

トーラス上の保測変換についての補足 (II)

津田 塾 伊藤 俊次

十時氏草稿における微分方程式(1)と(2)は differentiable の範囲で考えることが出来るべきで、実際 草稿を述べらるゝる Generic, Kolmogorov 及び Arnold の仕事はこのようなものである。例えは

定理: γ が (1) の rotation number とするとき γ が "not too well" ならば (1) と (2) は同型 (differentiable な保測変換の同型) となる。

この定理は次のように理解するのが自然である。 (2) という基本的な方程式は time change したとき、どこまで "変わりうるか" という問いに対し、 R^1 上 $\delta = \gamma h_2$ の measure μ の真の μ の "全く変わらない" という主張である。ある μ は (1) という方程式は "殆んど全く" (2) と同じとなる。

それでは μ の measure μ の真の μ が "too well" に近似するとき (1) なる方程式はどのようなものがあるか。

定理 (Kato) (1) の方程式の γ が "too well" (not too well の対偶, 無論 γ が無理数 α とき) であるとき,

(1) は singular, simple spectrum ともつ。

この定理は次のように理解される。(2)の方程式は discrete spectrum (ふつ, singular simple) ともつが, その time change (1)は変化しても singular, simple spectrum ^{まで} ^{この場合は} ^{Lebesgue spectrum を持つ} と主張がある。草稿の Sklauer と合わせれば, 実際 singular simple, continuous なスペクトル ともつ (1)なる方程式があることを言うことになる。江川氏, 丸山氏の質問を整理すれば

(1) continuous となる, 又 discrete となる (1)なる方程式が存在するかは知られていない。

(2) Katok の結果から (1)の方程式の metrical entropy は "零" である。topological entropy にも n とは知られていないが 他方 "零" となるのである。一般に flow が \mathbb{Z} によって与えられるとき, その time change の topological entropy がどう変わるかに n とは知られていない。

\mathbb{R}^2 上の簡単な Anosov 系と \mathbb{Z} の群同型写像 A が考えられるが, これは深く上記の (2)の方程式と結びついている。(これに n とは補足(I)を参照) とする \mathbb{Z} transverse T_2 の方程式 (2) type の方程式) の rotation number は 2次方程式の解であるの \mathbb{Z} "not too well" である。これは A に近い Anosov system と \mathbb{Z} Sinai-Arnold による small perturbation

A_ε を考えよう。 A と A_ε は同型 (topological 意味で) であることの主張 (structure stable であること) であるが, perturbation の仕方に一定の制限を付けたとき, 例えば A_ε は Lebesgue measure と絶対連続となる A_ε によって保たれる測度をもつとき, 果たして, differentiable の意味で保たれる同型写像があるかという問題がある。これについて yes の可能性の予想として,

A_ε は transversal flow が存在して (1) の形として与えること及び同様の rotation number をもつ "not too well" であること。から transversal flow を用いた同型の可能性を求めたのであるが…… (補足 I 参照)