

Microlocal study of infinite systems

京大教研 佐藤 幹夫

名大理 柏原 正樹

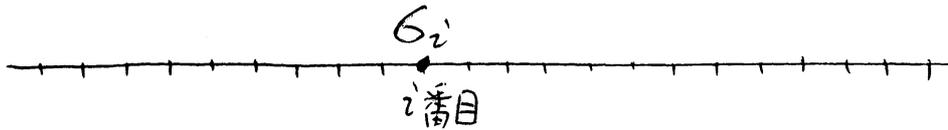
京大教研 三輪 哲二 (文責)

標題に関する, 我々の研究のプログラムについては
佐藤先生のノートを見ていただく事とし, 本稿では 1次元
Ising 模型 及び Fluid 模型について解説し, 前者を
holonomic system によって特徴づける話をする。それ故
いきなり本論にはいる事を許して下さい。

§1 1次元 Ising model

数ある強磁性体の模型のうちで, Ising 模型は最も簡単で
かつ有名である。しかし簡単なのは定義だけであってその解
析は難しく, Ising disease という言葉がある程である。
但し, 1次元 Ising model は, 完全に計算ができる。我々
は, 1次元 Ising model の correlation function と
その Fourier 変換を計算し, さらに我々の都合よい形に
書き直す。

一次元格子 Σ を考える。各格子点に、スピン σ_i が対応しているとする。 σ_i は ± 1 の値を取り、隣り合ったスピンが同じ時の方がエネルギーは低いとする。



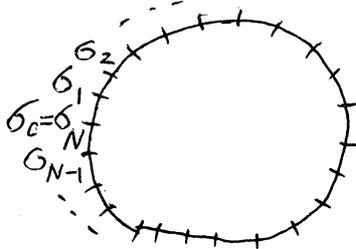
$$\sigma_i \sigma_{i+1} = \begin{cases} 1 & i\text{番目と}(i+1)\text{番目のスピンは平行} \\ -1 & \text{" " 逆向き} \end{cases}$$

$a > 0$ として、対応するエネルギーはそれぞれ

$$\begin{cases} -a \\ a \end{cases}$$

とする。

無限に長い格子を考える代わりに、下図のように



circle を考えて、 $N \rightarrow \infty$ の極限を考えてもよい。この時考えている系のエネルギー E は

$$E = -a \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

で与えられる。

$\beta = \frac{1}{kT}$ としよう。 k はボルツマン定数 T は温度
ボルツマンの原理によれば、温度 T の状態では、系の状態が i 番目のスピンの値が σ_i になる相対確率は

$$e^{-\beta E}$$

で与えられる。スピンの 2^N 通りの与え方のすべてにわたる和を grand partition function という。

$\beta a = J$ と書く事にすれば grand partition function は

$$Z_N(J) = \sum_{\sigma} e^{J \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}}$$

である。

命題 1. $Z_N(J) = (2 \cosh J)^N + (2 \sinh J)^N$

$\therefore e^{J \sigma_i \sigma_{i+1}}$ を $C(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ と書くと

$$Z_N(J) = \sum_{\sigma} \prod_{i=0}^{N-1} C(\sigma_i, \sigma_{i+1})$$

$$= \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1} = \pm 1} C(\sigma_0, \sigma_1) C(\sigma_1, \sigma_2) \dots C(\sigma_{N-1}, \sigma_0)$$

よって 2行2列の行列 $M = \begin{pmatrix} C(1, 1) & C(1, -1) \\ C(-1, 1) & C(-1, -1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^J & e^{-J} \\ e^{-J} & e^J \end{pmatrix} \text{ を考えると}$$

$$Z_N(J) = \text{trace}(M^N)$$

M の固有値は $e^J + e^{-J}$ と $e^J - e^{-J}$ だから求める結果を得る。//

$$f_n(\nu_1, \dots, \nu_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\sigma} \sigma_{\nu_1} \dots \sigma_{\nu_n} e^{J \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}}}{Z_N(J)}$$

を n 次の correlation function という。これは値

$$\sigma_{\nu_1} \dots \sigma_{\nu_n}$$

の平均値(期待値)である。

命題2 $\nu = \tanh J$ とおくと

$$f_n(\nu_1, \dots, \nu_n) = \begin{cases} \nu^{\mu(\nu_1, \dots, \nu_n)} & n: \text{even} \\ 0 & n: \text{odd} \end{cases}$$

但し $\mu(\nu_1, \dots, \nu_n) = (\nu'_1 - \nu'_2) + (\nu'_3 - \nu'_4) + \dots$

ここで ν_1, \dots, ν_n を並べかえて

$$\nu'_1 \geq \nu'_2 \geq \dots \quad \text{とする。}$$

\therefore) $n: \text{odd}$ の時は, $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})$ と

$(-\sigma_0, -\sigma_1, \dots, -\sigma_{N-1})$ が打ち消し合うから。

$n: \text{even}$ の時, $f_2(4, 7)$ について説明する。

一般化してエネルギーの定数 a を a_i と i ごとに変える。

$J_i = \beta a_i$ である。こうすると

$$Z_N(\beta) = \prod_{i=0}^{N-1} (2 \cosh J_i) + \prod_{i=0}^{N-1} (2 \sinh J_i)$$

$N \rightarrow \infty$ の時を考慮すれば

$$Z_N(\beta) = \prod_{i=0}^{N-1} (2 \cosh J_i)$$

と思えばよい。

$$f_2(4, 7) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\sigma} \delta_4 \delta_7 e^{\sum_{i=0}^{N-1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1}}}{Z_N(\beta)}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial^3}{\partial J_4 \partial J_5 \partial J_6} (Z_N(\beta))}{Z_N(\beta)}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=4,5,6} \frac{\partial}{\partial J_i} \log (2 \cosh J_i)$$

よって $J_i = J$ と戻せば $\frac{\partial}{\partial J} \log (2 \cosh J) = v$ 故
求める結果を得る。//

我々は f_n を Fourier 変換して扱う。つまり、 f_n の
無限遠での asymptotic behaviour を調べる事になる。
 \hat{f}_n の方が特異性を持つのでむしろ扱いやすい。

$f_n(v_1 + v', v_2 + v', \dots, v_n + v') = f_n(v_1, v_2, \dots, v_n)$
である事に注意して \hat{f}_n には overall のデルタ関数

$\delta(\theta_1 + \dots + \theta_n)$ が現われる。

命題3.

$$\hat{f}_{2n}(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = \left(\sum' \frac{1}{1-\nu z_1} \frac{1}{1-z_1 z_2} \frac{1}{1-\nu z_1 z_2 z_3} \dots \frac{1}{1-\nu z_1 \dots z_{2n-1}} \right) \times 2\pi \delta(\theta_1 + \dots + \theta_{2n})$$

ここで $\theta_j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $z_j = e^{i\theta_j}$ ($i = \sqrt{-1}$)
であり \sum' は例えば $2n=4$ の時次のような和を表

わす

$$\begin{aligned} \hat{f}_4 \text{ の時} &\Rightarrow \sum_{\substack{(1,2,3,4) \\ \text{の permutation}}}^{24 \text{ (同)}} \frac{1}{1-\nu z_1} \frac{1}{1-z_1 z_2} \frac{1}{1-\nu z_1 z_2 z_3} \\ &- \sum^{12} \frac{1}{1-\nu z_1} \frac{1}{1-z_1 z_2} - \sum^{12} \frac{1}{1-\nu z_1} \frac{1}{1-\nu z_1 z_2 z_3} \\ &- \sum^{12} \frac{1}{1-z_1 z_2} \frac{1}{1-\nu z_1 z_2 z_3} \\ &+ \sum^4 \frac{1}{1-\nu z_1} + \sum^6 \frac{1}{1-z_1 z_2} + \sum^4 \frac{1}{1-\nu z_1 z_2 z_3} \end{aligned}$$

- /

(証明は略)

次に格子系の極限を考えて、連続系に移る。

$$f_n : \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$$



$$\hat{f}_n : T^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$$

で考えていたのを、

$$(\varepsilon\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{R}^n$$



$$\left(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\varepsilon}\mathbb{Z}\right)^n$$

に変え、 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたものを考える。(ここで n は偶数)

$$x_j = \varepsilon v_j, \quad \varepsilon p_j = \theta_j \quad \text{変数変換する。}$$

$$\hat{f}_n(\theta) = \sum f_n(v) e^{i\langle v, \theta \rangle} \quad \text{であった、ある}$$

いは逆に

$$f_n(v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_n(\theta) e^{-i\langle v, \theta \rangle} d\theta$$

変数変換して

$$f_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^n}{(2\pi)^n} \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{\varepsilon}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{\varepsilon}} \hat{f}_n(\varepsilon p) e^{-i\langle x, p \rangle} dp$$

ここで $\frac{\pi}{\varepsilon}$ を ∞ と思って, Fourier 逆変換して

$$\varepsilon^n \hat{f}_n(\varepsilon p) = \int \dots \int f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{i\langle x, p \rangle} dx$$

を得る。さらに進むために我々は

$$v = e^{z \varepsilon m} \quad \text{Im } m \geq 0$$

とおく。* こうすると物理的内容からはずれてくるが, 目的はモデルを作る事にあるのだから構わない。

$$f_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = e^{z \varepsilon m \mu(v)} = e^{z m \mu(x)}$$

これを $\tau_n(x)$ とおく。

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^n \hat{f}_n(\varepsilon p)) \\ &= \int \dots \int e^{z m \mu(x)} e^{i\langle x, p \rangle} dx \end{aligned}$$

が, 我々の目的物である。

命題 4

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{2n}(p_1, \dots, p_{2n}) &= \left(\sum \frac{z}{p_1 + i0} \frac{z}{p_1 + p_2 + i0} \dots \frac{z}{p_1 + \dots + p_{2n-1} + i0} \right) \times \\ &\quad \times 2\pi \delta(p_1 + \dots + p_{2n}) \end{aligned}$$

* さらに $m: \text{real}$ への境界値を考える。

$\therefore \hat{f}_{2n}(\theta)$ は求めたからそれを使う。例之は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu z_1} &= \frac{1}{1-e^{z'\varepsilon(m+p_1)}} \\ &= \frac{z'}{\varepsilon(p_1+m+z'0)} (1+O(\varepsilon)) \end{aligned}$$

よって ε をかけて $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば求める結果を得る。 Σ は Σ' でなくなる事に注意して下さい。

§3で、我々は \hat{c}_{2n} を Microlocal Analysis のマタイタにのせる。

§2 Fluid model

流体の model を考える。今度は explicit に計算する事はできないが、Feynman integral を使って表わす事が出来る。

こんどは始めから連続系である。相互作用は二体相互作用であるとする。すなわちポテンシャルエネルギー $U(x_1, \dots, x_n)$

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} U(x_i, x_j) \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

の形をしているとする。

但し $U(x_i, x_j)$ は

$$U(x_i, x_j) = U(x_i + a, x_j + a)$$

$$U(x_i, x_j) = U(x_j, x_i)$$

$$U(x_i, x_j) \longrightarrow 0 \quad (|x_i - x_j| \longrightarrow \infty)$$

を満たすとする。我々が考えたいのは $e^{-\beta U(x_1, \dots, x_n)}$ であるから,

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} A(x_i, x_j)$$

$$A(x_i, x_j) = e^{-\beta U(x_i, x_j)} \quad \text{としよう。}$$

n 個の粒子がすべてくっつき合っ、て近くににいる時だけ交わってくるような成分を取り出す。(cluster decomposition)

$$n=1$$

$$A_1^c(x_1) = A_1(x_1) = 1 \quad \text{とする。}$$

$$n=2$$

$$A_2(x_1, x_2) = A_1^c(x_1)A_1^c(x_2) + A_2^c(x_1, x_2)$$

$$\text{すなわち} \quad A_2^c(x_1, x_2) = A_2(x_1, x_2) - 1$$

で A_2^c を定義すると

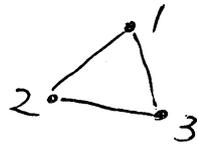
$$A_2^c(x_1, x_2) \longrightarrow 0 \quad (|x_1 - x_2| \longrightarrow \infty)$$

$$n=3$$

$$A(123) = A^c(1)A^c(2)A^c(3) + \sum^3 A^c(1)A^c(23) + A^c(123)$$

よって $A^c(123)$ を定義する。
すぐわかるように

$$A^c(123) = \sum^3 A^c(12)A^c(13) + A^c(12)A^c(13)A^c(23)$$



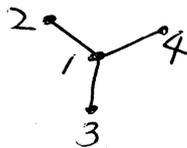
である。もうひとつだけやっ、て一般の場合は類推して
もらおう。

$$A(1234) = A^c(1)A^c(2)A^c(3)A^c(4) + \sum^6 A^c(1)A^c(2)A^c(34) + \sum^3 A^c(12)A^c(34) + \sum^4 A^c(1)A^c(234) + A^c(1234)$$

が $A^c(1234)$ の定義。(この定義は, Fluid model に
限らない一般の手続きである。) 実際には Fluid model では

$$A^c(1234) = \sum^{12} A^c(12)A^c(23)A^c(34)$$

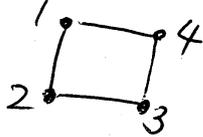
$$+ \sum^4 A^c(12)A^c(13)A^c(14)$$



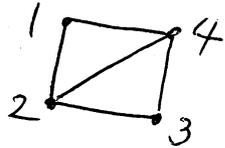
$$+ \sum^{12} A^c(12)A^c(23)A^c(24)A^c(34)$$



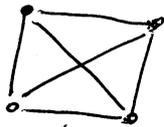
$$+ \sum^3 A^c(12)A^c(23)A^c(34)A^c(41)$$



$$+ \sum^{12} A^c(12)A^c(13)A^c(34)A^c(14)A^c(24)$$



$$+ A^c(12)A^c(13)A^c(14)A^c(23)A^c(24)A^c(34)$$



(^cをつけたものを connected part と呼ぶ。)
correlation function は、次のように定義される。

$$\tau_n(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\text{分子}}{\text{分母}}$$

$$\text{分子} = A_n(x_1, \dots, x_n) + \frac{t}{1!} \int A_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y_1) dy_1 + \frac{t^2}{2!} \iint A_{n+2}(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \dots$$

$$\text{分母} = 1 + \frac{t}{1!} \int A_1(y_1) dy_1 + \frac{t^2}{2!} \iint A_2(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \dots$$

分母・分子共に有限な量ではないが、割ったものは有限になる。connected part は有限の形で書ける。
(証明が、完全なものがあるわけではないので予想とする。)

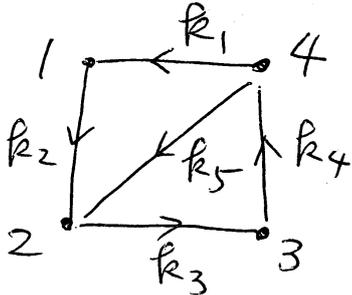
(予想)

$$\begin{aligned} \tau_n^c(x_1, \dots, x_n, t) &= A_n^c(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{t}{1!} \int A_{n+1}^c(x_1, \dots, x_n, y_1) dy_1 + \frac{t^2}{2!} \iint A_{n+2}^c(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

次にこれの Fourier 変換が Feynman 積分になる事を示す。

まず Feynman 積分を説明するが、ちゃんとした定義は、わかりにくいので例から類推してもらう。

グラフ G として次のものを考える。



$$\begin{aligned} F_G(p_1, \dots, p_5) &= \int \dots \int \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_4) \Delta(k_5) \\ &\times \delta(p_1 + k_1 - k_2) \delta(p_2 + k_2 + k_5 - k_3) \delta(p_3 + k_3 - k_4) \\ &\times \delta(p_4 + k_4 - k_1 - k_5) dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5 \end{aligned}$$

ここで $\Delta(k)$ は propagator として、今は

$$\hat{A}_2^c(p_1, p_2) = \Delta(p_1) \delta(p_1 + p_2)$$

で定義する。我々は (x_1, x_2) の具体的な形については何も言っていないから $\Delta(p_1)$ の具体的な形はわからないわけだが, model を作るのが目的であるから, 場の量子論との類似で

$$\Delta(p_1) = \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i0}$$

と取って, 仕事をす。^{*}(この稿では, Feynman 積分の解析はしないので $\Delta(p_1)$ としか書かない。)

$\Delta(p_1) \delta(p_1 + p_2)$ の逆 Fourier 変換が

$A_2^c(p_1, p_2)$ である事に注意すると, 次の事が容易に示される。

$$\hat{A}_n^c(p_1, \dots, p_n) = \sum_{G: \text{連結, 頂点 } n \text{ 個}} F_G(p_1, \dots, p_n)$$

よってまとめると

$$\hat{\tau}_m^c(p_1, \dots, p_m; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{G: \text{連結, 頂点数 } m+n} F_G(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) \Big|_{q=0}$$

$$F_G(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) \Big|_{q=0}$$

は Feynman 積分の定義で, 右辺において q_i たち
^{*}あるいはくり返した τ_2 をこうかく。(P18 参照)

をなくしたものを意味する。このように書いた理由は、 G についての和を取るとき、同じものを $n!$ 個 たして異なる G で Feynman 積分としては いる事を示したからである。そうでないときは $F_G(p_1, \dots, p_m, c, \dots, c)$ と書く。

$\hat{\tau}_m^c$ の代わりに、もうひとつパラメータ λ を入れて次のような関数を考えると都合がよい。

$$\hat{\tau}_m^c(p_1, \dots, p_m; \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^l}{n!} \sum_{G: \text{連結}, \text{頂点数 } n, \text{loop数 } l} F_G(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) \Big|_{q=0}$$

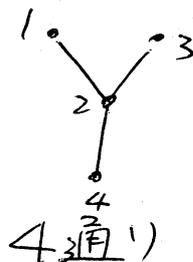
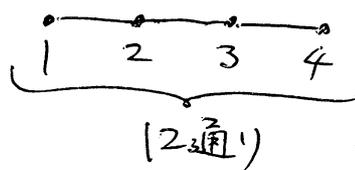
(以下では \wedge と c は省く。)

λ^0 の係数を計算してみよう。これは tree graph についての和である。(この時 F_G の積分はすべて計算されておけ)

(準備)

頂点数 n の tree の数は n^{n-2} 個

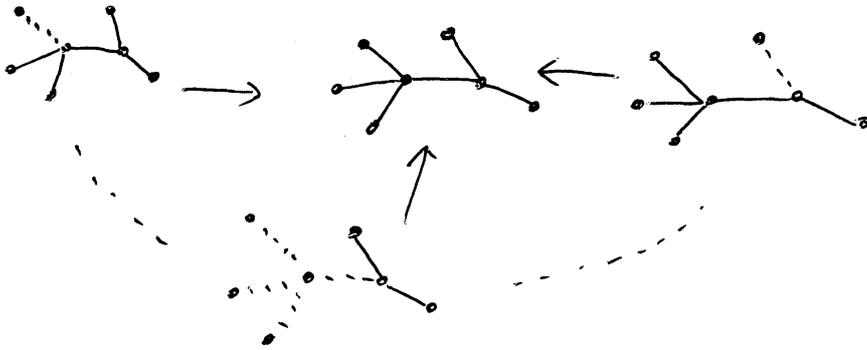
(例) $n=4$



$$\text{計 } 16 = 4^{4-2}$$

これから、頂点数 n の根付きの tree (頂点のうちひとつが指定されたもの) の数は n^{n-1} 個

さらに、下の図から理解されるように、頂点数 n の連結とは限らない、loop のない、しかも各連結成分に根のついたグラフの数は $(n+1)^{n-1}$ 個

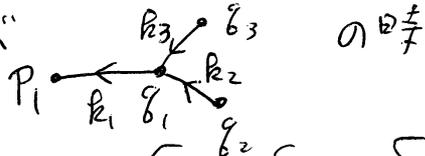


$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n \quad \text{とおく。}$$

$\tau_1(p_1, t)_{\text{tree}}$ の計算

$$F_G(p_1, 0, \dots, 0) = \Delta(0)^n$$

∴) 例えは "G が" のとき



$$\begin{aligned} F_G &= \int \int \int \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \delta(k_2) \delta(k_3) \delta(k_2 + k_3 - k_1) \\ &\quad \times \delta(p_1 + k_1) dk_1 dk_2 dk_3 \\ &= \Delta(0)^3 \end{aligned}$$

(積分おと k_3, k_2, k_1 が順に 0 になる)

グラフの数は, \sim で示したグラフを, その根を p_i につける事ですべて得られるから $(n+1)^{n-1}$ 個
よって

$$\tau_1(p_i, t)_{tree} = \varphi(t\Delta(o)) \delta(p_i)$$

同様な計算で (大学入試の頃を思い出せばよい)

$$\frac{\tau_2(p_1, p_2; t)_{tree}}{\varphi(t\Delta(o))^2} = \frac{\Delta(p_i)}{1 - t\Delta(p_i)\varphi(t\Delta(o))} \delta(p_1 + p_2)$$

が得られる。

τ_n ($n \geq 3$) については, いわば τ_1, τ_2 をくり込んでしまうと, グラフ G として, より簡単なものだけの和に帰着される。結果のみ述べると

$$\frac{\tau_m(p_1, \dots, p_m; t)_{tree}}{\varphi(t\Delta(o))^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{G: tree} \{t\varphi(t\Delta(o))\}^n \times$$

頂点数 $m+n$ 個

p_i 以外の頂点からは
内線が少なくとも一本出る

$$\times F_G(p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0; \frac{\Delta(*)}{1 - t\Delta(*)\varphi(t\Delta(o))})$$

$$\times \delta(p_1 + \dots + p_m)$$

ここで propagator として $\frac{\Delta(*)}{1-t\Delta(*)} \varphi(t\Delta(0))$ を使う。

λ のべきを含む場合にも、同じように τ_1, τ_2 をくり返す事ができる。結果だけ述べると

$$\tau_1(p_1, \lambda, t) = \tau_1(\lambda, t) \delta(p_1)$$

$$\tau_2(p_1, p_2, \lambda, t) = \tau_2(p_1, \lambda, t) \delta(p_1 + p_2)$$

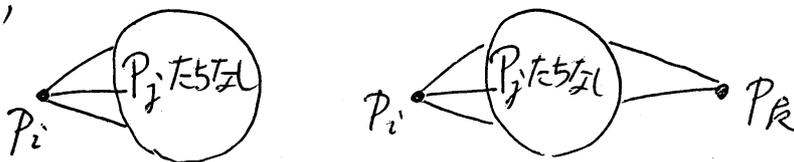
とすると

$$\frac{\tau_m(p_1, \dots, p_m, \lambda, t)}{\tau_1(\lambda, t)^m} = \sum_G \lambda^{\#(G \text{ の loop})} \{t\tau_1(\lambda, t)\}^n$$

$$\times F_G(p_1, \dots, p_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n; \tau_2(*, \lambda, t))$$

ここで G は頂点 $m+n$ の n 連結グラフで p_1, \dots, p_m 以外の頂点には内線が n 本以上はいる。

また,



というような部分グラフは含まない。

§3 1次元 Ising model の microlocal analysis

我々の目標は, 無限系 ($n=1, 2, \dots$)

$$\tau_{2n}(p) = \left(\sum \frac{z^i}{P_1+m+ic} \frac{z^i}{P_1+P_2+ic} \dots \frac{z^i}{P_1+\dots+P_{2n-1}+m+ic} \right) 2\pi \delta(p_1+\dots+p_{2n})$$

を, holonomic system によって特徴づける事である。

この§では $\hat{\tau}_{2n}$ の \wedge は省いた。

(1) τ_{2n} の満たす holonomic system

まず n を固定して, τ_{2n} の満たす holonomic system の holonomy diagram を決定しよう。

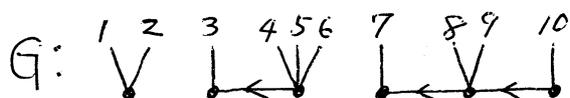
$$f_{i_2 \dots i_{2n}} = \frac{z^i}{P_1+m+ic} \frac{z^i}{P_2+ic} \dots \frac{z^i}{P_{i_2 \dots (2n-1)}+m+ic} 2\pi \delta(p_{i_2 \dots 2n})$$

$$(P_{i_1 \dots i_j} = P_{i_1} + \dots + P_{i_j})$$

について考えよう。

P_i に対する canonical 座標を u_i とする。

つぎのような1次元グラフを考える。



G に対応する positive Landau holonomic set $\textcircled{*}$

とは $P_1 + P_2 = 0$, $P_3 = -m$, $P_4 + P_5 + P_6 = m$

$P_7 = -m$, $P_8 + P_9 = 0$, $P_{10} = m$

$\textcircled{*} A_G^+$ と書く。

$$u_1 = u_2 \geq u_3 \geq u_4 = u_5 = u_6 \geq u_7 \geq u_8 = u_9 \geq u_{10}$$

を満たす点 $(p, \sqrt{u_\infty})$ の集まりである。

グラフ G としては 次のようなものを考える。

i) 頂点は一列に並び、各頂点は一本以上の外線を持つ。

図では外線を上向きの方で表わした。

ii) 右側から見て、始めての奇数本の外線を持つ頂点から二番目の奇数本の外線を持つ頂点までの間を、矢印をつけた内線で結ぶ。

このようなグラフに対して、positive Landau holonomic set を対応させるやり方は例 から明らかであろう。complex cotangent bundle で考えて、条件のうち \geq の部分を取り去ったもので定義される (p, u_∞) の集まりを、Landau holonomic set という[⊗]。(次ページの注意を見て下さい。)

$f_{1,2,\dots,2n}$ の 特異スペクトルは、左から順に外線に 1 から $2n$ の名前がついたグラフ G に対応する positive Landau holonomic set にある。 τ_{2n} は、いろいろな項の和であるが、すべての G に対する positive Landau holonomic set の合併が、特異スペクトルを与える事がわかる。

⊗ この時、頂点の右左の順序は無視してグラフを考える。

注意 1次元 model の特殊性から, 異なったグラフ
 が同じ Landau holonomic set を与える。例えば
 上記の G と次のグラフは同じ Landau holonomic
 set を表わしている。 \circledast そこで記号として $\Lambda[G]$ を用いる。



以上で, τ_{2n} の満たす holonomic system の holonomic
 set がわかった, 次に, $\text{codim } 1$ の交わりを決めよ
 う。

幾何学的には, $\Lambda[G]$ と, グラフ G の ^{ど2つか} 二つの頂点をく
 っつけてできるグラフ G_1 に対する $\Lambda[G_1]$ とは $\text{codim } 1$
 で交わる。またこのような交わりのみが $\text{codim } 1$ である。

解析的にも, 実際に交わっているかどうかを決める必要が
 ある。初心の方のために, 幾何学的には $\text{codim } 1$ で交わっ
 ているが, 解析的には素通りしている一番簡単な列を挙げ
 ておく。

$$\mathcal{M}: x^2 D u = D^2 x u = 0$$

解は $C_1 \delta(x) + C_2$ である。

$$\circledast \quad \begin{array}{c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \quad \text{も同じである。}$$

このような方程式の特徴は、交わりにおいて *symbol ideal* J が *non-reduced* になっている事である。あるいは、*principal symbol* が交わりにおいて特異性を持たない事でも判定できる。

そこで、解析的なつながり具合を調べる前に、*principal symbol* を計算しておいた方が都合がよい。P19の G を例にとって考えよう。 Λ_G^+ に *support* を持つ項だけ書くと

$$\begin{aligned} \tau_{10}(p) = & \left\{ \sum_{(1,2)} \frac{i}{P_i+m} \right\} \frac{i}{P_{12}+i0} \frac{i}{P_{123}+m+i0} \left\{ \sum_{(4,5,6)} \frac{i}{P_{1234}} \frac{i}{P_{12345}+m} \right\} \times \\ & \times \frac{i}{P_{123456}+i0} \frac{i}{P_{1234567}+m+i0} \left\{ \sum_{(8,9)} \frac{i}{P_{12345678}} \right\} \frac{i}{P_{123456789}+m+i0} \times \\ & \times 2\pi \delta(p_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}) \end{aligned}$$

これからわかるように、 $\tau_{2n}(p)$ は Λ_G^+ においては、対応する δ 関数 $\delta(p_{12}) \delta(p_{3+m}) \delta(p_{456-m}) \delta(p_{7+m}) \times \delta(p_{89}) \delta(p_{10-m})$ に正則関数をかけたものになっている。*よってその *principal symbol* は (定数倍を調節すれば) かかっている正則関数に等しい。今の場合

$$\delta_{\Lambda_G^+}(\tau_{10}) = \left\{ \sum_{(1,2)} \frac{i}{P_i+m} \right\} \left\{ \sum_{(4,5,6)} \frac{i}{P_{4-m}} \frac{i}{P_{45}} \right\} \left\{ \sum_{(8,9)} \frac{i}{P_8-m} \right\}$$

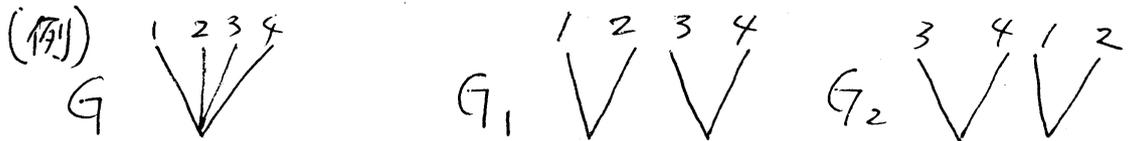
*これから方程式が *simple* であることがわかる。

また $\text{ord}_{\Lambda_G}(\tau_{2n}) = \frac{\text{codim } \pi(\Lambda_G)}{2}$ がわかった。

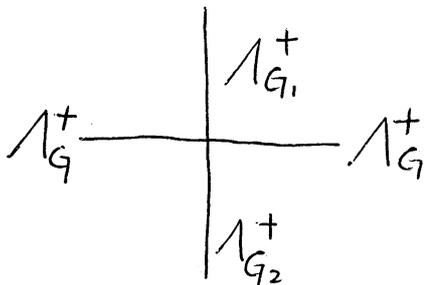
この結果を利用して解析的なつながりを決めよう。次の三つの型がある。

i) 偶数 \Rightarrow 偶数・偶数

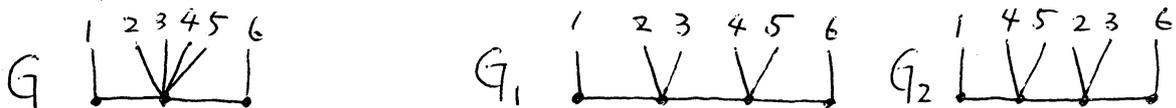
偶数本の外線を持つ頂点が、ふたつに分かれ、それぞれに偶数本の外線が分配される場合。



$\Lambda_{G_1}^+$ と $\Lambda_{G_2}^+$ が Λ_G^+ を境目としてつながっている。



τ の support は 4つの連結成分のすべてにあらわれる。 $\mathcal{O}_{\Lambda_{G_1}^+}(\tau)$ と $\mathcal{O}_{\Lambda_{G_2}^+}(\tau)$ とは境目を越えてつながっている \otimes 。よって、この交わりは解析的には素通りである。



の時も同じである。

型の

\otimes P25の説明を見て下さい。

ii) 偶数 \Rightarrow 奇数・奇数



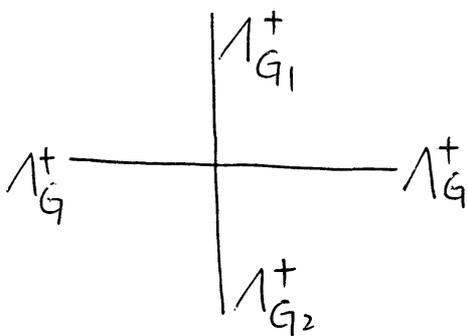
今度は、 $\Lambda_{G_1}^+$ の端が Λ_G^+ であり、その反対側には、positive Landau はない。よって principal symbol はつながらない。よってこの交わりは解析的につながっている。



の時も同じである。

の型

iii) 奇数 \Rightarrow 偶数・奇数

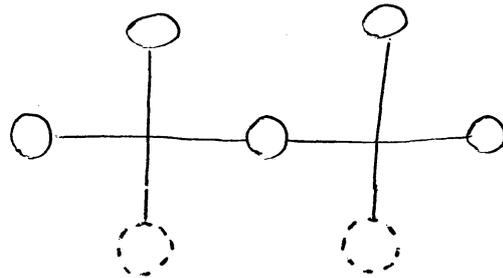
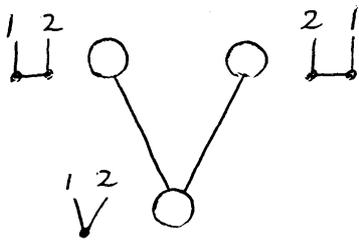


$$G_{\Lambda_{G_1}^+}(\tau) = \sum \frac{i}{p_2 - m}$$

$$G_{\Lambda_{G_2}^+}(\tau) = \sum \frac{i}{p_2 + m}$$

となって principal symbol はつながらない。一般の場合でも, P22 の計算から察することかできると思うが, 左から数えて奇数本目の外線が始まる組についてと, 偶数本目の外線が始まる組とは 土川 の違いがある事から principal symbol はつながらない^(*)。よってこの交わりは解析的につながっている。

τ_2 の helicity diagram
complex real (positive Landau でないのは点線)



(2) discontinuity formula

(1) の情報だけでは τ_{2n} を特徴づける事はできない。

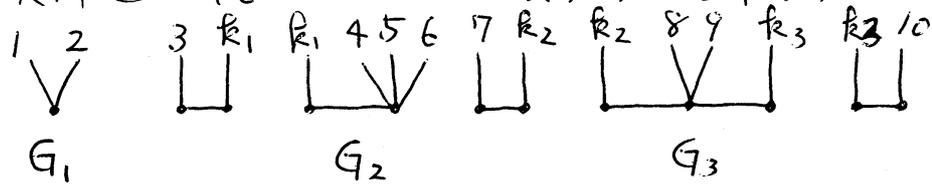
τ_{2n} ($n=1, 2, \dots$) の相互の関係を知る必要がある。そのような関係式は discontinuity formula と呼ばれる。

我々は, 以下示すように principal symbol の間の関係式として書き表わす。

P19 のグラフ G について説明しよう。

(*) すぐわかるように, principal symbol は互いに他の符号だけ変えたものに等しい。この事から方程式が "simple" である事が保証される。

矢印を切断して 次のようなグラフを作る。



このとき次の式が成り立つ。

$$\sigma_{1_G^+}(\tau_{10}) = \sigma_{1_{G_1}^+}(\tau_2) \sigma_{1_{G_2}^+}(\tau_4) \sigma_{1_{G_3}^+}(\tau_4)$$

ここで \sqcup という形のもは principal symbol が 1 なので省いた。上のような等式は、一般の場合でも成り立つ。それは、 k をふたつずつ入れていくので、左から偶数番目か奇数番目かという事は、切断したあとも変わらないからである。

(3) $\tau_{2n}(p)$ の characterization

(1), (2) で得た情報をまとめてみよう。

(i) holonomy diagram からわかる事。

現われる holonomic set は linear variety Y_j の conormal bundle である。従って codim (の交わり) は、 Y_1 と Y_2 を片方例えば Y_2 が 他方すなわち Y_1 の hyperplane として、 $T_{Y_1}^* X$ と $T_{Y_2}^* X$ の pair において起こる^(*)。このうち、p23 で説明したような型の交わりは解析的には素通りしている。

^(*) この時 $T_{Y_1}^* X (Y_1)$ を子 $T_{Y_2}^* X (Y_2)$ を親と呼ぶ。

各 $T_{Y_j}^* X$ で方程式は simple であり, order は $\frac{\text{codim } Y_j}{2}$ である。これだけの情報からどれだけの事がわかるか考えよう。解析的につながった子を持たないような linear variety を Y_0, Y_1, \dots, Y_N としよう。 $Y_0 = \{p_{12} \dots p_{2n} = 0\}$ とおく。 zero section X には方程式がない事と, $T_{Y_0}^* X$ での order が $\frac{1}{2}$ である事から, $T_{Y_0}^* X$ において, 解析的につながった親との交わりを除いては,

$$\tau_{2n} = \sigma_{Y_0}(\tau_{2n}) \delta(p_{12} \dots p_{2n})$$

となる事がわかる。ここで $\sigma_{Y_0}(\tau_{2n})$ は, 上に述べた交わり以外で正則な (多価かも知れない) δ 関数であり, 定数倍を除き, principal symbol となる。 $\sigma_{T_{Y_0}^* X}$ と書くべき所を σ_{Y_0} と書いた。 $\sigma_{Y_0}(\tau_{2n})$ は一価であり, 親との交わりで 1 位の pole を持つような meromorphic function になる事がわかる。この事は, $T_{Y_0}^* X$ の親の order が 1 になる事から従う。

ここで次の一般的な定理を引用しておく。

(定理) Λ_0, Λ_1 を二つの fulcrumic set で $\text{codim } 1$ で regular な交わりを持つとする。 Λ_0, Λ_1 に support を持つ simple な方程式 $\mathcal{M} = p_{ii}$ があって

⊙ 以下「解析的につながった」というのを略して書く。

この交わりは解析的につながっているとす。

$$\text{ord}_{\Lambda_0} u = e_0 \quad \text{ord}_{\Lambda_1} u = e_1 \quad \text{とする。}$$

この時、次の三つは同値

i) Λ_1 のみに support を持つ方程式 \mathcal{M}_1 があって

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow 0$$

ii) Λ_0 のみに support を持つ方程式 \mathcal{M}_0 があって

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$$

iii) $e_1 - e_0 = \frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$ or $\frac{5}{2}$ or ...

(系)

今、二つの方程式 P/g_1 と P/g_2 がどちらも定理の条件を満たすとし、

$$e_1 - e_0 \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$$

とすれば、もし $g_1 = g_2$ on Λ_0 ならば、 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ 全体で $g_1 = g_2$ となる。すなわち方程式は Λ_0 から Λ_1 へ unique に伝播する。

方程式の解については、同じ条件のもとで、 Λ_1 から Λ_0 へ unique に伝播する。

従って我々の situation では、方程式は子から親へ解は親から子へ伝播する。

証明はしないが、一番簡単な例を説明しよう。常微分方程式 $\mathcal{L}/\mathcal{L}Dx$ を考える。

$$\Lambda_0 = \{s=0\} \quad e_0 = 0$$

$$\Lambda_1 = \{x=0\} \quad e_1 = \frac{1}{2}$$

この時 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}D \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}Dx \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}x \rightarrow 0$$

が存在する。 Λ_0 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ Λ_1

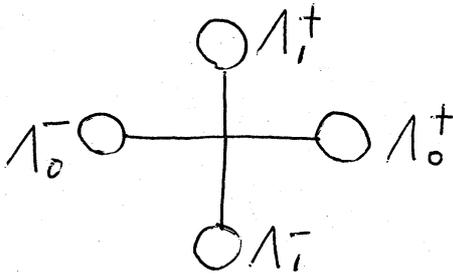
また解は、 $\frac{c_1}{x+ic} + \frac{c_2}{x-ic}$ であって Λ_1 での解を決めると Λ_0 では unique に決まるが、逆は成り立たない。

$\Gamma_{Y_0}^* X$ で方程式が決まると、そこから親へ、その親へと伝えていけるような holonomic set においては、方程式が決まる。 Y_1, \dots, Y_N についても同様の議論を行えば、方程式を決める事は、 $N+1$ 個の各 Y_j 上の meromorphic function を与える事と同じ事がわかる。但し、勝手に与えてよいのではなく、共通の尊属に対して同じ方程式を定義するようしなければならない。

方程式が決まれば、今度は逆に親の方から解を決める事ができるわけだが、今の場合は方程式と解とどちらもわからないのだから、どうしたらよいか。

(ii) 接続行列と residue

以上は complex な情報だけによる議論であった。real な考察に移ると、P29 で少しふれた解の構造が重要な手がかりになる。



上のような real の交わりにおいて、解空間は 2 次元ある。order の差が一般の時は λ_1^+ と λ_1^- に独立な解を与えてそれを λ_0 に延長できるし逆に λ_0^+ と λ_0^- に独立な解を与えてそれを λ_1 に延長する事もできる。しかし、今扱っている場合では λ_0^- の解と λ_0^+ の解は独立ではない。

我々は、 $\sigma_{\lambda_1^+}(u)$ と $\sigma_{\lambda_1^-}(u)$ を知って $\sigma_{\lambda_0^\pm}(u)$ を知る事を望むが、方程式が与えられてないのでそれはできない。しかし 次の式が成り立つ。

$$\sigma_{\lambda_1^+}(u) - \sigma_{\lambda_1^-}(u) = \text{residue } \sigma_{\lambda_0^\pm}(u)$$
この意味を説明しよう。 $\lambda_0 = T_{Y_0}^* X$, $\lambda_1 = T_{Y_1}^* X$ とする。 Y_1 は Y_0 の中で codim 1 である。 $\sigma_{\lambda_0^\pm}(u)$ は、 Y_1 の両側でそれぞれ定義され、 Y_1 で simple pole を持つ。 $\sigma_{\lambda_1^\pm}(u)$ は Y_1 上の函数である。というわけで

上の式が意味を持つ。特に, $\text{residue } \sigma_{1_0^+}(u) = \text{residue } \sigma_{1_0^-}(u)$ が $\sigma_{1_0^+}(u)$ と $\sigma_{1_0^-}(u)$ が独立でない事に対応している。

(iii) discontinuity formula と残された不定さ

以上を準備として, τ_{2n} がいかに characterize されるかを τ_4 を例に取って説明しよう。

まず complex factorization diagram を書こう。

$\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$ ---- $P_1 = -m, P_2 = -m, P_3 = m, P_4 = m$ の conormal

$\begin{pmatrix} 23 \\ 4 \end{pmatrix}$ ---- $P_1 = -m, P_{23} = 0, P_4 = m$ の conormal

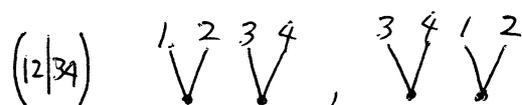
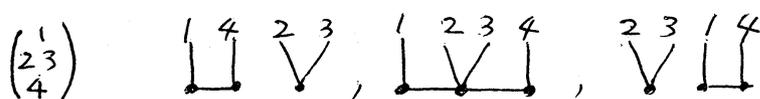
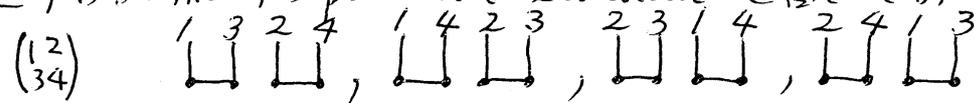
$\begin{pmatrix} 123 \\ 4 \end{pmatrix}$ ---- $P_{123} = -m, P_4 = m$ の conormal

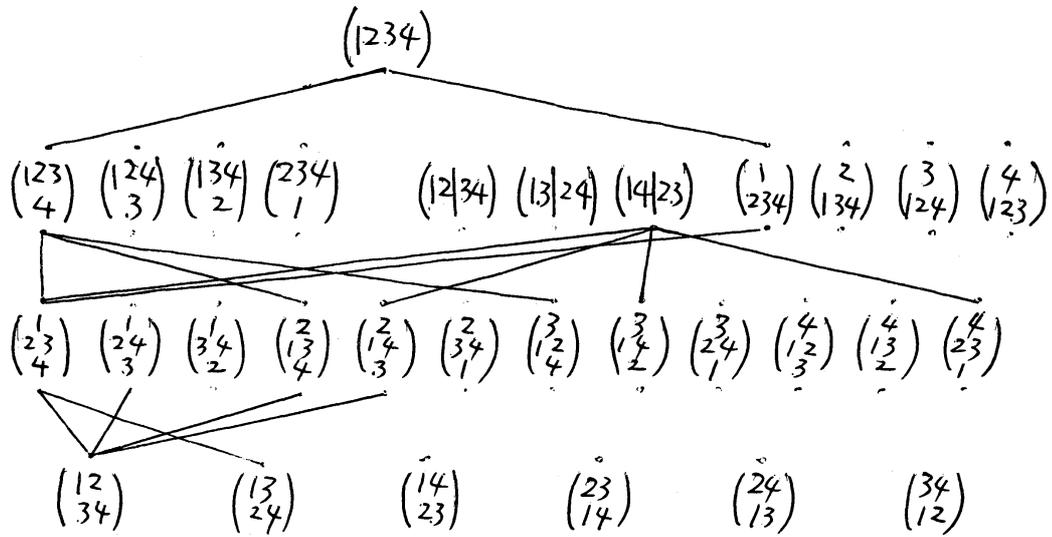
$\begin{pmatrix} 1 \\ 234 \end{pmatrix}$ ---- $P_1 = -m, P_{234} = m$ の conormal

$\begin{pmatrix} 12|34 \end{pmatrix}$ ---- $P_{12} = 0, P_{34} = 0$ の conormal

$\begin{pmatrix} 1234 \end{pmatrix}$ ---- $P_{1234} = 0$ の conormal

とする。対応する positive Landau を書いておくと,





交わりは、ほんの一部しか書いてない。一番下の段の principal symbol は discontinuity から容易にわかるように1である。第2段についても $\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ や $\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ では discontinuity から決まってしまう。 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$ においては $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ と $\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$ とにおける residue がわかる。かつ定数倍を除いて、 $\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ や $\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ と同じでなければならぬから決まる。第3段で $\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ は discontinuity から決まる。 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$ については、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ との交わりでの residue は決まる。よって、この principal symbol は entire function の不定さが残る。 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ においてもやはり同じ不定さが残る。しかし、 $\sigma_{\gamma_0}(u)$ に対して、その値は、singularity から離れて無限大にいくと 0 になる、という事を仮定としてつけ加えれば、不定さをしにすべてが決まる。