数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 199-204

Fuchs 型方程式系の局所理論

神戸大 理　吉田正章
高野恭一

§I 序　以下我々は，方程式系（完全積分可能とする）

(1)　$dX = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{x_i} dx_i\right) X$

を考える。ここで $P_i(x)$ は $x=0$ で正則な $m\times m$ 行列で，

(2)　$P_i(x) = \sum_{k\geq 0} P_{i,k} x^k$.

我々は，$\{P_{i,k}\}$ のどの成分が，(1)の解の局所的ふるまいを決定するかを発見するであろう。

$x=0$ で正則な可逆行列 $U(x)$ による変換 $X = U(x) Y$ は，(1)を Y に関する以下の如き方程式に変換する。

(3)　$dY = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(x)}{x_i} dx_i\right) Y$,

(4)　$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(x)}{x_i} dx_i = U(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{x_i} dx_i\right) U(x) - U(x)^{-1} dU(x)$.

第一に，我々は，(3) が §4で定義する 'reduced form' になるように $U(x)$ を決める。次に，我々は，成分が非負な

整数の対角行列 $L_i = \mathrm{diag}(l_i^1, \cdots l_i^m)$ を使った変換 $Y = x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$ によって，'reduced' な (3) を定数行列 $B_1, \cdots, B_n$ を係数にする方程式 $dZ = (\sum B_i/x_i\, dx_i) Z$ に変換する。

このノートを準備している時に，我々は T. Kimura から，R. Gérard が，我々と似た問題を解きつつあることを教えられた。

(注) このノートで '正則' とは holomorphic のことである。

§ 2　収束定理.

我々は後で使うある収束定理を準備する。

定理 1　$|x| < \varepsilon$ で正則な行列 $F_i(x)$ を係数にする方程式

$$(5) \quad du = \left(\sum_1^n \frac{F_i(x)}{x_i} dx_i \right) u$$

のどんな形式的ベキ級数解も $|x| < \varepsilon$ で収束して，(5) の正則な解を表す。

§ 3. 積分可能条件

(1) の積分可能条件は，

$$(6)_{i;j;k} \quad k_j P_{i,k} - k_i P_{j,k} + \sum_{k'+k''=k} [P_{i,k'}, P_{j,k''}] = 0.$$

ここで，$k = (k_1, \cdots, k_n)$.

§ 4　Reduced Form への reduction

<u>定義</u>: $dX=(\sum P_i(x)/x_i\, dx_i)X$ が $(k,(\alpha,\beta))$ について、'reduced' とは、もしある i に対して、$a_i^{\alpha\alpha}-a_i^{\beta\beta}-k_i\neq 0$ なら、すべての $j=1,\cdots,n$ に対して、$p_{j,k}^{\alpha\beta}=0$ が成立すること。ここで、$P_i(x)=\sum_{k\geq 0}P_{i,k}x^k$, $P_{i,k}=(p_{i,k}^{\alpha\beta})$, $P_{i,0}=(a_i^{\alpha\beta})$.
更に、すべての $(k,(\alpha,\beta))$ について 'reduced' なら、方程式が、'reduced' と言う。

先づ我々は、$U(x)=\sum_{k\geq 0}U_k x^k$ をうまく取って、変換された方程式を 'reduced' にする。

<u>4.1 型式的 reduction</u>　$U(x)$ を以下の様に分解する

$$U(x)=U_0\cdot U_1(x)\cdots U_N(x)\cdots$$

ここで、U_0 は nonsing. const 行列,

$$U_N(x)=U_N^{(1,m)}(x)\cdot U_N^{(2,m)}(x)\cdots U_N^{(m,m)}(x)\,U_N^{(1,m-1)}(x)\cdot U_N^{(2,m-1)}(x)\cdots U_N^{(1,1)}(x)\cdot U_N^{(2,1)}(x)\cdots U_N^{(m,1)}(x),$$

$$U_N^{(\alpha,\beta)}=I+\sum_{|k|=N}U_k^{(\alpha,\beta)}x^k,$$

$U_k^{(\alpha,\beta)}$ は constant 行列で、(α,β)成分が、$u_k^{\alpha\beta}$ で、残は 0. 我々は順々に、U_0, $U_1^{(1,m)}(x)$, $U_1^{(2,m)}(x)$, $\cdots$, $U_N^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\cdots$ を決める。

(6)$_{i,j;0}$ より (2) の $P_{i,0}$ $(i=1,\cdots,n)$ は互いに可換故、U_0 をうまく取って、

$$(7)\begin{cases}\text{(i)} & A_i=U_0^{-1}P_{i,0}U_0,\ i=1,\cdots,n \text{ は下三角},\\ \text{(ii)} & \text{if } a_i^{\alpha\alpha}-a_i^{\beta\beta}=0 \text{ for some } i, \text{ then } a_j^{\alpha,\beta}=0,\ j=1,\cdots,n\end{cases}$$

とできる。ここに、$A_i=(a_i^{\alpha\beta})$. U_0 で変換された方

程式は，$(0,(\alpha,\beta))$ について，'reduced' になる。更に，$\delta>\beta$ または，$\delta=\beta$ かつ $\gamma<\alpha$ のとき，$(\gamma,\delta)<(\alpha,\beta)$ と書いて，我々は以下の Prop. を得る。

<u>Proposition I</u> (Induction Process). $dX=(\sum_i^n \frac{P_i(x)}{x_i}dx_i)X$ が，$k\ (|k|<N)$ あるいは，$k\ (|k|=N)$ かつ $(\gamma,\delta)<(\alpha,\beta)$ なる $(k,(\gamma,\delta))$ について 'reduced' とせよ。更に，$P_{i,0}=A_i$ が (7)を満すとせよ。しからば，適当な変換 $X=U_N^{(\alpha,\beta)}Y$ によって変換された方程式は，$k\ (|k|<N)$ あるいは，$k\ (|k|=N)$ かつ $(\gamma,\delta)\leq(\alpha,\beta)$ なる $(k,(\gamma,\delta))$ について，'reduced'．更に，変換された方程式を $dY=(\sum Q_i(x)/x_i\, dx_i)Y$ とすると，

(8) $Q_{i,k}=P_{i,k}$ for $k\ (|k|<N)$ $i=1,\cdots,n$,

(9) $q_{i,k}^{\gamma\delta}=p_{i,k}^{\gamma\delta}$ for $k\ (|k|=N)$, $(\gamma,\delta)<(\alpha,\beta)$.

もし，$a_{i_0}^{\alpha\alpha}-a_{i_0}^{\beta\beta}-k_{i_0}\neq0$ for some i_0 なら，$u_k^{\alpha,\beta}\ (|k|=N)$ は，

(10) $(a_{i_0}^{\alpha\alpha}-a_{i_0}^{\beta\beta}-k_{i_0})u_k^{\alpha\beta}+p_{i_0,k}^{\alpha\beta}=0$

によって決定される。

どんどんやっていって，無限積を展開して，

<u>定理2</u> 型式ベキ級数 $\sum_{k\geq0}U_kx^k$ ($\det U_0\neq0$) によって，(1) は 'reduced' form になるようにできる。

<u>注1</u> $\sum U_kx^k$ は高々有限個の不定因子しか含まぬ。

<u>注2</u> もし，$P_{i,0}$ の固有値の差が integer でなければ，(1) は，$dY=(\sum P_{i,0}/x_i\, dx_i)Y$ に変換され，このとき $U(x)$

は一意にきまる。

4.2. 解析的 reduction　定理1より、定理2の $U(x)$ は収束し、holomorphic. 故に、

定理3. (1) に対して、収束級数 $U(x)=\sum_{k\geq 0} U_k x^k$ $(\det U_0 \neq 0)$ をうまく取って、$X=U(x)Y$ と変換すると、

$$(11)\qquad dY=\left(\sum Q_i(x)/x_i\right)Y.$$

ここで、

(i) $Q_i(x)=A_i+\sum_{k>0} Q_{i,k}x^k$ (有限和). A_i, 下三角,

(ii) $q_i^{\alpha\beta}(x)=q_i^{\alpha\beta}\cdot x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$,　$k_\mu=a_\mu^{\alpha\alpha}-a_\mu^{\beta\beta}$, $\mu=1,\dots,n$.

$q_i^{\alpha\beta}(x)$ は、$a_\mu^{\alpha\alpha}-a_\mu^{\beta\beta}$ が非負な整数 $\underbrace{(=k_\mu)}_{\mu=1,\dots,n}$ のときに限り nonzero であり得る。

§5. Singular な変換　'reduced' な (11) を考える. $L_i=\operatorname{diag}(l_i^1,\dots,l_i^m)$ とせよ. Singular な変換 $Y=x_1^{L_1}\cdots x_n^{L_n}Z$ は (11) を、$dZ=\left(\sum B_i(x)/x_i\,dx_i\right)Z$, $B_i=(b_i^{\alpha\beta}(x))$, $Q_i(x)=(q_i^{\alpha\beta}(x))$,
$b_i^{\alpha\beta}(x)=q_i^{\alpha\beta}(x)\,x_1^{l_1^\beta-l_1^\alpha}\cdots x_n^{l_n^\beta-l_n^\alpha}-\delta_\beta^\alpha l_i^\alpha$ に移す。

我々は、l_i^α をうまく取って、$b_i^{\alpha\beta}(x)$ を constant にする。$\{a_i^{\alpha\alpha}\}_{\alpha=1,\dots,m}$ を class に分ける. i.e. $[a_i^{\alpha\alpha}]=[a_i^{\beta\beta}] \Leftrightarrow a_i^{\alpha\alpha}-a_i^{\beta\beta}\in\mathbb{Z}$. $a_i^{\alpha_0\alpha_0}$ を class $[a_i^{\alpha\alpha}]$ の中で、real part が最小のものとする。$l_i^\alpha=a_i^{\alpha\alpha}-a_i^{\alpha_0\alpha_0}$ とすれば、$b_i^{\alpha\beta}(x)$ は constant $b_i^{\alpha\beta}$ になる。

定理4　適当な nonnegative integer l_i^α を取って，
$Y = x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$ で，reduced な (11) を変換すると，
$dZ = (\sum B_i/x_i\, dx_i) Z$，　B_i は constant で，
$B_i = A_i - L_i + \sum_{k>0} Q_{i,k}$　（有限和）　となる．

注意3　定理4内の l_i^α は unique には決らないが，
$l_i'^\alpha$ を別のものとすれば，$l_i^\alpha - l_i'^\alpha = l_i^\beta - l_i'^\beta$ for any α, β with
$[a_i^{\alpha\alpha}] = [a_i^{\beta\beta}]$．

§6 結論　定理3，4より．

定理5．(1) は，$X = U(x) x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$ により．
$dZ = (\sum B_i/x_i\, dx_i) Z$　に移る。そして，$U(x)$，L_i，B_i
は，(1)の係数から，代数的に計算できる。また $P_i(0)$
と $B_i + L_i$ は固有値が等しい。

定理5と全く同じようにして，

定理6．方程式

$$dX = \left(\sum_{i=1}^{\nu} P_i(x)/x_i\, dx_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} P_i(x)\, dx_i \right) X$$

（$P_i(x)$：正則 at 0）

は，$X = \left(I + \sum_{k_{\nu+1} + \cdots + k_n \geq 1} U_k x^k \right) Y$　によって，

$$dY = \left(\sum_{1}^{\nu} \frac{P_i(x_1, \cdots x_\nu, 0 \cdots 0)}{x_i} dx_i \right) Y$$ に移る．