

ト-ラス上のあるエルゴード系

名大養 大和一夫

§1. Introduction

測度を保つ smooth な discrete 力学系について考える。

よく知られているように Anosov の力学系はエルゴード性をもち、更にそのエルゴード性は small perturbation によって不変である。Anosov 力学系の example は n 次元ト-ラス T^n 上の自己同型として、 \mathbb{R}^n の hyperbolic 線型変換 (その固有値の絶対値がどれも 1 に等しくない) からひきおこされるものによって与えられる。

そこで、 \mathbb{R}^n の quasi-hyperbolic な線型変換 (その固有値のひとつは 1 に等しく、残り $(n-1)$ 個の固有値の絶対値はどれも 1 に等しくない) からひきおこされる T^n の自己同型 (それ自身はつまらないがその generically perturbed system) がどの程度 Anosov 系に似た性質をもつかを考える。

我々の結果は次の様になる: 3次元の場合 ($n > 3$ でも多分同様), quasi-hyperbolic $\phi_0: T^3 \rightarrow T^3$ の generically perturbed system ϕ はエルゴード性をもち、

small perturbation で不変である。更に §4 では ϕ が almost Anosov という性質をもつかどうかについて考える。

§2. perturbed system ϕ に associate した splitting $C \oplus D \oplus E$.

以下、簡単のため $n=3$ とする。 $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ と考え、

その点 (の座標) を (x, y, z) とあらわす。 $\phi_0 : T^3 \rightarrow T^3$ を

$$\phi_0 = \alpha \times \text{id} : T^2 \times T^1 \rightarrow T^2 \times T^1,$$

ここで $\alpha : T^2 \rightarrow T^2$ は \mathbb{R}^2 の hyperbolic 線型変換から

ひきおこされるもの (固有値 c, d , $0 < c < 1 < d$, とする)

id は T^1 の恒等写像。

とする。このとき T^3 の tangent bundle は

$$TT^3 = C_0^1 \oplus D_0^1 \oplus E_0^1$$

と split して, $\phi_{0*} : TT^3 \rightarrow TT^3$ によって

$$C_0 \rightarrow C_0, \quad D_0 \rightarrow D_0, \quad E_0 \rightarrow E_0$$

がひきおこされ

$$\|\phi_{0*} v\| = c \|v\| \quad \text{for } v \in C_0,$$

$$\|\phi_{0*} v\| = d \|v\| \quad \text{for } v \in D_0,$$

$$\|\phi_{0*} v\| = \|v\| \quad \text{for } v \in E_0.$$

さて, $\varepsilon > 0$ を, $0 < c + \varepsilon < 1 < d - \varepsilon$ を

満たすようにとる。 $\phi : T^3 \rightarrow T^3$ を ϕ_0 に十分近い

(C^2 -topology) diffeomorphism τ volume $dx dy dz$ を保つ

とする。

Lemma 1. perturbed system ϕ に對して,

$$T\mathbb{T}^3 = C^1 \oplus D^1 \oplus E^1 \quad (\text{continuous})$$

と split し、 $\phi_*: T\mathbb{T}^3 \rightarrow T\mathbb{T}^3$ に對して

$$C \rightarrow C, \quad D \rightarrow D, \quad E \rightarrow E$$

が ひきおこされ,

$$\|\phi_* v\| < (c+\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in C,$$

$$\|\phi_* v\| > (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in D,$$

$$(c+\varepsilon)\|v\| < \|\phi_* v\| < (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in E.$$

さらに、この splitting は ϕ に 連続的に depend する。

Remark 1. line fields C, D は 夫々 \mathbb{T}^3 上の dimension 1 の foliation を 定義する。すなわち \mathbb{T}^3 の 点に對して、その点をとおる、 C (or D) の 積分曲線 (leaf) が 一意的に存在する。そして C の 各 leaf (\mathbb{R}^1 に同型) は ϕ の 一般化された 安定多様体 になる。 D の 方にも 同様。また、 C, D は Anosov の 意味で "absolutely continuous".

Definition 1. continuous 2-plane field $C \oplus D$ が 点 $p \in \mathbb{T}^3$ で non-integrable とは

$\exists \Delta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ continuous imbedding

(i) $\Delta((0, 0)) = p,$

(ii) $\Delta([0, 1] \times 0) : C$ の ある leaf に 含まれる,

(iii) $\Delta(1 \times [0, 1]) : D$ の ある leaf に 含まれる,

(iv) $\forall t \in [0, 1]$ に対して, $\Delta([0, 1] \times t)$ は C のある leaf に含まれる.

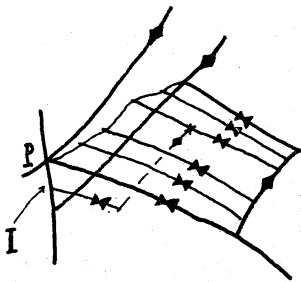
(v) $\exists \Gamma : \text{Im} \Delta \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ continuous

a) $\Gamma|_{\text{Im} \Delta \times 0} = \text{identity}$,

b) $\forall q \in \text{Im} \Delta$ に対して, $\Gamma(q \times [0, 1])$

は D のある leaf に含まれる,

c) $\exists I \subset \mathbb{T}^3$ smooth curve through p ,
各点で E に接している,



$\ast\ast$: C の leaf

\ast : D の leaf

$$\Gamma(\Delta(0 \times [0, 1])) = I,$$

$$\Gamma(\text{Im} \Delta \times 1) \subset \bigcup_{q \in I} q \text{ を通る } C \text{ の leaf,}$$

Remark 2. C, D は ϕ に連続的に depend するので
"点 p において non-integrable" という性質は small perturbation
のもとでは不変である.

Theorem 1. $C \oplus D$ が \mathbb{T}^3 の各点で non-integrable
ならば ϕ は ergodic である.

Remark 3. " \mathbb{T}^3 上に十分細く分布した有限個の

点で "non-integrable" という仮定だけで Theorem は成立.

Theorem の 証明 は 次の § で与えるとして,
non-integrable $C \oplus D$ をもつ ϕ の 例 を 考えよう.

$\zeta: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ volume preserving, identity に 十分近い
diffeomorphism, を 次のように定めて, $\phi = \zeta \circ \phi_0$ とおく.

$\phi_0 = \alpha \times id$, $\alpha: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ Anosov で あたは ちと 思ひなす.

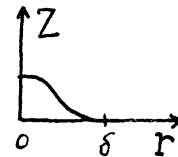
α が fixed points p, q を もつ と 仮定する. すると 平行四辺形
 $P \subset \mathbb{T}^2$ が 存在して, 各辺は (un)stable manifold of
 p or q の 部分集合, P の 4 つ の 頂点のうち p, q が 向い
あう 2 つ の 頂点, 残りの 2 つ は heteroclinic points になる.
 $\delta > 0$ 十分小として, $U_\delta(p), U_\delta(q) \subset \mathbb{T}^2$ を 考える, ここで
 $U_\delta(p), U_\delta(q)$ は 夫々, p, q を 中心, 半径 δ の 開円板 を あらわす.
 $U_\delta(p) \cap U_\delta(q) = \emptyset$, $U_\delta(p)$ は p 以外 の P の 頂点 を 含まない,
 $U_\delta(q)$ は q 以外 の P の 頂点 を 含まない. そこで $Z: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
を 0 に 十分近い smooth function で

$$1) \text{supp}(Z) \subset U_\delta(p) \cup U_\delta(q),$$

2) $Z|_{U_\delta(p)}, Z|_{U_\delta(q)}$ は 夫々, 中心 p, q からの 距離 r
だけに depend し, r の 関数 として 図 の ような もの,
とする. そして 求める

$$\zeta: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$$

を $\zeta(x, y, z) = (x, y, z + Z(x, y))$ と 定義する. $\phi = \zeta \circ \phi_0$ が 求める 性質 を もつ
ことが 確かめられる.



§3. Proof of Theorem (概略)

簡単のため, E は smooth と仮定する. すると E を $\dim 1$ の foliation を定義する. \mathbb{T}^3 の点 p をとる, C, D, E の leaves を夫々 $L_C(p), L_D(p), L_E(p)$ とあらわす.

さて, $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ が ϕ -invariant とする. i.e., $f(\phi(w)) = f(w)$ for $\forall w \in \mathbb{T}^3$. Amosov [Steklov (1967)]

によると $\exists A \subset \mathbb{T}^3, \text{mes}(\mathbb{T}^3 - A) = 0$,

almost every leaf L of C (or D)

に対して

1) $A \cap L \subset_{\text{full}} L$, i.e., $\text{mes}_L(L - A \cap L) = 0$,

2) f は $A \cap L$ である constant に等しい.

ところが $C \oplus D$ の non-integrability より

almost every leaf L of E に対しても上の 1), 2)

が成立する.

ことがわかる. そこで

$$A_1 = \left\{ p \in A \mid \begin{array}{l} A \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), A \cap L_D(p) \subset_{\text{full}} L_D(p) \\ A \cap L_E(p) \subset_{\text{full}} L_E(p) \end{array} \right\}$$

とおくと $\text{mes}(\mathbb{T}^3 - A_1) = 0$. 更に,

$$A_2 = \left\{ p \in A_1 \mid A_1 \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), \dots \dots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ p \in A_2 \mid A_2 \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), \dots \dots \right\}$$

を考えると, すると $\text{mes}(\mathbb{T}^3 - A_3) = 0$.

今, $p \in A_3$ に対して continuous imbedding

$$\Delta: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3, \quad \Delta(0, 0) = p,$$

$$\Delta(0 \times [-1, 1]) \subset \text{leaf of } D, \quad \Delta([-1, 1] \times t) \subset \text{leaf of } C.$$

を考える. 簡単のため Δ が smooth と仮定すると

$$\text{Im } \Delta \cap A_3 \subset \underset{\text{full}}{\text{Im } \Delta}$$

が意味をもち, して $\text{Im } \Delta \cap A_3$ 上で f は constant.

さらに $\text{Im } \Delta \cap A_2$ の点をとる E の leaf 上で f は almost everywhere constant. したがって f は p の nbd で almost everywhere constant. 従って \mathbb{T}^3 で そうである. ϕ の ergodicity が 証明された.

§ 4. ϕ は almost Anosov ?

ϕ に対して $f: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ を 次のように定義する:

$$f(p) = \frac{\|\phi_* v\|}{\|v\|}, \quad \begin{array}{l} v \in E_p (= E \text{ の } p \text{ 上の fibre}) \\ v \neq 0 \end{array}$$

(f は $\phi_*: E \rightarrow E$ の, 各点での倍率をあらわす.)

continuous function $\log f: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, Birkhoff エルゴート定理より $\exists H \subset \mathbb{T}^3$, $\text{mes}(H) = 1$,

$\forall p \in H$ に対して.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{ \log f(p) + \dots + \log f(\phi^{N-1}(p)) \}$$

が 存在し, ϕ が ergodic ならば $\int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dx dy dz$ に 等しい.

とこから $v \in E_p, v \neq 0$, に対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\phi_*^N v\|}{\|v\|} \right)^{\frac{1}{N}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(f(p) \cdot f(\phi(p)) \cdots f(\phi^{N-1}(p)) \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{N} \left\{ \log f(p) + \cdots + \log f(\phi^{N-1}(p)) \right\} \\ &= \exp \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dx dy dz \end{aligned}$$

従って, ergodic な ϕ に対して 且

$$(*) \quad \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dx dy dz \neq 0$$

のとき, ϕ は H 上で "Anosov" になっている。このとき ϕ を "almost Anosov" と呼ぶたいが, (*) をみたす ϕ の example が今のところ見つからない。