soliton*

$$S_0(x, t) = \exp\{i(QA^2/2)t\} A \operatorname{sech}\{(Q/P)^{1/2}Ax\} \quad (7')$$

を得る。量子力学の言葉でいえば, $Q > 0$ ならば, (1)の非線型項は引カポテンシャルとして作用し, それが分散項による波束の拡散を妨げ, 定常解(7')が可能となる。

2.1. *Envelope Soliton* に対する非線型 *Landau* 減衰の影響

(7')は(2)を満足せず, 積分項の影響で変形する。(2)に対する初期値として

$$u(x, t=0) = A \operatorname{sech}\{(Q/P)^{1/2}Ax\} \quad (8)$$

を選ぶ。これを初期値とする(1)の解が(7')である。この初期値に対して(2)の積分項は $x > 0$ で正, $x < 0$ で負となる。このことは非線型引カが $x > 0$ で強められ, $x < 0$ で弱められることを意味する。従って, 右側で波形はより急になる。
 ・ 非線型 *Landau* 減衰はかくして波形の対称性を破壊する
 ・ 非線型 *Landau* 減衰によるもう一つの効果がある。振

幅 A は x と共に増大するので、Soliton 解の位相 $QA^2t/2$ は x の大きいほど速くすすむ(7)を参照)。 (7)から判るように、これは $V \neq 0$ の効果を生み出す。それゆえ、最初静止していた

Soliton は動き出す。

(8)を初期値とする(2)の数値解を図1.に示す。 $A = Q = P = 1$ としている。結果は上で述べたことと一致している。

2.2. Envelope Solitonの束縛状態に対する非線型Landau減衰の影響

(1)式は次の解を持つ。

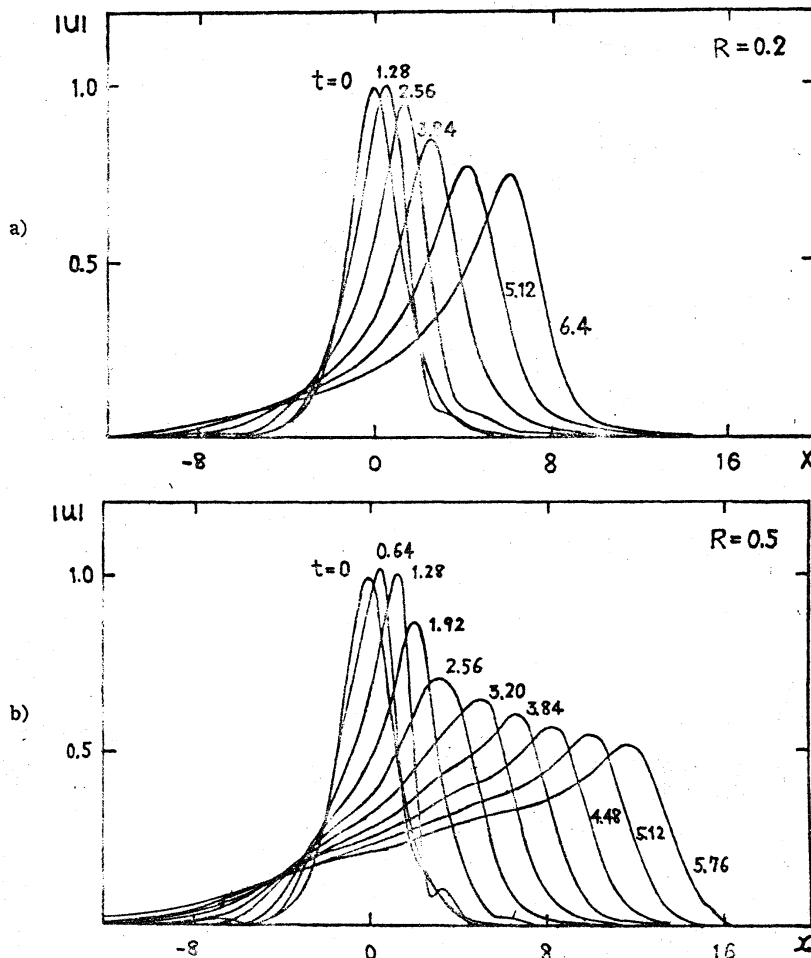


Fig. 1. Decay of Envelope Soliton Time development of solution for the initial condition (8) is calculated for both cases, a) $R=0.2$ and b) $R=0.5$.

$$u(x,t) = 4Ae^{iQA^2t/2} \frac{\operatorname{ch}(3Bx) + 3\operatorname{ch}(Bx)e^{4iQA^2t}}{\operatorname{ch}(4Bx) + 4\operatorname{ch}(2Bx) + 3\cos(4QA^2t)} \quad (9)$$

これは次の初期条件を満足する。

$$u(x,t=0) = 2A \operatorname{sech}(Bx), \quad B = (Q/P)^{1/2}A \quad (10)$$

この解は Soliton列に分裂せず、周期 $\pi/(2QA^2)$ で脈動する。虚数部が非対称である擾動を加えると束縛状態が解放され、その構成要素である

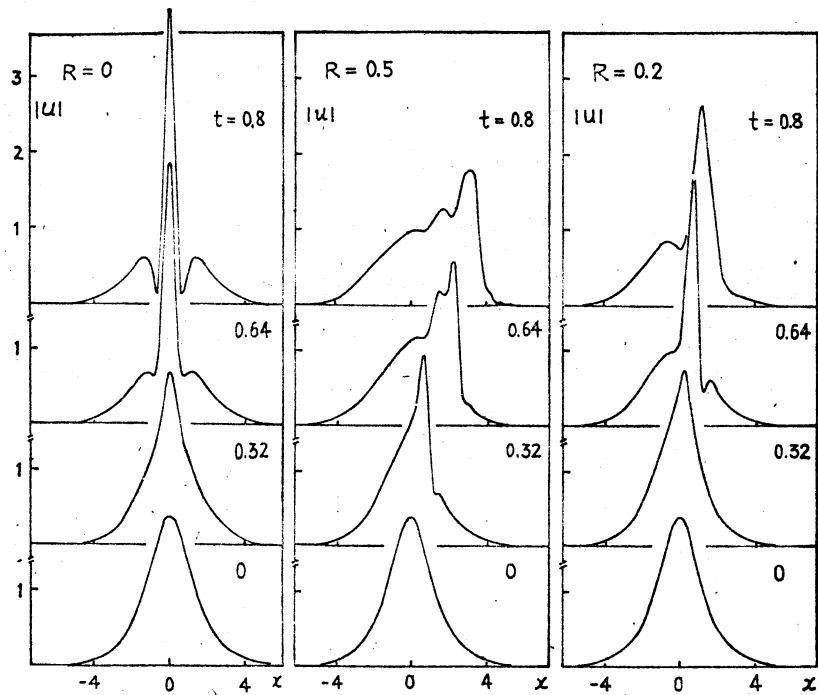


Fig. 2 Time development of solution for the initial condition (10). For comparison, the solution with $R=0$, i.e., (9), is also illustrated.

Solitons に分裂することが判っている⁽¹⁰⁾。(10)を初期値として(2)を解く。非線型 Landau 減衰のために u の対称性が破れ、それによって、初期の束縛状態は解放される。各 Soliton は形と速度を変えながら伝播する。結果を図 2 に示す。
 $A=2, P=Q=1$ としている。

§3. 方程式(2)の数値解 ($PQ < 0$ の場合)

$$u = \sqrt{n(x,t)} \exp(i\theta(x,t)/P] \quad (11)$$

によって n, θ を導入し, (2)に代入すると,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \quad (12.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - PQ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{P^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[n^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(n^{-1/2} \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] \\ - PR \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'} \frac{\partial n(x',t)}{\partial x'} dx' = 0. \quad (12.b) \end{aligned}$$

ただし, $v = \partial\theta/\partial x$. 高階微分の項と積分項を無視すると、(12)は双曲型になることに注意する。

$R=0$ のとき, (12)は次のSoliton解を持つ。

$$n(x,t) = n_0 \left[1 - A \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{c}{P} A^{1/2} (x - \lambda_{\pm} t) \right\} \right], \quad (13.a)$$

$$v(x,t) = \lambda_{\pm} \mp c(1-A)^{1/2} / \left[1 - A \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{c}{P} A^{1/2} (x - \lambda_{\pm} t) \right\} \right], \quad (13.b)$$

$$\lambda_{\pm} = v_0 \pm c(1-A)^{1/2}, \quad c = (-PQ n_0)^{1/2}. \quad (13.c)$$

ただし, n_0, v_0 はそれぞれ $x = \pm\infty$ での n, v の境界値である。上の解は振幅の凹みを表わす。凹みは(例えば, v_0 で走る座標系から見ると) λ_+ のとき右に, λ_- のとき左に伝播する。

このようなSoliton解に対する非線型Landau減衰の影響を調べるために, 次の初期値を与えて(2)を数値的に解く。

$$u = n_0^{1/2} \left[1 - A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{P} A^{1/2} x \right) \right]^{1/2} \exp \left[\mp i \frac{c}{P} (1-A)^{1/2} x + \tan^{-1} \left(\left(\frac{A}{1-A} \right)^{1/2} \tanh \left[\frac{c}{P} A^{1/2} x \right] \right) \right]. \quad (14)$$

これは $\lambda_{\pm} = 0$ とした Soliton 解(13)に対応する。結果を図3及び図4に示す。非線型 Landau 減衰のために, Soliton は x の正方向に伝わる時減衰し, 負方向に伝わる時増大することがわかる。次に, 非線型 Landau 減衰が十分小さく, 変調と同程度の大きさである場合を調べよう。

この場合, 逐次摂動法を適用できる。⁽¹⁶⁾ 変調が小

さいとして, n, v を微小パラメータ ε で展開する。

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad (15.a)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots. \quad (15.b)$$

非線型効果と分散効果の両方を取り入れるために, 次の座標を導入する。

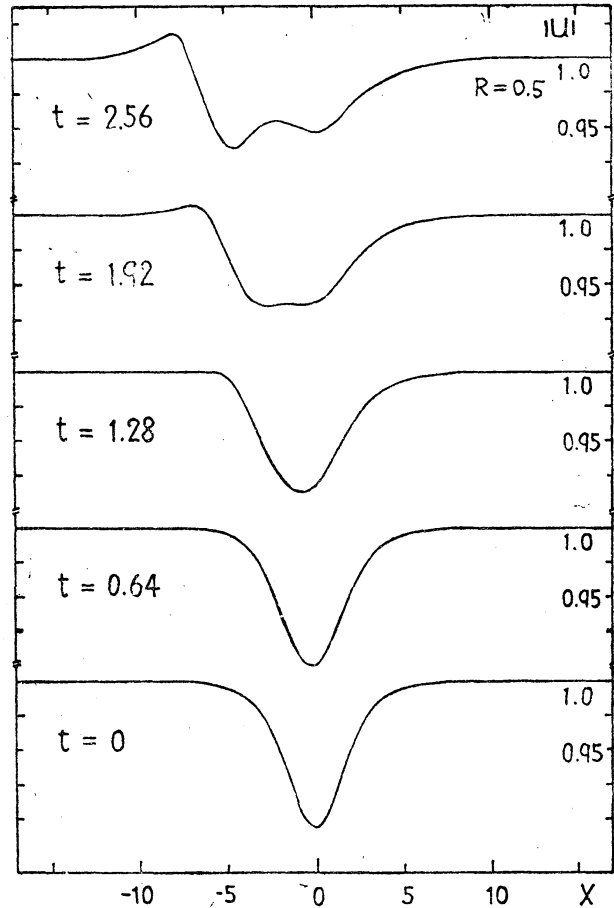


Fig. 3. Time development of solution for the initial condition (15) with $\lambda_+ = 0$, $A = 0.1$, $P = -1$, $Q = 1$ and $R = 0.5$.

$$\xi_1 = \varepsilon^{1/2}(x - ct - \varepsilon^{1/2}\psi_1), \quad (16.a)$$

$$\xi_2 = \varepsilon^{1/2}(x + ct - \varepsilon^{1/2}\psi_2), \quad (16.b)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2}t. \quad (16.c)$$

ただし, c は (13.c) で与えられる. ψ_1, ψ_2 は左右に伝わる2つの波の相互作用を考慮して導入しており, ξ_1, ξ_2, τ の函数と考える.

$$R = \varepsilon r \quad (17)$$

としよう. ただし,

$$r = O(1) \text{ とする.}$$

(15)~(17) を (12) に代入する. 最低次で,

$$v_1 + (c/n_0) n_1 = f(\xi_1, \tau), \quad (18.a)$$

$$v_1 - (c/n_0) n_1 = g(\xi_2, \tau). \quad (18.b)$$

を得る. $O(\varepsilon^{5/2})$ で,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[2cF + \left\{ \frac{f g}{4} - \frac{1}{8} g^2 + \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_2^2} - \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi')}{\xi_2 - \xi'} d\xi' \right\} \right] \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{3}{4} f \frac{\partial f}{\partial \xi_1} - \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi_1^3} + \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi_1 - \xi'} \frac{\partial f}{\partial \xi'} \right] \end{aligned}$$

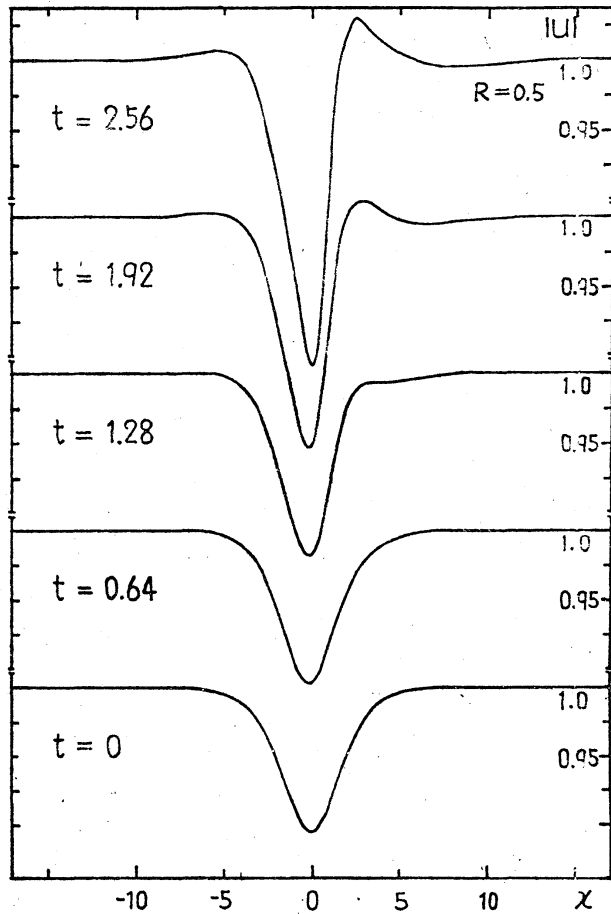


Fig. 4 Time development of solution for the initial condition (15) with $\lambda = 0.1, A = 0.1, P = -1, Q = 1$ and $R = 0.5$.

$$+ \left(\frac{1}{4} g - 2c \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 0, \quad (19.a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ 2cG + \left\{ -\frac{fg}{4} + \frac{1}{8} f^2 + \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} - \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi')}{\xi_1 - \xi'} d\xi' \right\} \right\} \\ & + \left[\frac{\partial g}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} g \frac{\partial g}{\partial \xi_2} + \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^3 g}{\partial \xi_2^3} - \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi_2 - \xi'} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right] \\ & - \left(\frac{1}{4} f + 2c \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial g}{\partial \xi_2} = 0 \end{aligned} \quad (19.b)$$

を得る。ただし、 $F = u_2 + (c/n_0)n_2$, $G = u_2 - (c/n_0)n_2$ 。

函数 ψ_1 及び ψ_2 を

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = \frac{g}{8c}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} = -\frac{f}{8c} \quad (20)$$

となるように選ぶ。(20) を (19) に代入し、 F, G の有界性を課すと、

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} f \frac{\partial f}{\partial \xi_1} - \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi_1^3} + \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi_1 - \xi'} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 0, \quad (21.a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_2} + \frac{3}{4} g \frac{\partial g}{\partial \xi_2} + \frac{P^2}{8c} \frac{\partial^3 g}{\partial \xi_2^3} - \frac{rc}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi_2 - \xi'} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} = 0. \quad (21.b)$$

を得る。これは *Qiu & Sudan*⁽¹⁵⁾ が有限振幅のイオン音波に対する線型 Landau 減衰の影響を調べて得た方程式と一致している。

変換 $g \rightarrow -f$, $\xi \rightarrow -\xi$ によって、(21.b) は (21.a) に帰着

する。 $r=0$ のとき, (21. a) は *negative-amplitude Soliton*, (21. b) は *positive-amplitude Soliton* と解として持つ。
 $r \neq 0$ の場合, *negative-amplitude Soliton* f は時間的に減衰し, *positive-amplitude Soliton* g は成長する。この傾向は初期条件(14)の下での(2)の数値解と一致している(図3, 4を参照)。

§4. 数値計算法について

(2)式の数値計算にあたって, 微分項はすべて中心差分で近似した。積分の計算については, 特異点の近傍では u をテイラー展開し微分係数の計算に帰着させるという方法をとった。残りの区間の積分は Weddle の公式を用いた。

§5. まとめ

$PQ > 0$ の場合, 非線型 Landau 減衰によって Soliton は非対称的に変形し, 速度を変えながら減衰する。Soliton の束縛状態は Soliton 別に分裂し, 各 Soliton は上と同様に振舞う。一方, $PQ < 0$ の場合は, $PQ > 0$ の場合と性格が異なる。その正方向に伝播する Soliton は減衰し, 負方向に伝播する Soliton は成長する。

References

- 1) Taniuti, T. and Yajima, N.: Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. I, J. math. Phys., Vol. 10, (1969), p. 1369.
- 2) Hasimoto, H. and Ono, H.: Nonlinear Modulation of Gravity Waves, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, (1972), p. 805.
- 3) Tappert, F. D. and Varma, C. M.: Asymptotic Theory of Self-Trapping of Heat Pulses in Solids, Phys. Rev. Letters, Vol. 25, (1970), p. 1108.
- 4) Hasimoto, H.: A Soliton on a Vortex Filament, J. Fluid Mech., Vol. 51, (1972), p.477.
- 5) Asano, N., Taniuti, T. and Yajima, N.: Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. II, J. math. Phys., Vol. 10, (1969), p. 2020.
- 6) Taniuti, T. and Washimi, H.: Self-Trapping and Instability of Hydromagnetic Field in a Cold Plasma, Phys. Rev. Letters, Vol. 21, (1968), p. 209.
- 7) Taniuti, T. and Yajima, N.: Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. III, J. math. Phys., Vol. 14, (1973), p. 1389.
- 8) Karpman, V. I. and Krushkal', E. M.: Modulated Waves in Non-linear Dispersive Media, Soviet Physics JETP, Vol. 28, (1969), p. 277.
- 9) Yajima, N. and Outi, A.: A New Example of Stable Solitary Waves, Prog. Theor. Phys., Vol. 45, (1971), p. 1997.
- 10) Satsuma, J. and Yajima, N.: Initial Value Problems of One-Dimensional Self-Modulation of Nonlinear Waves in Dispersive Media, Prog. Theor. Phys. (supplement), No. 55, (1974), p.284.

- 11) Zakharov, V. E. and Shabat, A. B.: Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media, Soviet Physics JETP, Vol. 34, (1972), p. 62.
- 12) Lax, P. D.: Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 21, (1968), p.467.
- 13) Oikawa, M. and Yajima, N.: A perturbation Approach to Nonlinear Systems. II.— Interaction of Nonlinear Modulated Waves, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 37, (1974), p. 486.
- 14) Ichikawa, Y. H. and Taniuti, T.: Nonlinear Wave Modulation with account of the Nonlinear Landau Damping, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 34, (1973), p. 513.
- 15) Ott, E. and Sudan, R. N.: Nonlinear Theory of Ion Acoustic Waves With Landau Damping, Phys. Fluids, Vol. 12, (1969), p. 2388.
- 16) Oikawa, M. and Yajima, N.: Interaction of Solitary Waves — A Perturbation Approach to Nonlinear Systems, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 34, (1973), p. 1093.
- 17) Zakharov, V.E. and Shabat, A.B.: Interaction between Solitons in a Stable Medium, Soviet Physics JETP, Vol. 37, (1973), p. 823.

*) より完全な議論に対しては次の論文を参照。

Yajima, N., Oikawa, M., Satsuma, J. and Namba, C.: Modulated Langmuir Waves and Nonlinear Landau Damping, to be published in Reports of Research Institute for Applied Mechanics No.70, (1975), (Kyushu University).