

Imaginary Lagrangean が現われる場合の  
Fourier 変換

名大理 柏原 正樹  
京大数研 佐藤 幹夫  
" 三輪 哲二  
京大理 室 政和

§1 問題の説明

鈴木氏の講演で、概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換のほとんどが、micro local calculus によって決定されることが示された。その計算は、 $f(x)^S$  あるいはその満たす holonomic system は micro local に考えると  $x_1^S$  とその満たす holonomic system にすぎない事に着目し、 $x_1^S$  の Fourier 変換という簡単な手続きを、 $T^*M$  上で fiber 方向に総計する事によって求めたのであった。

その際、 $x_1^S$  を標準形とするのだから、計算に現われる Lagrangean が real であることが当然必要である。そうはならない最も簡単な例として  $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^S$  がある。しかし言うまでもなく、この場合は直接計算して

答は得られる。実は、もっと複雑な例においても, *micro local* な標準形として,  $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^S$  を持ってくれば 前と同様な手続きで 計算が逐行できる。その原理と いくつかの例を与えてみたい。

## §2 標準形と接続行列

$V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$  の一点を  $x_0^*$  とする。  $x_0^*$  を通る三つの Lagrangean  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset V \times V^*$  があり  $\mathcal{M} = \mathcal{D}f^S$  を  $x_0^*$  の近くで考えた時 その support が  $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  にあるとしよう。

(仮定1) 実接触変換で  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$  は次の標準形に変換される。

$$\Lambda_2 : \xi_1 = \dots = \xi_l = x_{l+1} = \dots = x_n = 0$$

$$\Lambda_1 : x_1^2 + \dots + x_l^2 = 0 \text{ の conormal}$$

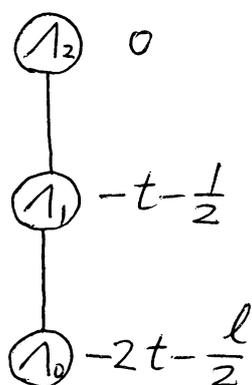
$$\Lambda_0 : x_1 = \dots = x_l = x_{l+1} = \dots = x_n = 0$$

(仮定2)  $\mathcal{M}$  は  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$  で "simple" また交わりの generic point で "symbol ideal" が reduced とする。

$$\begin{aligned}
 \text{(仮定3)} \quad t &= \text{ord}_{\lambda_2} f^S - \text{ord}_{\lambda_1} f^S - \frac{1}{2} \\
 &= \text{ord}_{\lambda_1} f^S - \text{ord}_{\lambda_0} f^S - \frac{l-1}{2}
 \end{aligned}$$

この時, holonomic system  $\mathcal{M}$  は  $x_0^*$  の近くで  $g_l^t = (x_1^2 + \dots + x_l^2)^t$  の満たす holonomic system と一致する。

実際,  $g_l^t$  の満たす方程式の support が (仮定1) の  $\lambda_0 \cup \lambda_1 \cup \lambda_2$  になり, (仮定2) (仮定3) が満たされる事は明らかである。holonomy diagram で言えば



逆に, 仮定を満たす  $\mathcal{D}f^S$  に対しては, 適当な分数階の楕円型擬微分作用素  $Q$  で generator を取り換える事によ

り  $\text{ord}_{\lambda_2} Qf^S = 0$  とする事ができ, この時

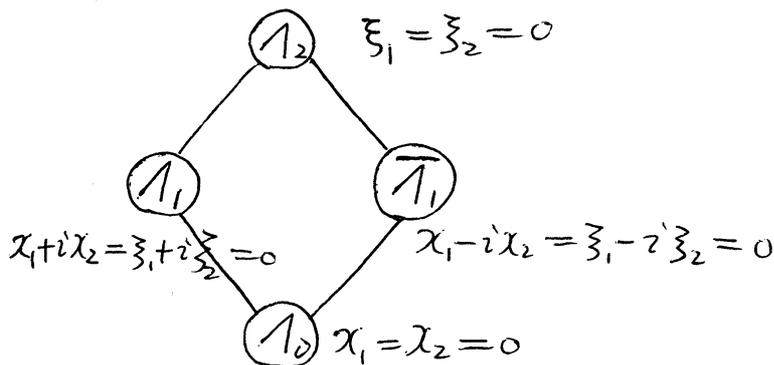
$$\text{(仮定3) から } \text{ord}_{\lambda_1} Qf^S = -t - \frac{1}{2}$$

$$\text{ord}_{\lambda_0} Qf^S = -2t - \frac{l}{2}$$

となる。(仮定2) と order についての情報から,  
 $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$  の generic point 及び  $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ ,  
 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$  の generic point での holonomic system  
 の構造が決まってしまう。残る所は,  $\dim \leq n-2$  であ  
 るから 次の定理により 至る所決まってしまう。

定理(相原)  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  が点  $x_0^* \in T^*X$  の  
 近くで定義された holonomic system で  $\dim S \leq n-2$   
 なる 集合  $S \subset T^*X$  を除いて  $\mathcal{M}_1|_{T^*X-S} \cong \mathcal{M}_2|_{T^*X-S}$   
 ならば 実は至る所で  $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$  である。

厳密に言うと  $l=2$  は様子が異なる。holonomy  
 diagram は



となる。この場合は, (仮定1) と (仮定2) だけから,  
 方程式の標準形が  $(x_1 + ix_2)^{S_1} (x_1 - ix_2)^{S_2}$  になる  
 事がわかる。特に  $S_1 \equiv S_2 \pmod{\mathbb{Z}}$  なる場合は,

鈴木氏が取り扱った概均質ベクトル空間で、そこにおける係数体  $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$  と思ってそれを複素化した時の相対不変式が  $f^S \bar{f}^{S+l}$  ( $S \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z}$ ) の場合の標準形であり、その場合の Fourier 変換は  $f^S$  についての結果から自動的に計算される事を注意しておく。  $S_1 = S_2$  となるのが、我々の今扱っている場合である。

次に、接続行列を求める。その方法は、数理研講究録として刊行された “Microlocal calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換 (柏原 - 三輪)” (以下 [K-M] と略称する。) に modify すればよい。以下それと述べるが、細部については上記を参照してほしい。

$$u = 2^{-\frac{n-l}{2}} (x_1^2 + \dots + x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}} \delta(x_{l+1}) \dots \delta(x_n).$$

の Principal symbol を計算すると、

$$\sigma_{1,2}(u) = (x_1^2 + \dots + x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}} \sqrt{\frac{dx_1 \dots dx_l d\beta_{l+1} \dots d\beta_n}{dx_1 \dots dx_n}}$$

$$\sigma_{1,0}(u) = 2^{-\lambda - \frac{l}{2}} \frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+l}{2})} \times$$

$$\left(\xi_1^2 + \dots + \xi_l^2\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{d\xi_1 \dots d\xi_n}{dx_1 \dots dx_n}}$$

となる。これは、 $(x_1^2 + \dots + x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}}$  の Fourier 変換を計算すればよい。(Gelfand - Shilov; Generalized functions Vol.1 などにある)

さて標準型に直す前の  $\Lambda_0, \Lambda_2$  において、そこで与えられた microfunction solution  $u_{\Lambda_0}, u_{\Lambda_2}$  が、ひと続きの solution となるための条件を求めてみる。

$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = S$  とし、 $S$  の generic pt.  $S_1$  の neighborhood で考える。以下単に  $\Lambda_0, \Lambda_2, S$  と書くとき、それは、 $S_1$  の nbd と  $\Lambda_0, \Lambda_2, S$  の intersection の意味であるとして了解された。

$\dim S = n - l$  である。 $\Lambda_0$  上の函数  $f_0$  が、次の条件を共に満たすものがある。

i)  $f_0|_S = 0$  かつ  $df_0|_S = 0$ .

ii)  $f_0^{loc}$  を  $f_0(\delta + \varepsilon t) = \varepsilon^2 f_0^{loc}(\delta, t) + O(\varepsilon^3)$

$(\delta, t) \in T_S \Lambda_0$  により  $T_S \Lambda_0$  の函数として定義することができる。そして  $\sigma_{f_0}(l)$  は自然にこの normal bundle に作用してゐる。すると  $f_0^{loc}$  は  $t$  による二次式で  $\sigma_{f_0}(l)$  相対不変。

同様に  $\Lambda_2$  上に  $\varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty$  ができる。

すると  $\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$  が  $S$  の座標に関する, non-zero analytic function 係  $\tau$  の  $\tau^{-1}$  に  $\tau$  になることは,  $\varphi_0(\lambda)$  相対不変性より明らかである。

$(T_S \Lambda_0) \times_S (T_S \Lambda_2)$  は  $T_S \Lambda_0$  の座標  $\tau, \{(\alpha, \xi)\}$ ,  $T_S \Lambda_2$  の座標  $\tau, \{(\alpha, \eta)\}$  ととり,  $\tau$  と  $\xi$  は 2 $\ell$ -次元の symplectic vector space  $\tau$  ( $\alpha \in S$  を fix したとき) なるようにとることができる。

$\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$  は  $T_S \Lambda_0, T_S \Lambda_2$  上の函数であるが:

$$\begin{array}{ccc} (T_S \Lambda_2) \times_S (T_S \Lambda_0) & = & (T_S)^{\perp} \\ \swarrow & & \searrow \\ T_S \Lambda_2 & & T_S \Lambda_0 \end{array}$$

の projection による  $(T_S)^{\perp}$  上に  $\tau$  の  $\tau^{-1}$  の  $\tau$  になることができる。

$$\tau_2 = 2^{-\frac{\ell}{2}} \frac{d\{\alpha_1, \varphi_2^{loc}\} \wedge \cdots \wedge d\{\alpha_\ell, \varphi_2^{loc}\}}{(\det \{\alpha_i, \varphi_2^{loc}\})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tau_0 = 2^{-\frac{\ell}{2}} \frac{d\{\xi_1, \varphi_0^{loc}\} \wedge \cdots \wedge d\{\xi_\ell, \varphi_0^{loc}\}}{(\det \{\xi_i, \varphi_0^{loc}\})^{\frac{1}{2}}}$$

$\tau = \tau^{-1}$  は  $(\alpha, \xi)$  space の Poisson Bracket

と定義すれば、これは  $\{(x, \xi)\}$  という symplectic 座標のとり方にはよらない。

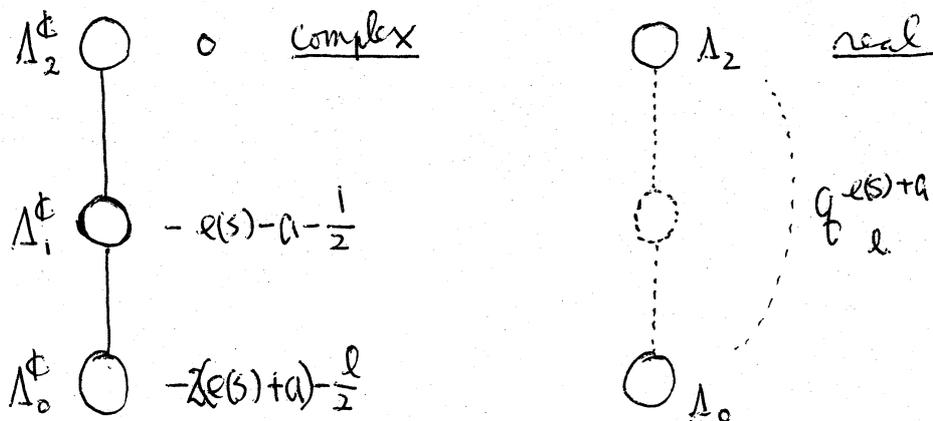
$$\psi: T_S \Lambda_2 \times_S T_S \Lambda_0 \hookrightarrow V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$$

を  $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$  によって  $T_S \Lambda_2 \in \Lambda_2 \wedge T_S \Lambda_0 \in \Lambda_0$  へとす  $(T_S)^s$  の  $s$  の nbd で定義された。両方の space の symplectic structure が、Compatible な埋め込み写像であるとする。実際、これは仮定により存在する。

概均質ベクトル空間にあてはめて接触変換で不変な比をつくろう。

$(G, V, \mathcal{F}) \in$  正則な概均質ベクトル空間で、相対不変式は一般には多数あるとする。記号は  $[K-M]$  にあわせる。

$\mathcal{F}^s$  のための holonomic system  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}^s} \in T^*V$  にちあげた  $\mathbb{C}$ -Module  $\in \mathcal{M}$  とし、その局所化として、次のような holonomy diagram を持つ 2 次型式があらわれたとする。



さて  $\eta$  を、 $S$  上の  $(n-1)$  form とし、次の比を考える。  
 これは有限の意味を持ち、接触変換  $\varphi_0, \varphi_2, \alpha, \xi, \eta$ ,  
 などのとり方には、depend しない。

$$\begin{aligned} & \sigma_{\Delta_0}(\mu_{\Delta_2}) |\varphi_0|^{(2S+a)+\frac{\rho}{2}} \exp \frac{\pi}{4} [\tau(\lambda, \lambda_{\Delta_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Delta_0}, \lambda_{\Delta_2}, \mu)] \\ & \times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(S_0) \wedge \eta}} \Big|_S \\ & \therefore \sigma_{\Delta_2}(\mu_{\Delta_2}) |\varphi_2|^{-(2S+a)} \left[ \frac{|\varphi_0, \varphi_2|}{2e(S)} \right]^{-(2S+a)+\frac{\rho}{2}} \exp \frac{\pi}{4} \tau[\lambda, \lambda_{\Delta_2}, \mu] \\ & \times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(S_2) \wedge \eta}} \Big|_S \end{aligned}$$

ここで、ここに [ ] 内の分母の  $2e(S)$  は、

$$S_i = \langle A_i x, y \rangle / \delta x_i(A) \quad \begin{array}{l} \delta x_i(A_j) = 0 \quad i \neq j \\ \neq 0 \quad i = j \end{array}$$

で定義された、 $W$  上の函数である。また  $V \times V^*$  の座標  $(x, y)$  であらわして置く。

$\therefore \varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$  は  $S$  上の non-zero analytic fcn. 係数  $\varepsilon$  の  $\varepsilon^n$  である。 $\varphi_2^{loc} = \varepsilon \varphi_2$   $\varepsilon \in \mathcal{O}_S$  とするとき、 $\varphi_2' = \varepsilon \varphi_2 + \varphi_2''$  として  $\varphi_2'' \equiv 0$  であるから  $\varphi_2' = \varepsilon \varphi_2 (1 + \varphi_2'')$ 。 $\varphi_2''$  は  $S$  上 0 ととるこができる。 $\varphi_2$  のかわ

りに、 $\varphi_2'$  とおけば、此の右側は  $\int_{-\ell(s)+a}^{\ell(s)+a+\frac{\rho}{2}} \left(\int -\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$  倍されて、変化する。  $\varphi_2$  のとり方によらぬことも同様の考察で、わかる。

標準型の場合に、この比の値を計算してみよう。  $\nu - \frac{1}{2}$  の principal symbols において、  $\lambda = -2(\ell(s)+a) - \ell$  を代入すればよい。 Maslov index はすべてきえる。そして

$$\varphi_0 = \xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2 = y_1^2 + \dots + y_\ell^2.$$

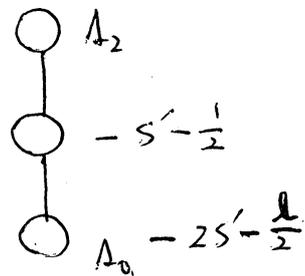
$$\varphi_2 = x_1^2 + \dots + x_\ell^2 = \quad \ell(s) = \langle x, \xi \rangle / 2$$

とおけばよい。 いずれも、標準型の場合 holonomic system 及び、holonomy diagram は

$$\langle A_x, D_x \rangle - S' \delta \chi(A) \int S' = 0$$

$$A \in \text{Eyo}(\ell)$$

$$S' = \ell(s) + a$$



となることによ、わかる。したが、求める比は

$$\frac{\Gamma(-\ell(s)+a+\frac{\rho}{2})}{\Gamma(-\ell(s)-a)} \quad \cdot \quad |$$

となる。

さて再び、もとにもと、 $\Sigma$  の solution の  $\Lambda_2$  における base とし、 $\sigma_{\Lambda_2}(u_{\Lambda_2}) = f_{\Lambda_2}^s \sqrt{\omega_{\Lambda_2}} / \sqrt{\alpha x}$   
 $\Lambda_0$  における base とし、 $\sigma_{\Lambda_0}(u_{\Lambda_0}) = f_{\Lambda_0}^s \sqrt{\omega_{\Lambda_0}} / \sqrt{\alpha x}$   
 とするものとする。

$C_2$ ;  $C_0$  をどう取れば、 $C_2 u_{\Lambda_2}$  と、 $C_0 u_{\Lambda_0}$  とが、ひとつの solution とするかに知りたい。

$$\varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}}$$

$$f_{\Lambda_0}^x = f^x / a_{\Lambda_0}^x(s)$$

$$\varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}}$$

$$f_{\Lambda_2}^x = f^x / a_{\Lambda_2}^x(s)$$

と、とるにこれができる。  $a_{\Lambda_0}^x(s) = e(s)^2 e(x) a_{\Lambda_2}^x(s)$  に注意

して、

$$\{\varphi_0, \varphi_2\} = \left\{ e(s)^2 \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}}, \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s)^2, \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= 2 e(s) \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

ここに、 $e(s) = \sum_{i=1}^k a_i S_i$  とおき、 $\Sigma$  の  $\Sigma$  とおくと、

$$\left\{ e(s), \left( f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), (f^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \\
&= \left( \frac{1}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \sum_{i=1}^k a_i \{s_i, f^x\} \frac{1}{e(x)} (f^x)^{\frac{1}{e(x)}-1} \\
&= \sum_{i=1}^k a_i \left\{ \frac{\langle A_i, y \rangle}{\delta x_i(A)}, f^x \right\} \frac{1}{e(x)} (f^x)^{-1} \left( \frac{f^x}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \\
&= \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) (f^x)^{-1} \left( \frac{f^x}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}}
\end{aligned}$$

(E) が、  $\{\varphi_0, \varphi_2\}|_S = 2 e(s)$ .

以上の計算は、 $\sigma \wedge \tau$  上には制限して行なったものである。

次に

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda_0}^S \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_0}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}} \right|^{e(s)+a} + \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_0) \wedge \eta}} \Big|_S \\
& \cdot \int_{\Lambda_2}^S \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_2}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right|^{-(e(s)+a)} \sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_2) \wedge \eta}} \Big|_S
\end{aligned}$$

が、1:1 になることを示そう。

今  $\varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}}$      $\varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}}$  とおくと。

すると  $\int_{\Lambda_0}^S = \int_{\Lambda_2}^S = ((\varphi_0)^{-e(x)})^S = \varphi_0^{-e(s)}$

$$f_{12} = f_{\Delta_2}^{\chi_S} = ((f_2)^{\text{ext}})^S = \varphi_2^{-e(S)}$$

したが、 $\tau$  上の比は、

$$\sqrt{\omega_{\Delta_0}} |\varphi_0|^{a+\frac{p}{2}} (\sqrt{\varphi_*(\xi_0) \wedge \eta})^{-1} \Big|_S$$

$$: \sqrt{\omega_{\Delta_2}} |\varphi_2|^{-a} (\sqrt{\varphi_*(\xi_2) \wedge \eta})^{-1} \Big|_S.$$

これは、正則函数(の絶対値)の比であるから、2乗して、 $\varphi^{-1}$  でひきかえし、また  $\varphi_0, \varphi_2$  は  $S$  上の2次以上で、よえる項は cut し、比には影響しない。

したが、 $\tau$  以下  $T_S \Delta_2 \times_S T_S \Delta_0 / T_S = (T_S)^+$  上に、正準座標  $(x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell, s)$  (したが、 $s$  は  $S$  上の座標である。) を入れて考える。

$\varphi_2 = ((f_{\Delta_2}^{\chi_S})^{\frac{1}{2\omega}})^{\text{loc}}$  としとると、これはつまり、正準座標をとりにおき、 $\tau$  の  $S$  上の non zero analytic fun. をかければ、 $\varphi_2 = x_1^2 + \dots + x_\ell^2$  ととることが出来る。なぜなら  $\varphi_2$  は  $\text{Cyc}(\mathbb{C})$  相対不変であるから。

また  $\widehat{W} = \overline{\{ \alpha, \text{grad log } \varphi_2^{S'} \}; S' \in \mathbb{C} \times T_S \Delta_2 \}$  と定義し、 $\widehat{\pi} \in \widehat{W} \rightarrow T_S \Delta_2$  の projection map と

あるとき、 $\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \pi / (c(s)^2) |_{T_S \Lambda_0}$  とおくことが出来ることは  $\varphi_{\Lambda_0}$ ,  $\varphi_{\Lambda_2}$  の定義より明らかである。そしてこれは、 $\varphi_{\Lambda_0}(x)$  の  $T_S \Lambda_0$  の反傾表現の、 $\varphi$  との表現と同じ。character を  $\varphi$  の相対不変式であるから、 $\varphi_0$  は  $\varphi_0' = \xi_1 + \dots + \xi_k^2$  の constant 倍である。その constant term は  $[k-1]$  と同じやり方で、

$$\varphi_2(x) \varphi_0'(\text{grad log } \varphi_2(x)) = 4$$

として計算することが出来る。

$$\xi = \xi': \varphi_2 = x_1^2 + \dots + x_k^2.$$

$$\varphi_2 = 4\varphi_0' = 4(x_1^2 + \dots + x_k^2)$$

を代入して、比を書きかえよう。

$$\omega_{\Lambda_0} \cdot 4^{2(a+\frac{p}{4})} |\varphi_0'|^{2(a+\frac{p}{2})} (d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_k \wedge \eta)^{-1} |_S$$

$$: \omega_{\Lambda_2} |\varphi_2|^{-2a} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \wedge \eta)^{-1} |_S.$$

$$\text{一方 } \omega_{\Lambda_2} |\varphi_2|^{-2a} = \text{const} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \wedge \eta.$$

$$\omega_{\Lambda_0} |\varphi_0'|^{2(a+\frac{p}{2})} = \text{const} \cdot d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_k \wedge \eta.$$

と書くことができて、両 constant term は  $\omega_{\Lambda_0} = \frac{\widehat{\pi}_*(\omega_{\Lambda_2}) \pi^* ds}{C(s)}$  により関連している。

さて上の比を  $\delta'$  と書くから  $\delta'$  である。

$$\widetilde{W} = \overline{\{ (s' \operatorname{grad} \log \varphi_0'(\xi), \xi), \xi \in T_s \Lambda_0 \}}$$

と書けることに注意する。

$\widehat{C}$  はある constant とし。

$$\omega_{\Lambda_2} = \widehat{C} |\varphi_2|^{2a} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l \wedge \eta$$

$$\omega_{\Lambda_1} = \frac{\pi_* (\omega_{\Lambda_2}) ds'}{C(s')} / ds'$$

ここで、 $C(s')$  とは、 $\Lambda_0$  と  $\Lambda_2$  の間の  $C$  函数の factor として、

$C(s') = s'^{(4a+l)}$  である。

$$|\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} \omega_{\Lambda_0}$$

$$= |\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} \frac{\pi_* (\omega_{\Lambda_2}) \wedge ds'}{C(s')} / ds'$$

$$= \widehat{C} \varphi_0'^{2a} \varphi_2^{2a} (s' \operatorname{grad} \log \varphi_0') \varphi_0'^l \operatorname{Hess} (s' \log \varphi_0'(\xi))$$

$$d\xi \wedge \eta \wedge ds' / C(s') ds$$

$$= \widehat{C} \varphi_0'^{2a} \varphi_2^{2a} (\operatorname{grad} \log \varphi_0') \varphi_0'^l \operatorname{Hess} \log \varphi_0' d\xi \wedge \eta$$

$$= \widehat{C} 4^{2a} 2^l d\xi \wedge \eta.$$

したがって、この比は  $\widehat{C} = \widetilde{C} = 1 : 1$

ただし以上の計算において、 $\varphi_0'^{s'}$  の  $H^1$  は holomorphic

monic system が  $(\langle A_3, D_3 \rangle - S' \delta X(A)) \varphi_0' S' = 0 \quad A \in \text{cyl}(\ell)$   
 であることから  $S' = \frac{\langle S, X \rangle}{2}$  として復す。  $S_1$  の  
 nbd では  $W$  と  $\tilde{W}$  は同じものである。

以上により  $C_0 : C_2$  は求まる。

すなわち

$$C_0 : C_2 = \frac{\Gamma(\rho(S) + a + \frac{\rho}{2})}{\Gamma(-\rho(S) - a)} \exp \frac{\pi}{4} [-\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, M) - \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, M) + \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, M)]: 1$$

ここで  $\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, M) + \tau(\lambda_{\Lambda_2}, \lambda_{\Lambda_0}, M) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda, M))$   
 は [K-M] p83 にあるのと全く同じ方法によつて

$$\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda_2 \cap \Lambda_0))$$

と表す。  $\tau \tau' L$ .

$$\tau(\Lambda_2) = \sqrt{1} \operatorname{sgn} (Ax_2, -Ay_2)_{A \in \text{cyl}}$$

$$\tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_2) = \sqrt{1} \operatorname{sgn} (Ax_0, -Ay_2)_{A \in \text{cyl}}$$

$(x_2, y_2) \dots \Lambda_2$  の generic pt

$(x_0, y_2) \dots \tilde{\Sigma} \cup \gamma$  の generic pt.

結局我々は、次のような公式を得る。

公式

$$\Lambda_2^c \quad \circ$$

$$\Lambda_1^c \quad -\rho(s) - a - \frac{1}{2}$$

$$\Lambda_0^c \quad -2(\rho(s) + a) - \frac{1}{2}$$

complex holonomy diagram

$$\Lambda_2$$

$$\circ$$

$$\Lambda_0$$

real holonomy diagram

右のような 2 次型式の holonomy diagram  $\mathbb{Z}^2$  とし  
 その同伴数之比  $C_0 : C_2$  は

$$C_0 : C_2 = \left( -\frac{\sin \pi(\rho(s) + a)}{(\rho(s) + a)} \right) \Gamma(\rho(s) + a + 1) \Gamma(\rho(s) + a + \frac{\rho}{2})$$

$$\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda_2 \cap \Lambda_0)) : 1$$

## §3 局所化の補題

§2の(仮定1)を判定しやすい条件で置き換えよう。  
 以下、概均質ベクトル空間の場合に話を限る事として、  
 $(G, V)$  を固定する。簡単のため相対不変式は1個の  
 場合とする。それを  $f(x)$   $x \in V$  とする。

$f(x)$  に対する holonomy diagram の一部分が  
 より簡単な多項式の複素中に対する holonomy diagram  
 になっている事がある。§2では、それが2次形式になる  
 場合を扱ったわけだが、ここでは一般の形で扱う。

$x_0 \in V$   $x_0$  の  $G$ -orbit の  $\alpha$ -normal bundle を  
 $\Lambda_0$  としよう。  $x_0$  において  $Gx_0$  に transversal な  
 切り口を考え、  $f(x)$  をその切り口に制限したものを  $f(x)$   
 の  $\Lambda_0$  における localization といひ(あるいは  $x_0$  におけ  
 る localization)  $f_{x_0}^{\text{loc}}$  と書く。

$$\text{(例)} \quad G = GL(2) \times SO(3, 1)$$

$$V = \{ \text{2行4列の 行列} \}$$

$$\text{作用} \quad G \ni (g_1, g_2)$$

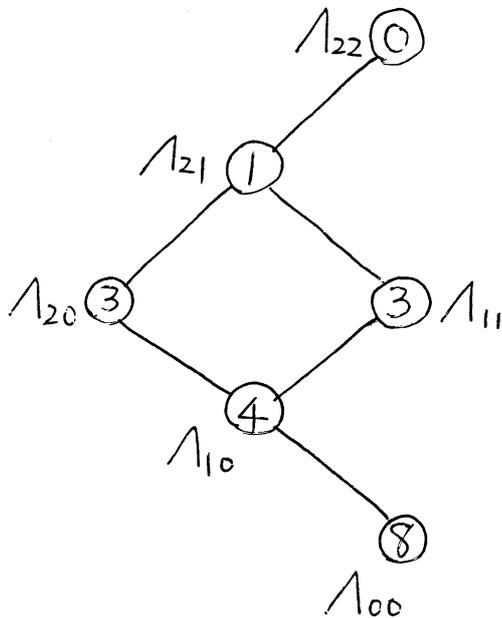
$$V \ni x$$

$$\longmapsto g_1 x g_2^{-1}$$

$$\text{相対不変式} \quad f(x) = \det x J^t x \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$V \text{ の内積} \quad \langle x, y \rangle = \text{tr } x J^t y$$

holonomy diagram は次のようになる。



$\Lambda_{\mu\nu}$  は  $G$  orbit  $\{x \in V / \text{rank } x = \mu$   
 $\text{rank } x J^t x = \nu\}$  の conormal である。  $\Lambda_{10}$   
 における localization は次のように計算される。

代表点として  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  を取る。

$$\mathfrak{gl}(2) \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{so}(3,1) \ni B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix}$$

よって tangent vector は  $Ax_0 + x_0B$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2 + b_3 & -b_4 + b_5 & a_4 + b_6 & a_4 + b_6 \end{pmatrix}$$

よって conormal vector は  $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & y_4 & y_4 \end{pmatrix}$

よって切り口として

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$$

が取れて,  $f_{x_0}^{\text{loc}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_3 \\ x_3 & -2x_4 - x_4^2 \end{pmatrix}$

となる。あるいは,  $-2x_4 - x_4^2$  を新しく  $x_4$  とおけば

$$f_{x_0}^{\text{loc}} = x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3^2$$

さらに  $\sqrt{x_4 - 1} x_3$  を新しく  $x_3$  とおけば, 簡単になって

$$f_{x_0}^{\text{loc}} = x_3^2 + x_4(x_1^2 + x_2^2)$$

となる。

$\Lambda$  を diagram の中のいっつの holonomic set  $\textcircled{*}$  とする時,  $\Lambda$  を親とする sub-diagram とは  $\Lambda$  から codim 1 の交わりを伝えていける holonomic set の全体からなる diagram のことをいう。但し, ここで, codim が真に小さい向きにだけ伝えていく事が許されるとする。上の例でいえば  $\Lambda_{10}$  を親とする sub-diagram は  $\Lambda_{20}, \Lambda_{11}, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}$  からなる。

$\textcircled{*}$  Lagrangean の改名

次の事が成り立つ。

命題1.  $\Lambda$  における  $f(x)$  の localization に対する holonomic diagram は  $\Lambda$  を親とする sub diagram と一致する。

$\therefore \Lambda = T_{Gx_0}^* V \quad \dim Gx_0 = r$  とする。

この時  $\exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{O}_f$  があって vector field  $X_i = \langle A_i x, \text{grad}_x \rangle \quad (i=1, \dots, r)$  は

$x_0$  で独立であり,  $f(x)$  を不変にする。  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  という座標を取る。この時  $f(x) = c(x) f(0, x_2, \dots, x_n)$

また  $X_2 = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  となった時  $\neq 0$

$\tilde{X}_2 = \sum_{i=2}^n a_i(0, x') \frac{\partial}{\partial x_i}$  は  $\tilde{f}(x') = f(0, x_2, \dots, x_n)$  を不変にする。よって  $r$  についての induction で証明される。

一般には,  $f^{\text{loc}}$  は, 適当な概均質ベクトル空間の相対不変式になるとは限らない。例えば, 上の例の多項式は, 本質的に非脊次である。しかし, 特別な場合には,  $f^{\text{loc}}$  がより簡単な概均質ベクトル空間の相対不変式 (の non zero 係数倍) になる事があり, その時には いろいろの計算が簡略化される。その事を, もう少し一般の形で次に述べる。<sup>(\*)</sup>

(\*) P26の注意3)を見て下さい。

holonomy diagram中の二つのholonomic set  $\Lambda_0, \Lambda_2$  の交わりを  $S$  とする。  $S$  の generic point  $p \in T^*V$  で考える。  $p$  を通る diagram の  $\Lambda_0, \Lambda_2$  以外の holonomic set の全体を  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  とする。

(条件1)  $\Lambda_0, \Lambda_2$  は  $p$  で non singular であり,  $T_p S = T_p \Lambda_0 \cap T_p \Lambda_2$

以下  $p = (x_0, \xi_0)$  は  $\xi_0 \neq 0$  とする。

$J_1^{(1)} = \{f(x, \xi) \in \mathcal{O}_{T^*X}(1) / f|_{\Lambda} = 0\}$   
 とする。  $\mathcal{O}_{T^*X}(1)$  は  $\xi$  について斉次1次の関数を表わす。  
 $f$  の Hamilton field を  $H_f$  と書く。

$$H_f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

$H_{J_1^{(1)}} = \{H_f / f \in J_1^{(1)}\}$  は Lie algebra になる。

(条件2)  $H_{J_1^{(1)}}$  は  $S$  に推移的に働く。

すなわち,  $S$  は  $H_{J_1^{(1)}}$  不変であり  $\dim S = r$

とすると,  $\dim \{ df(p) / f \in J_1^{(1)} \} = r$

$T_p(T^*V)$  は symplectic vector space としての自然な内積を持つ。  $T_p S \subset T_p(T^*V)$  の直交補空間を  $(T_p S)^\perp$  とする。条件より,

$(T_p S)^\perp = (T_p \Lambda_0) + (T_p \Lambda_2)$  であり,  $(T_p S)^\perp / T_p S$  という symplectic vector space において  $T_p \Lambda_0 / T_p S, T_p \Lambda_2 / T_p S$  は互いに dual な holonomic subspace となる。

一般に manifold  $X$  上の vector field  $v$  が点  $p \in X$  で消えていけば (すなわち  $v = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  で,  $a_i(p) = 0 \quad i=1, \dots, n$ )  $v$  は  $T_p X$  に次のように作用する。

$$\begin{array}{ccc} T_p X & \longrightarrow & T_p X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \sum \frac{\partial a_i(p)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \parallel & & \parallel \\ w & & [w, v](p) \end{array}$$

今の場合  $J_{1,p}^{(1)} = \{ f \in J_1^{(1)} / df(p) = 0 \}$   
とすると  $f \in J_{1,p}^{(1)}$  の時

$H_f$  は  $T_p(T^*X)$  に働く。さらに  $H_f$  は  $T_p\Lambda_0$ ,  $T_p\Lambda_2$ ,  $T_pS$  を不変にする。そこで

$$H: J_{\Lambda, p}^{(1)} \longrightarrow \text{End}((T_pS)^\perp / T_pS)$$

の image を  $\mathcal{G}$  とする。

$(T_pS)^\perp / T_pS = T_p\Lambda_0 / T_pS + T_p\Lambda_2 / T_pS$   
に対応する正準座標で  $\mathcal{G}$  を表現すると

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$$

となる。よって  $\mathcal{G} \subset \text{End}(T_p\Lambda_0 / T_pS)$  と考えてよい。

(条件3)  $\text{End}(T_p\Lambda_0 / T_pS)$  と考えて  $\mathcal{G} \ni I$

$f \in J_{\Lambda}^{(1)}$  を  $df(p) = \omega(p)$  なるものとする。  
 $\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$  である。

$$H_f + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

を考えると、これは  $p$  で"消えるので"  $T_p(T^*V)$  に作用するが、 $T_p\Lambda_0$ ,  $T_p\Lambda_2$ ,  $T_pS$  を不変にするので  $(T_pS)^\perp / T_pS$  に働く。

(条件4)  $\exists f \in J_{\Lambda}^{(1)}$   $df(p) = \omega(p)$  で

$$H_f + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A+I \end{pmatrix} \text{ in } \text{End}((T_p S)^\perp / T_p S) \\ \text{for some } A \in \mathfrak{g}$$

以上の条件のもとで, 適当な斉次正準変換によって

$$X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\tau-1} \times Y$$

$$T^*X = \begin{matrix} \psi \\ (t, w, x) \end{matrix} \{ (t, w, x; \tau, \zeta, \xi) \}$$

$$P = (0, 0, 0; 1, 0, 0)$$

$$\Lambda_0 = \{ t = w = x = 0 \}$$

$$\Lambda_2 = \{ t = w = \xi = 0 \}$$

$$\Lambda \subset \{ t = w = 0 \mid \langle Ax, \xi \rangle = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{g} \}$$

となる。(以上において  $\mathbb{C}$  をすべて  $\mathbb{R}$  で置き換えてもよい)

概均質ベクトル空間の場合に, Lie algebra の言葉で  
以上の条件を述べてみよう。\*

$\pi(\Lambda_0)$  の generic point を  $x_0$  とする。

$\Lambda_0 = T_{Gx_0}^* V$  である。  $x_0$  における  $Gx_0$  の  
tangent space は  $\mathfrak{g}x_0$  であるから  $(T_{Gx_0}^* V)_{x_0} =$   
 $(\mathfrak{g}x_0)^\perp$  である。これを  $V_{x_0}^*$  と書く。

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \{ A \in \mathfrak{g} \mid Ax_0 = 0 \} \text{ とすると,}$$

\* 数研講究録 225 の木村論文を参照して下さい。

$\mathcal{G}_{x_0}$  は  $V_{x_0}^*$  に作用している。 $(\mathcal{G}_{x_0}, V_{x_0}^*)$  が概均質としよう。この時  $V_{x_0}^*$  の generic point を  $y_0$ ,  $\Lambda_2 \cap V_{x_0}^*$  の generic point を  $y_2$  とする。

$\Lambda_0 = T_{\mathcal{G}y_0}^* V^*$  である。 $\Lambda_2 = T_{\mathcal{G}y_2}^* V^*$  と仮定する。 $(T_{\mathcal{G}y_0}^* V^*)_{y_2} = (\mathcal{G}y_2)^\perp$  の generic point を  $x_2$  とする。 $p = (x_0, y_2)$  である。

$$T_{(x_0, y_2)} S = \mathcal{G}(x_0, y_2)$$

$$T_{(x_0, y_2)} \Lambda_0 = \lim_{y_0 \rightarrow y_2} \mathcal{G}(x_0, y_0)$$

$$T_{(x_0, y_2)} \Lambda_2 = \lim_{x_2 \rightarrow x_0} \mathcal{G}(x_2, y_2)$$

であるから(条件1)は確かめられる。(条件2)は、この場合は満たされている。

$\Pi$ における  $(\mathcal{G}, (T_p S)^\perp / T_p S)$  を求めてみよう。

$$\mathcal{G}_{x_0, y_2} = \{ A \in \mathcal{G} / Ax_0 = 0, Ay_2 = 0 \}$$

が  $J_{1,p}^{(1)}$  に相当する。 $\otimes$   $T_p \Lambda_0 / T_p S$  を考えよう。

$x_0$  の orbit の方向に動いても、物事はすべて推移的だから、 $x_0$  を止めて考えてよい。よって

$\otimes J_1^{(1)}$  は  $\{ \langle Ax, y \rangle, A \in \mathcal{G} \}$  から生成される。

$$(\overline{\mathcal{O}}_{x_0 y_2}, T_p \Lambda_0 / T_p S) \cong (\overline{\mathcal{O}}_{x_0 y_2}, \mathcal{O}_{x_0 y_0} / \mathcal{O}_{x_0 y_2})$$

である。ここで上の棒線は、右側の空間に作用させた時の image を意味する。これから P17 の  $\mathcal{O}_f$  がわかり、条件 3 も確かめられる。

条件 4 は次のようにする。  $A_1 \in \mathcal{O}_f$  を  $A_1 x_0 = 0$  ,  $-{}^t A_1 y_2 = -y_2$  なるものとし、

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -{}^t A_1 + I \end{pmatrix} \in \text{End}(V \times V^*)$$

を  $(T_p \Lambda_0 / T_p S) + (T_p \Lambda_2 / T_p S)$  に作用させた時  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A + I \end{pmatrix}$   $A \in \mathcal{O}_{x_0 y_2}$

の形をしている事を確かめればよい。

さっきの例で以上の条件を確かめてみよう。

$$\mathcal{O}_f = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{x_0} \ni Ax_0 + x_0 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2 + b_3 & -b_4 + b_5 & a_4 + a_6 & a_7 + a_8 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \sigma_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & -a_4 \\ b_2 & b_4 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sigma_{x_0} y_0 = -{}^t A y_0 + y_0 B = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & b_2 - a_3 & b_2 - a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{x_0} y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \sigma_{x_0 y_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(\overline{\sigma_{x_0 y_2}}, \sigma_{x_0} y_0 / \sigma_{x_0} y_2)$  は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cong \mathfrak{so}(2)$$

となる。よって条件3はよい。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 - b_4 & 0 & \frac{1}{2} \\ b_2 & b_4 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、 $-{}^t A_1$  の  $\sigma_{x_0} y_0 / \sigma_{x_0} y_2$  への作用は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{y_2} x_2 / \sigma_{y_2} x_0$  への  $A_1$  の作用は

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

となるから、条件4もよい。条件1を見てみよう。

$$\sigma_j(x_0, y_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow y_2} \sigma_j(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_1 t & b_1 t & b_2 t - a_3 & b_3 t - a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_0} \sigma_j(x_2, y_2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 t & b_1 t & b_2 t + a_2 & b_3 t + a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

これから明らかに成り立つ。

さて証明にはいろいろ。 $\mathcal{V}$ についてのinductionによる。

$r \geq 2$ の時は,  $f \in J_1^{(1)}$ で  $df(p) \neq \omega(p)$ なるものがある。今  $p = (0, \dots, 0; 0, \dots, 1)$ とする。 $f$ を考えると, これは0次homogeneousで, 新しい正準座標系に移って

$$y_1 = \frac{f}{\sum_{i=1}^n \xi_i}, y_2, \dots, y_n; \eta_1, \dots, \eta_n$$

とできる。この時  $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ は  $H_{y_1} = -\frac{\partial}{\partial \eta_1}$ で不変である。よって  $(y_1, \eta_1)$ と  $(y_2, \dots, y_n; \eta_2, \dots, \eta_n)$ に分解でき, 条件1~4は  $T^*\mathcal{Y} = \{(y_2, \dots, y_n; \eta_2, \dots, \eta_n)\}$ で成り立っている。

$r=1$ の時は,  $f \in J_1^{(1)}$ で  $df(p) \neq 0$ なるものは  $df(p) = \text{const } \omega(p)$ しかない。  $df(p) = \omega(p)$ とする。条件4から,  $g \in J_{1p}^{(1)}$ があって

$$H_{f-g} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} : \mathcal{G}(T_p \mathcal{S})^\perp / T_p \mathcal{S}$$

は $\otimes$ である。正準座標を  $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$

とし  $p = (0, \dots, 0; 0, \dots, 1)$ としよう。

$\mathcal{S} = \{(0, \dots, 0; 0, \dots, \xi_n)\}$ である。

よって  $(T_p \mathcal{S})^\perp / T_p \mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}; \xi_1, \dots, \xi_{n-1})\}$

$$\otimes ({}^0 I)$$

接触多様体として考える事にし、 $n-1$  を改めて  $n$  とし  
座標を  $(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n)$  とする  
 $\omega = dt - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$  である。

$f - g$  を改めて (さらに0次齊次にして)  $f(x, t, p)$   
とする。この時上の条件から

$f(x, t, p) = (1 + \text{高次}) \times (t + 3\text{次以上})$   
となる。よって  $t + 3\text{次以上}$  を改めて  $f$  とする。

条件3から  $\exists g \in J_{1,p}^{(1)}$   $g = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \text{高次}$   
今  $\alpha \in \mathbb{R}$  を generic とすると

大島: Singularities in contact geometry and  
degenerate pseudo-differential equations

J. Fac. Sci. Uni. Tokyo Sec. IA, Vol. 21,

No. 1, pp. 43-83 の Theorem 2.16 により

適当な接触変換により

$$f + \alpha g = t + \alpha \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

とできる。再び、正準座標にもとづいて  $t$  の dual を  $\tau$  と書く。

$(t, x; \tau, \xi)$  を使うわけである。

$$t\tau - \alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_1^{(1)}$$

がいえた。条件3から  $\exists g_1 \in J_{1,p}^{(1)}$

$g_1$  は  $x, \xi, \tau$  の函数で、 $(\xi, \tau)$  につき1次齊次で

$g_1 = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i + x$  につき2次以上  
 となる。  $J_1^{(1)}$  は Poisson bracket で閉じているから  
 $t \tau - \alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$  との Poisson bracket を考え  
 と、  $t$  を1次  $\tau$  を-1次  $x_i$  を  $-\alpha^{-1}$  次  $\xi_i$  を  
 $\alpha^{-1}$  次と考えて  $g_1$  の各同次成分が  $J_1^{(1)}$  にはいる。よ  
 て特にその0次同次成分  $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$  が  $J_1^{(1)}$  にはいる。  
 これから  $t \tau \in J_1^{(1)}$  がいえた。また同時に  
 $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_{1,p}^{(1)}$  でもある。従って  $J_{1,p}^{(1)}$  が  
 Poisson bracket で閉じている事から、  $J_{1,p}^{(1)}$  は  
 $\langle Ax, \xi \rangle$  の形の元から生成されている事もわか  
 った。また、正準座標をうまく取って  $\Lambda_0, \Lambda_2$  が求める形  
 にできる事も明らかである。

いくつか注意をしておく。

1) p 25 の9行目で  $\Lambda C \{ \dots \}$  となつて、等号でないのは  
 $f^S$  type を考えても、  $S$  の値が  $\theta$ -函数の根と関連した  
 特別な値においては、方程式の support のあるものが消え  
 る事が起こり得るのでこうなる。その場合  $J_1^{(1)}$  は大きくな  
 るが、  $g$  はそのままになっている事もあり得るからである。

2) 条件3の代わりに,  $Q \ni$  対角行列  $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-r} \end{pmatrix}$   
 $(a_i > 0)$  となる場合がある。

局所化した多項式が, *weighted homogeneous* の時がそれに当たる。この場合でも, 同様に議論が進められる。但し,  $J_{A,p}^{(4)}$  は今度は  $\langle Ax, \xi \rangle$  の形の元とはならず,  $x, \xi$  に関し 斉重なかつ  $\xi$  について1次のものからなる。そこで  $Q_f$  としてそれらに対応する *vector field* からできる *Lie alg.* を取れば, それが標準形として取れる。しかしそれは  $Q_{x_0 y_2}$  とは異なるから, 何らかの方法でもとの  $Q_f$  から構成しなければならぬが, その方法は知られていない。

3)  $A_2$  が *zero section* の場合は, 座標変換だけでは話がすむ。  $Q_{x_0 y_2} = Q_{x_0}$  の中に  $Q_{x_0 y_0} / Q_{x_0 y_2} = Q_{x_0 y_2}$  に作用させた時,  $I$  が含まれるという事は, *localization* を不変にする *vector field* で

$$X = (x_1 + \text{高次}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n + \text{高次}) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

のものが含まれるという事だから 大島論文 (前に引用したもの) の定理 1.4 (但し条件 A.1.6. はミス・プリント  $\sum_{i=1}^l \alpha_i p_i - \alpha_j \neq 0$  ではなく  $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i - p_j \neq 0$ ) により,

座標変換で  $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$  に直るから, localization は同次多項式に取れ, それは  $(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{O}_{x_0} \eta_0)$  の相対不変式である。

4) 条件1は落とせる。まず,  $H_f$  が  $(T_p S)^\perp$  を不変にする事がわかる。それには,  $S$  が  $H_f$  不変な事,  $f|_S = 0$  な事から, 例えば  $S$  を標準形  $\{x_1 = \dots = x_n = \xi_1 = \dots = \xi_r = 0\}$  に変換して考えればよい。  $(T_p S)^\perp / T_p S$  と  $T_p \Lambda_0 / T_p S$  だけを使って  $T_p \Lambda_2 / T_p S$  を使わずに話を進める事ができて  $t \mathbb{C} - \alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_1^{(1)}$  が言える。よってこれに対応する斉重な部分を見ると,

$$A \in \mathcal{O}_f \subset \text{End}(T_p \Lambda_0 / T_p S)$$

$$\text{ならば} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -tA \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_f \subset \text{End}((T_p S)^\perp / T_p S)$$

である事がわかる。よって

$$\Lambda_0 = \{t = w = x = 0\}$$

$$\Lambda \subset \{t = w = 0, \langle Ax, \xi \rangle = 0 \text{ for } A \in \mathcal{O}_f\}$$

とできる事は正しい。

## §4 例

1)  $\mathbb{H}$ 上の $n$ 次の skew hermitian 行列

$GL(2n, \mathbb{C})$  を考える。実形として次に説明するよう

□

なものを取る。 $\mathbb{H}$ を四元数とする。

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

$$(k = ij)$$

である。

$\mathbb{H} \ni \alpha + \beta j \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$   
と表現する事ができる。さらに

$$L: M(n, \mathbb{H}) \longrightarrow M(2n, \mathbb{C})$$

が明らかなり方で定義され、 $M(n, \mathbb{H})^{\mathbb{C}}$  を考えれば同型になる。 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H})$  とする。

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H}; X = -{}^t\bar{X}) \text{ とする。}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}: V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & M(2n, \mathbb{C}; X = {}^tX) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ X & \longrightarrow & L(Xj) \end{array}$$

が "well defined" で、 $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$  に移れば同型である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & V_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A, X) & \longmapsto & AX + X^t \bar{A} \end{array}$$

という作用で,  $(\mathcal{G}_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$  は pre homogeneous space になる。その複素化は  $GL(2n, \mathbb{C})$  である。  
□

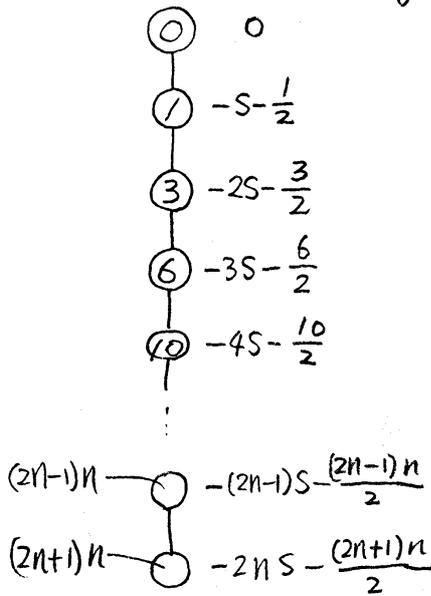
$V_{\mathbb{R}}$  の相対不変式は  $f(X) = \det L(X_j)$

degree  $f = 2n$

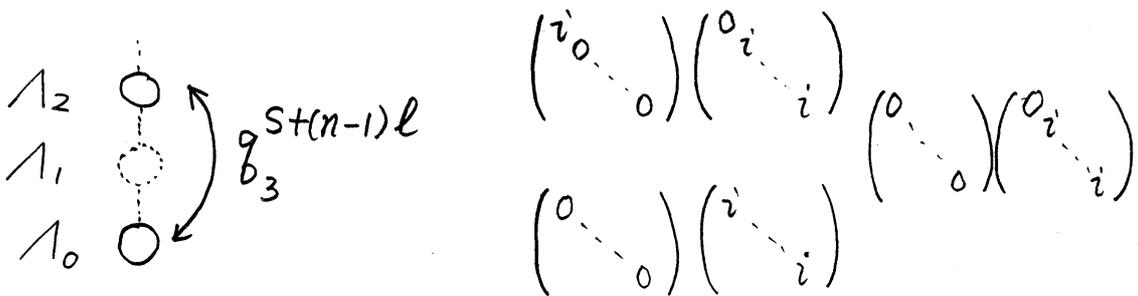
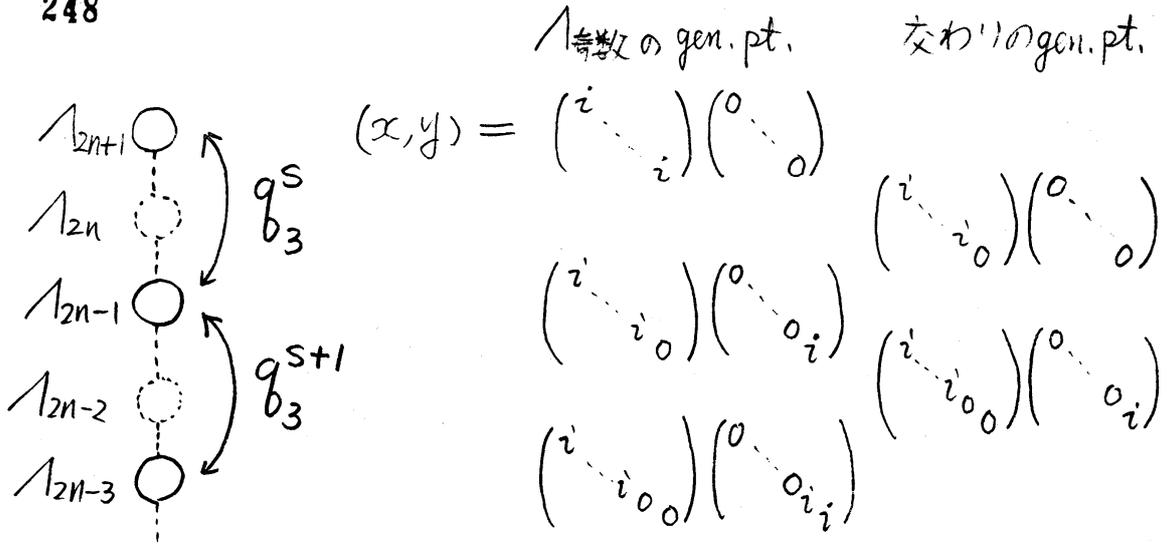
$V_{\mathbb{R}}$  の内積を  $\langle X, Y \rangle = \text{ReTr } X^t Y = -\text{ReTr } XY$  とする。 $(V_{\mathbb{R}})^*$  の相対不変式は,  $f^*(Y) = \det L(Y_j)$  で同じである。

$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{2n^2+n} \quad \text{deg } f = 2n, \dim V_{\mathbb{R}} = 2n^2+n$

complex holonomy diagram は 左図。



real な diagram は, ひとつおきに real locus が現われ, それは連結である。よって 次の頁の図のようになる。そこで  $\rho$  は  $P^3$  で定義した記号で, 三つ組の標準形がどんな二次形式になるかを表わす。右側に書いたのは,  $\Lambda_{\text{奇数}}$  及び  $\Lambda_{\text{奇数}} \cap \Lambda_{\text{奇数}-2}$  の generic point である。



Maslov index は計算すると消えてしまう。

よって  $U(s) = |f(x)|^s$

$$U^*(s) = \int_{V^*} |f^*(Y)|^{-s} e^{-2\pi i \sqrt{A} \operatorname{Re} T_n X Y} dY$$

但し  $dY = \prod_{l=1, \dots, n} dy_{ll}^{(i)} dy_{ll}^{(j)} dy_{ll}^{(k)} \prod_{l > l'} (dy_{ll'}^{(i)} dy_{ll'}^{(j)} dy_{ll'}^{(k)})$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11}^{(i)} i + y_{11}^{(j)} j + y_{11}^{(k)} k & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{21}^{(i)} i + y_{21}^{(j)} j + y_{21}^{(k)} k & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

とすれば、鈴木氏の講演における公式に当てはめて

$$\begin{aligned}
 u(s) &= (2\pi)^{-2ns - \frac{2n^2+1}{2}} 2^{2ns} 2^{\frac{2n^2+1}{2}} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(s + \frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s + \frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdots \frac{\Gamma(s + \frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s + \frac{2n+1}{2}) \\
 &= \pi^{-2ns - \frac{2n^2+1}{2}} \frac{\Gamma(s + \frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s + \frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdots \frac{\Gamma(s + \frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s + \frac{2n+1}{2})
 \end{aligned}$$

すなわち、左らんと書くと次のようになる。

$$|f(x)|^s = \pi^{-2ns - \frac{2n^2+1}{2}} \prod_{j=1}^{2n} \Gamma(s + \frac{j+1}{2}) \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sin \pi(s+i)}{\pi} \right)$$

$$\int |f^*(y)|^{-s} e^{-2\pi i T \operatorname{Re} T_n X y} d y$$

## 2) 演習問題

$$Q_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H}) \times M(n, \mathbb{H})$$

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H})$$

$$Q_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$(A, B, X) \longmapsto AX^t B$$

で pre-homogeneous である。相対不変式は  $\det L(X)$ 。この場合も一直線のグラフとなるからやさしい。

$$3) G_{\mathbb{R}} = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)$$

$SO(p, q)_0$  は  $SO(p, q)$  の連結成分。  $p+q=m$  とし、  $n < m$  と仮定する。(そうでないと相対不変式が既約でない。)

$$G_{\mathbb{R}} = gl(n, \mathbb{R}) \times so(p, q)$$

$$V_{\mathbb{R}} = \{n \times m \text{ 実行列}\}$$

$$G_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$\downarrow$$

$$(A, B, X) \longmapsto AX - XB$$

で pre-homogeneous となる。

$$\text{相対不変式は } f(X) = \det X J^t X$$

$$\text{但し } J = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \dots 1}_{p \text{ 個}} \\ \underbrace{-1 \dots -1}_{q \text{ 個}} \end{pmatrix}$$

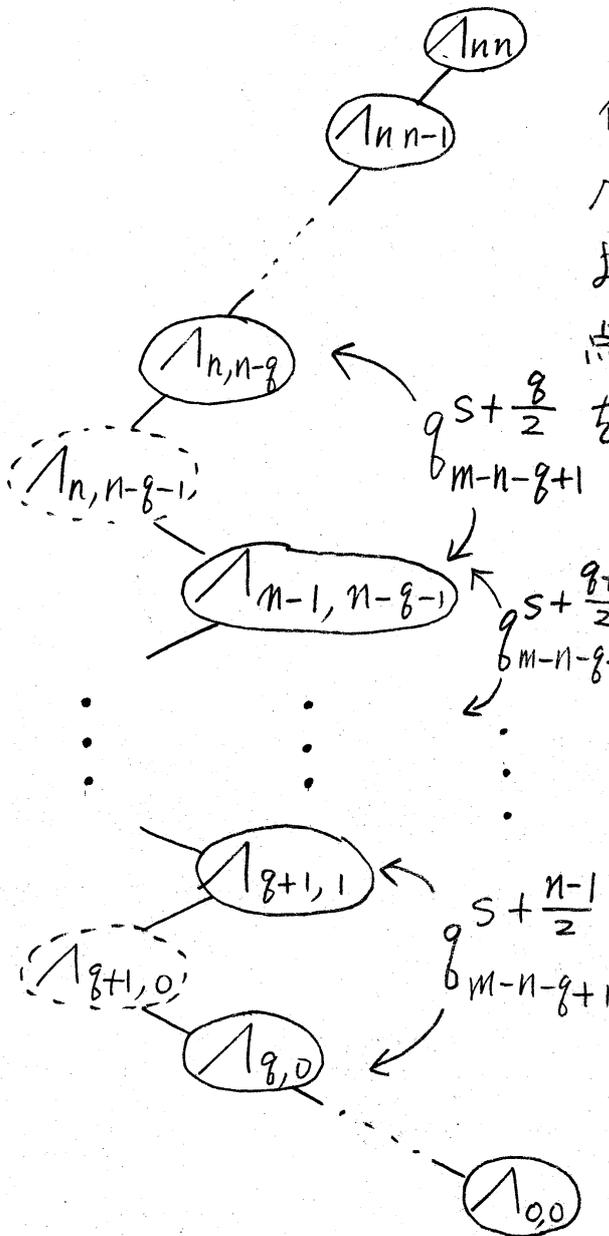
内積を  $\langle X, Y \rangle = \text{tr } X^t Y$  とする。

$$V^* \text{ の相対不変式は } f^*(Y) = \det(Y J^t Y)$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{mn} \quad \text{である。}$$

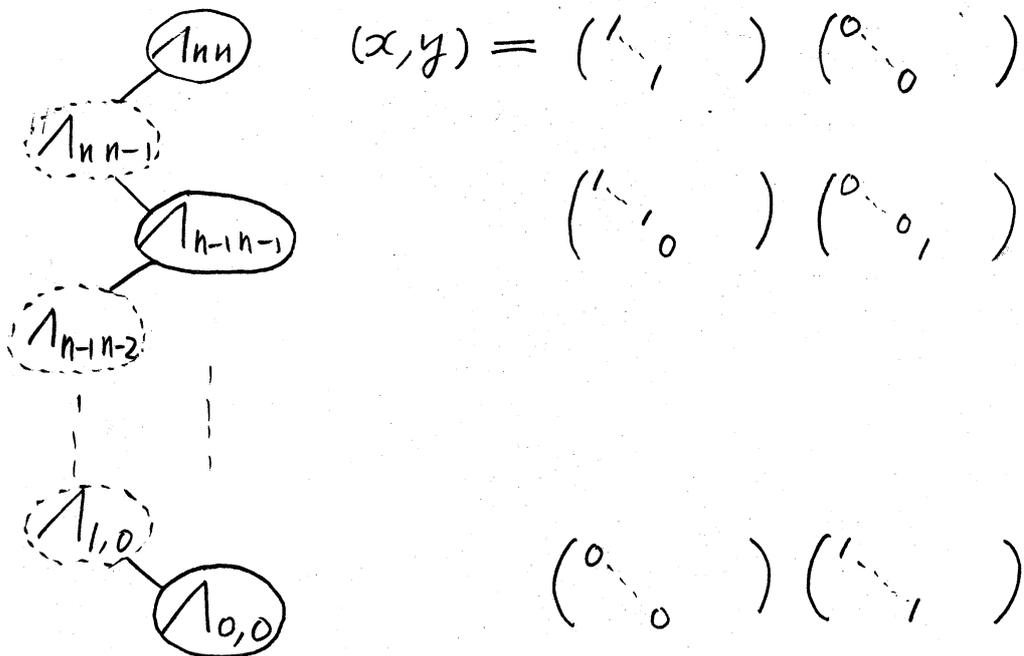
$P, q \geq n$  の時は, real locus が 計算を可能にするだけ充分あり, 鈴木氏によって計算された。ここでは  $q=0, P > n$  の場合と  $q=1, P > n$  の場合を扱う。(  $n \geq 2$  とする。)

一般に  $P > n$  とすると, 次のような部分グラフがある。



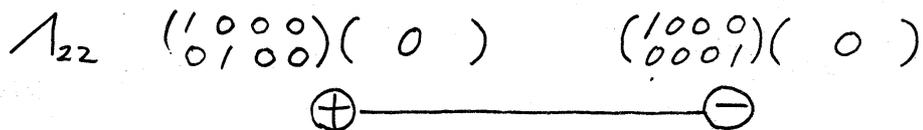
但し  $\lambda_{\nu,\mu}$  は  $\text{rank } X = \nu$   
 $\text{rank } X J^t X = \mu$  である  
 ような  $G$  orbit の conormal  
 点線のものも real locus  
 $qS + \frac{q}{2}$  を持たない。その三つ組は  
 $\mu_{m-n-q+1}$  やはり 2次形式になる。こ  
 れは complex の  $\boxtimes$  で real  
 locus は  $\mu$  と複雑にな  
 っている。

i)  $q=0$  の時 この時は real locus は連結成分がひとつ  
 であって例1) や例2) と同じで 簡単である。  $\Lambda$  の  
 generic point のみ記して, あとは 演習問題とする。  
 答合わせは 佐藤-新谷 概均質ベクトル空間の理論  
 数学の歩み 5-1 P155 例19 を見て下さい。



ii)  $q=1$  の時

これの一番簡単な場合が P11 で紹介した例である。その  
 場合について, real holonomy diagram を書いてみ  
 よう。まず各  $\Lambda_{\nu,\mu}$  の連結成分を示す。



$$\Lambda_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊖

$\Lambda_{11}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ⓐ ————— Ⓑ ————— Ⓒ

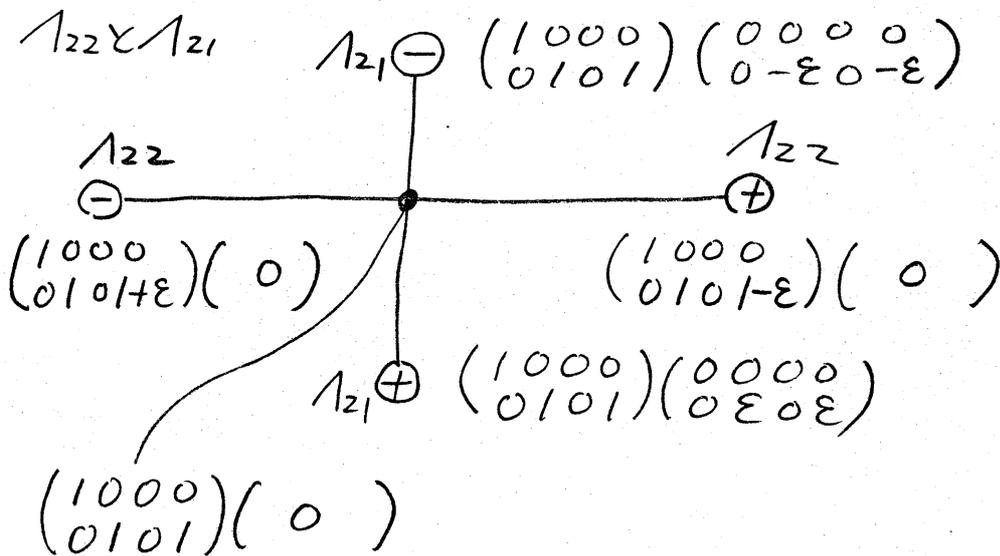
$$\Lambda_{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

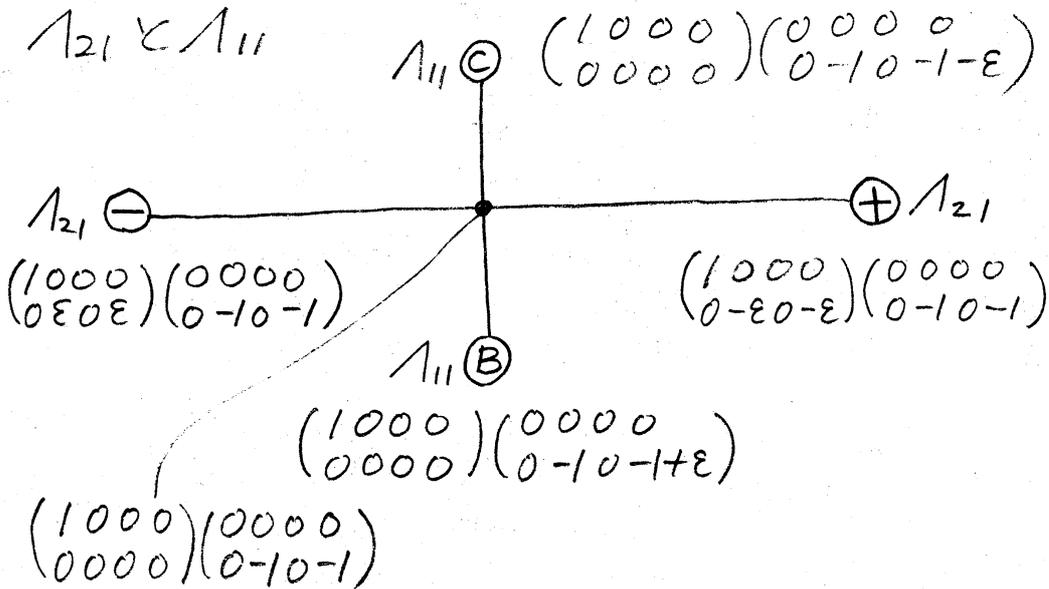
⊕ ————— ⊖

$$\Lambda_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊖

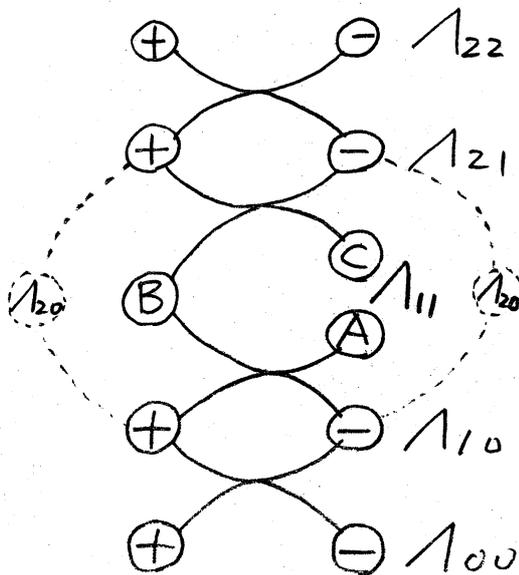
次に二つずつの交わりを書こう。





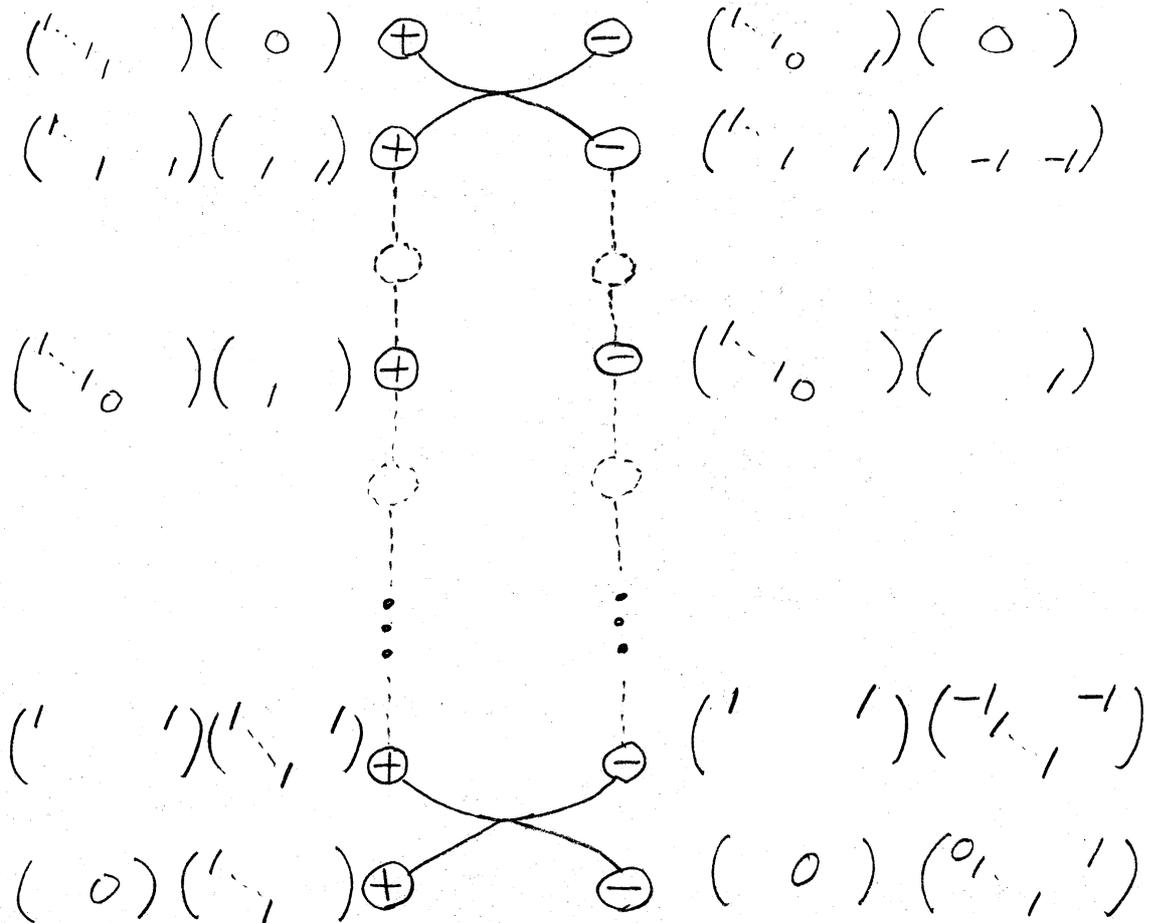
$\Lambda_{11}$  と  $\Lambda_{10}$ ,  $\Lambda_{10}$  と  $\Lambda_{00}$  は上記と同じ (又とりが逆になるだけ) なので省く。

全体の図は次のようになる。



よ、この道筋で Fourier 変換を計算することはできない。  
 しかし図の点線で示したものは、2次形式の三つ組となる

ので、 $\Lambda_{21}$  から  $\Lambda_{10}$  へ by-pass することによって  
 計算が実行できる。2行4列に限らず、一般の場合にも  
 次の道筋で計算される。



結果は次の通り

$$u_{\pm}(s) = \begin{cases} |f(x)|^s & x \in \Lambda_{nn\pm} \\ 0 & x \in \Lambda_{nn\mp} \end{cases}$$

$$u_{\pm}^*(s) = \int_{\Lambda_{00\pm}} |f^*(y)|^{-s} e^{\sqrt{-1} \operatorname{Tr} X^t y} dY$$

$$\begin{bmatrix} u_+(s) \\ u_-(s) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (4^n)^S \sqrt{2^{nm}} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{m-n}{2} + s + j)}{\Gamma(-s - \frac{1}{2}j)}$$

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{t})^{l-n} (a^{-t} - a^t)$$

$$\times \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^n a^2) & (\sqrt{t})^m (1 + (-1)^{m+n}) \\ -(1 + (-1)^n) & -(\sqrt{t})^m (a^2 + (-1)^{m+n} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} u_+^*(s + \frac{m}{2}) \\ u_-^*(s + \frac{m}{2}) \end{bmatrix}$$

ここで  $a = \exp \frac{\pi \sqrt{t}}{2} s$  である。

Maslov index の修正を書いたおこし。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{k, k-1} & \begin{array}{c} \oplus \\ \vdots \\ \ominus \end{array} & \begin{array}{c} \ominus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} \\ \Lambda_{k-1, k-2} & \begin{array}{c} \oplus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} & \begin{array}{c} \ominus \\ \vdots \\ \ominus \end{array} \end{array}$$

左側の修正の term

$$= \tau(\Lambda_{k, k-1}^+) - \tau(\Lambda_{k, k-1}^+ \wedge \Lambda_{k-1, k-2}^+)$$

$$= \exp \frac{\pi \sqrt{t}}{4}$$

右側は  $\exp -\frac{\pi \sqrt{t}}{4}$

最初の余次元1のまじわりでは修正の term はでない。

最後の余次元1のまじわりでは

$$\begin{bmatrix} \exp \frac{\pi \sqrt{t}}{4} (m-n-1) \\ \exp -\frac{\pi \sqrt{t}}{4} (m-n-1) \end{bmatrix}$$

## $C_0, C_1$ の計算に関する Remark.

$(G, V, f)$  を Riemannian vector space とする。

$V^*$  を  $V$  の dual space として内積を  $\langle x, y \rangle$  とする。

するとこの内積に関して反傾表現がきまる。その表現に対する相対不変式を  $f^*$  とする。すなわち

$$f(gx) = \chi(g) f(x)$$

$$f^*(tg^{-1}y) = \chi^{-1}(g) f^*(y)$$

このとき  $f^*$  は constant 倍をのぞいて unique にきまる。

同じように  $G$  の Lie algebra  $\mathfrak{g}$  の  $V^*$  への作用に対し

$\chi_V \in \text{Character}$  に  $\chi > 0$  として  $V^*$  上の volume element を一意にきまる。

$C_0, C_1$  の値は  $f, f^*$  の constant 倍,  $V, V^*$  上の相対不変 volume の constant 倍によつてきまるのである。内積のとり方にはよらない。

内積が  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  という通常の内積の場合は

$$C_0 = f^*(y) f(\text{grad}_g f^*(y))$$

$$C_1 = f^*(y) \frac{2^n}{V} \text{Hess } \log f^*(y)$$

として求めることができる。

$A$  は非退化行列.  $(x, Y) = \langle x, AY \rangle$  として内積を定義する. 通常の内積とするためには,  $y = AY$  と変数変換して, やらぬならぬ.  $\langle x, y \rangle$  の内積に關する相対不変式を  $f^*(y)$  とする. 相対不変な volume element ( $\text{tr}_{V^*}$  に對する) は  $dy$  である.

$(x, Y)$  の内積をと, たとき, 相対不変式は,

$$\tilde{f}^*(Y) = f^*(AY)$$

相対不変 volume element は,  $dY$  である.

$\tilde{f}^*$  について,  $C_0, C_1$  を表わすことが出来る.

$$i) C_0 = \tilde{f}^*(Y) f(\text{grad}_Y A^{-1} \log \tilde{f}^*(Y))$$

$$ii) C_1 = \tilde{f}^*(Y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess}_Y \log \tilde{f}^*(Y) (\det A)^{-1}$$

として求めることが出来る.

$\therefore$ ) 求め方を反容すればよい. 通常の内積では,

$$W = \overline{\{ (\text{grad} \log f^*(y), y) ; y \in V^* \text{ set} \}}$$

と書くことが出来る.  $y = AY$  とかえたときには,

$$W = \overline{\{ (\text{grad}_Y \log \tilde{f}^*(AY), Y) \}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{\left\{ (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(A^{-1}y), Y); Y \in V^* \right\}} \\
 &= \overline{\left\{ (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(Y), Y); Y \in V^* \right\}}
 \end{aligned}$$

したがって、 $\Lambda = 0 \times V^*$  として  $f_\Lambda = c_0 \widehat{f}^{*-1}(Y)$  の  $c_0$  を求めるのであるから、

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \int (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(Y)) \widehat{f}^*(Y) / d_{\Lambda}(S) \\
 &= \widehat{f}^*(Y) \int (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(Y)).
 \end{aligned}$$

また  $\omega_\Lambda = c_1 \widehat{f}^{*-2} \frac{n}{r}(Y) dY$  の  $c_1$  を求めるのであるから  $\omega_\Lambda = \frac{\pi_*(dx) \wedge ds}{c_{\Lambda}(S)} / ds|_{\Lambda}$  に注意して、

$$\begin{aligned}
 \pi_*(dx) \wedge ds &= d(\text{grad}_Y A^{-1} \log \widehat{f}^{*S}(Y)) \wedge ds \\
 &= \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^{*S}(Y) \det A^{-1} dY \wedge ds
 \end{aligned}$$

すなわち  $\omega_\Lambda = \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^{*S}(Y) (\det A)^{-1} dY = c_1 \widehat{f}^{*-2} \frac{n}{r}(Y) dY$

$$\text{したがって } c_1 = \widehat{f}^{*} \frac{2n}{r}(Y) \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^{*S}(Y) (\det A)^{-1}$$

なお [K-M] の P67~P68 を参照のこと。

ひと Comment をしておく。

$\text{grad}_Y A^{-1}$  とは,  $\text{grad}_Y A^{-1} \exp(x, Y) = t\alpha \exp(x, Y)$  と  
なるように定義される。一般に, 内積  $(x, y)$  が与えら  
れたとき,  $G\text{grad}_y$  と。

$$G\text{grad}_y \exp(x, y) = t\alpha \exp(x, y)$$

となる二階の  $y$  に関する微分作用素のベクトルとあると  
き。

$$\overline{W} = \overline{\{ (SG\text{grad}_y \mathcal{F}^*(y), y) ; y \in V^* \text{ set} \}}$$

と定義あることが出来る。

## 付記

ここに説明された方法によつて, 完全な解決をみた。計算  
、そのあと発見された計算の簡略化などは, このあと刊行  
される "代数解析学の諸問題" の講究録中の, 空政和:

"Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換に  
ついて" に詳述してある。興味のある方は参照してくださ  
い。