数理解析研究所講究録
第248巻 1975年 319-329

確定特異点型境界値問題について

東大 理　　大島利雄

対称空間上の同時固有函数に関するHelgason予想を解くのにあたり、それを"確定特異点型境界値問題"として捕えるのが自然であることが，佐藤－河合－柏原，3氏により明らかにされた。(cf. [1], [4])。 境界の余次元が1の場合は，[4]で，その予想は解決された．(境界値をとる操作等について，cf. [5])。 境界の余次元が2以上（即ち，対称空間のrankが2以上）の場合については，$SL(3,\mathbb{R})$の例[6]があったが，一般の場合もその方法を拡張したもので十分であることの証明がなされ，Helgason予想は解決された．(cf. [2]，[8])．

[2]で用いられる"確定特異点型微分方程式系"のformulationは，（境界の余次元が1の場合も含めて），柏原正樹氏との共著の[3]に述べられている． ここでは"境界値の定義"に重点をおいて，[3]の内容を紹介する．

詳しい証明等については，[3]を参照して下さい．

Mを $(n+l)$-次元実解析多様体，Nをその n-次元部分多様体とする。N_j $(j=1,\cdots,l)$ を，Nで transversal に交わる超曲面とし，局所座標系として，$(t_1,\cdots,t_l,x_1,\cdots,x_n)\in M$，$N_j=\{(t,x)\in M\ ;\ t_j=0\}$ がとれるとする．$M_+=\{(t,x)\in M;\ t_j>0\ ,\ 1\leq j\leq l\}$ とおく．X，Y，Y_j 達をそれぞれ M，N，N_j 達の複素化とする．

<u>定義1.</u> M 上の微分方程式系

$$\mathcal{M}:\quad P_1u=\cdots=P_lu=0$$

が，壁 $N_1,\cdots,N_l$ に確定特異点を持つ，とは次の条件達を満足する時に言う。

(RS-0)　P_j の階数を r_j とおく時，$(r_i+r_j-r_k-1)$-階以下の微分作用素 $R_{i,j}^k$ が存在して，次式が成立する。

$$[P_i,P_j]=\sum_{k=1}^{l}R_{i,j}^kP_k.\qquad(1\leq i,j\leq l)$$

(RS-I)　P_j 達は次の様な形をしている。

$$P_j=P_j(t,x,tD_t,tD_x).$$

但し，$tD_t=(t_1D_{t_1},\cdots,t_lD_{t_l})$，$tD_x=(t_1D_{x_1},t_1D_{x_2},\cdots,t_lD_{x_n})$，$D_{t_j}=\dfrac{\partial}{\partial t_j}$，$D_{x_k}=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$．

この時，$a_j(x,s)=P_j(0,x,s,0)$ を P_j の決定多

項式と呼ぶ. ($s=(s_1,\ldots,s_\ell)$).

(RS-II) $\mathring{a}_j(x,s)$ を, $a_j(x,s)$ の s に関する r_j-次同次部分とする. この時, すべての $x\in N$ に対し, $\mathring{a}_1(x,s)$, $\ldots$, $\mathring{a}_\ell(x,s)$ の共通零点は $s=0$ のみである。

この場合, s に関する方程式 $a_1(x,s)=\cdots=a_\ell(x,s)=0$ の根は, 重複度も込めて考えれば $r=r_1\times\cdots\times r_\ell$ 個である. それらの根 $s_\nu(x)=(s_{\nu,1}(x),\ldots,s_{\nu,\ell}(x))$, $(1\leq\nu\leq r)$ を $\mathcal{M}$ の特性根と呼ぶ.

<u>定義2.</u> M 上の微分方程式系

$$\mathcal{M}\ :\ P_1u=\cdots=P_\ell u=0$$

が, 壁 $N_1,\ldots,N_\ell$ に, 弱い意味で確定特異点を持つ, とは $t_j\longmapsto t_j^m$ $(1\leq j\leq\ell)$ によって, P_j 達が, 定義1に述べてある形に変換される様な $m\in\mathbb{Z}_+$ が存在する場合を言う。この時の決定多項式は, $a_j(x,s)\longmapsto a_j(x,ms)$ という変換を受けるものとして定義1から自然に定義される.

次の方程式は, $\ell=1$ に対する定義2の例を与える.

$$(t^2D_t^2+tD_x^2-c(c-1))u=0. \qquad (c\in\mathbb{C})$$

決定多項式は, $(s-c)(s-1+c)$, 特性根は c と $1-c$

以下，方程式系 $\mathcal{M}$ は，特に断らない限り，定義1に述べられた形をしていると仮定する． π_X を P^*X から X への自然な projection とし， $\Lambda = P^*_Y X - \bigcup_{j=1}^{\ell} P^*_{Y_j} X$ と置く． $x^0 \in N \subset Y$ を固定し， $\Lambda_0 = \Lambda \cap \pi_X^{-1}(x_0)$ と置く．

<u>定理3</u>. 上の $\mathcal{M}$ に対して，Λ_0 の近傍で定義された micro-differential operators $A_\nu(t, x, D_t, D_x)$ が存在して（$1 \leq \nu \leq r$），次を満足する．即ち，

(1) $$u = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t, x, D_t, D_x) v_\nu$$

という対応により，$\mathcal{M}$ は次の方程式系と Λ_0 の近傍で同型になる。

$$\mathcal{N} : \ (t_j D_{t_j} - B_j(x, D_x)) v = 0, \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

但し，B_j は x に関する微分作用素の $r \times r$-行列であって，$[B_i, B_j] = 0$ を満たす．また，v は $v_1, \dots, v_r$ より成る列ベクトルとする。

さらに，A_ν, B_j は，次の条件が成立する様にできる。

写像 $\iota : \{1, \cdots, r\} \longrightarrow \{1, \cdots, r\}$ を，

$$(2) \quad \begin{cases} \iota \circ \iota = \iota, \\ \lambda_\nu(x^0) - \lambda_{\nu'}(x^0) \in \mathbb{N}^\ell \implies \iota(\nu) = \iota(\nu'), \\ \lambda_\nu(x^0) - \lambda_{\nu'}(x^0) \notin \mathbb{N}^\ell, \ \lambda_{\nu'}(x^0) - \lambda_\nu(x^0) \notin \mathbb{N}^\ell \implies \iota(\nu) \neq \iota(\nu'), \end{cases}$$

が満たされる様に定義した時，

$$
(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{ord}\,(A_\nu D_t^{s_\nu(x^0)-s_{\tau(\nu)}(x^0)}) \leq 0, \\ \sigma_0\,(A_\nu D_t^{s_\nu(x^0)-s_{\tau(\nu)}(x^0)})|_\Lambda = 1, \\ \operatorname{ord}_{D_t} A_\nu \leq s_{\tau(\nu)}(x^0) - s_\nu(x^0), \end{cases}
$$

また，$s_{\nu'}(x^0) - s_\nu(x^0) \notin \mathbb{N}^\ell$ なら B_j の (ν, ν')－成分は0，$s_{\nu'}(x^0) - s_\nu(x^0) \in \mathbb{N}^\ell$ なら B_j の (ν, ν')－成分の order は，$\sum_{i=1}^{\ell}\{s_{\nu', i}(x^0) - s_{\nu, i}(x^0)\}$－階以下．

特に，$s_\nu(x)$ 達が x^0 の近傍で解析的ならば，（必要なら suffices ν の順序をとりかえて），B_j はさらに，対角成分が $s_{\nu, j}(x) + s_{\tau(\nu), j}(x^0) - s_{\nu, j}(x^0)$ の上三角行列にできる。

特に，"$\nu \neq \nu' \Rightarrow s_\nu(x^0) - s_{\nu'}(x^0) \notin \mathbb{N}^\ell$" が成立する場合は，$\tau = id$ となるので，(3) は

$$
(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{ord}\, A_\nu \leq 0, \\ \sigma_0(A_\nu)|_\Lambda = 1, \\ \operatorname{ord}_{D_t} A_\nu \leq 0, \end{cases}
$$

となり，$\mathcal{N}$ は方程式系

$$
\mathcal{N}_\nu \ :\ (t_j D_{t_j} - s_{\nu, j}(x))\, v_\nu = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell,
$$

の直和になる．この時，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の対応(1)は，(4)で唯一に定まる。

注意　micro-differential operator は，S-K-K [7] において，pseudo-differential operator として定義された．$A = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell} A_\alpha(t, x, D_x) D_t^\alpha$ という展開を持つ様な

micro-differential operator に対し,
$\mathrm{ord}_{D_t} A \leq \beta \overset{def.}{\Longleftrightarrow} A_\alpha = 0$ for $\alpha > \beta$ (即ち, $\alpha - \beta \in \mathbb{N}^\ell$ かつ $\alpha \neq \beta$)。

[3]に於いて, "$\nu \neq \nu' \Rightarrow \lambda_\nu(x) - \lambda_{\nu'}(x) \notin \mathbb{Z}^\ell$" の場合のみ定理3を証明してあるが (Theorem 5.2 in [3]), 一般の場合の証明も全く同様である (cf. Theorem 3.2 in [3] = 定理1 in [5])。

以下, 簡単の為, $\mathcal{M}$ に次の条件を課す.

(A) $\mathcal{M}$ の特性根 $\lambda_\nu(x)$ $(1 \leq \nu \leq I)$ に対し,

$$\nu \neq \nu' \Rightarrow \lambda_\nu(x) - \lambda_{\nu'}(x) \notin \mathbb{N}^\ell \quad \text{for } {}^\forall x \in N$$

次に, 境界値を定義する為, 境界が超曲面の時と同様, 次の条件を仮定する。

(B) M の任意の開集合 U に対し, $U \cap N$ を含む開集合 W が存在して, $U \cap M_+$ で定義された $\mathcal{M}$ の超函数解 u はすべて, $\mathrm{supp}(\tilde{u}) \subset \overline{M_+}$ を満たす $U \cup W$ 上の超函数解 $\tilde{u}$ に *unique* に拡張される。

さて, (A), (B) を仮定しよう。この時, M_+ 上の *hyperfunction solution* u of $\mathcal{M}$ に対し, (B) による拡張を $\tilde{u}$ とする。定理3によれば, (A) が成立するので,

$$sp(\tilde{u}) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,x,D_t,D_x)\, sp(\varphi_\nu(x)\, t_+^{\lambda_\nu(x)})$$

という表示が，$\sqrt{-1}S_N^*M - \bigcup_{j=1}^{\ell} \sqrt{-1}S_{N_j}^*M$ 上で成立することがわかる．(但し，φ_ν は N 上の hyperfunction で，A_ν は (4) を満たす)．なぜなら，$\mathcal{M}_\nu$ の microfunction solution は，N 上の hyperfunction $\varphi_\nu(x)$ を用いて，$sp(\varphi_\nu(x)\, t_+^{\lambda_\nu(x)})$ と表わせるから。Holmgren の定理から，u により φ_ν 達が unique に定まりしかも，"$\varphi_\nu = 0,\ 1 \leq \nu \leq r$" は u が N の近傍で 0 となることを意味することがわかる。

<u>定義 4.</u>　N 上の line bundle $L_{\lambda_\nu(x)}$ を

$$(T_{N_1}^*M)^{\otimes \lambda_{\nu,1}(x)} \otimes \cdots \otimes (T_{N_\ell}^*M)^{\otimes \lambda_{\nu,\ell}(x)}$$ で定義する。

この時，$L_{\lambda_\nu(x)}$ の hyperfunction-valued section $\varphi_\nu(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)}$ を，u の特性根 $\lambda_\nu(x)$ に対応する境界値と呼ぶ。

上の定義が well-defined であることを保証する補題がある．

<u>補題 5.</u>　$\varphi_\nu(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)}$ は，局所座標系の選び方によらない．

次に，条件 (B) が成立するための十分条件について述べる．N が超曲面の場合には，次の定理を用いる。

定理6. $l=1$ とする。 $\mathcal{M}: Pu=0$ は, 弱い意味で N に確定特異点を持つとする。$\mathcal{M}$ の特性根のいずれもが, 任意の $x \in N$ に対し負の整数にならなければ (B) が成立する。

そこで, $l \geq 2$ の場合にも, $N_1, \cdots, N_l$ に対し順に解の拡張を作っていけるための条件として, 次のものを考える。

(C) 各々の N_j に対し, N_j に弱い意味で確定特異点を持つ微分作用素 $Q_j(t, x, tD_t, D_x)$ が存在して, $Q_j u = 0$ を満たす. (u は, $\mathcal{M}$ の generator).

(C)′ (C) が成立し, さらに, Q_j の特性根のいずれもが, 任意の $x \in N$ に対し, 負の整数にならない.

定理7. (C)′ から (B) が従う。

定理7は, 定理6と次の補題から容易に証明される。

補題8. 定理6に於いて, $u \longmapsto \tilde{u}$ がその拡張とする. もし, ある $R(t, x, tD_t, D_x)$ に対し $Ru = 0$ が成立していれば, $R\tilde{u} = 0$ となる.

最後に, 条件 (A), (C) のもとで, 境界値を定義しよう。

$\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ に対し, $P_{j,\alpha} = t^\alpha P_j t^{-\alpha}$, $Q_{j,\alpha} = t^\alpha Q_j t^{-\alpha}$,

$$\mathcal{M}_\alpha : P_{1,\alpha} w = \cdots = P_{\ell,\alpha} w = 0$$

とおく。この時, $\mathcal{M}_\alpha$の特性根は$\mathcal{M}$のそれよりαだけ大きく, また, $Q_{j,\alpha}$の特性根は, Q_jのそれよりα_jだけ大きい。従って, (A), (C) を満たす$\mathcal{M}$に対し, $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$を十分大きくとれば, $\mathcal{M}_\alpha$は (A), (C)$'$ を満たす. uを, M_+で定義された$\mathcal{M}$の*hyperfunction solution*とする。$t^\alpha u$は$\mathcal{M}_\alpha$の解であるから, 十分大きな$\alpha \in \mathbb{N}^\ell$に対し, 特性根 $\lambda_\nu(x) + \alpha$ に対応する $t^\alpha u$ の境界値 $\varphi_{\nu,\alpha}(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)+\alpha}$ が定義できる。ここで次の補題が成立するので, uの特性根 $\lambda_\nu(x)$ に対応する境界値を $\varphi_{\nu,\alpha}(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)}$ と定義できる.

補題9 $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$とする. $\mathcal{M}$と, $\mathcal{M}$から上の様にして定義される$\mathcal{M}_\alpha$とが共に, (A), (B) を満たすと仮定する。この時, $\varphi_\nu(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)} = \varphi_{\nu,\alpha}(x)(dt)^{\otimes \lambda_\nu(x)}$ が成立する。

さて, 当然のことながら, 次の事実が成立することに注意しよう。

定理10. M_+での$\mathcal{M}$の解uが

$$u = f(t,x)\, t^{\lambda(x)}$$

(但し, $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_\ell(x))$, $f(t,x)$ は N の近傍で定義

された実解析函数で，$f(0,x) \neq 0$ を満たす）の形をしていれば，$s(x)$ は $\mathcal{M}$ の特性根である。条件 (A),(C) を仮定すれば（又は，任意の $\mathcal{M}_\alpha$ （$\alpha \in \mathbb{N}^l$）に対し，(A),(B) を仮定すれば），特性根 $s_\nu(x)$ に対応する u の境界値は

$$\begin{cases} s_\nu(x) = s(x) \text{ のとき} & f(0,x)\,(dt)^{\otimes s(x)}, \\ s_\nu(x) \neq s(x) \quad \text{〃} & 0, \end{cases}$$

となる。

文献

[1] 柏原正樹, Theory of differential equations with regular singularity and eigen-functions of Laplacian of symmetric spaces, 数理研講究録 227 (1975), 33-38.

[2] 柏原正樹, 木幡篤孝, 峰村勝弘, 岡本清郷, 大島利雄, 田中誠, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.

[3] 柏原正樹, 大島利雄, The boundary value problem for the systems of differential equations with regular singularity, to appear.

[4] 岡本清郷, 峰村勝弘, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録 227 (1975), 70-74.

[5] 大島利雄, Maximally degenerate な台を持つ擬微分方程

式について，数理研講究録 226 (1975), 29-38.

[6] ———，対称空間上の境界値問題について，1974年7月数理研で行なわれた研究集会"対称空間上の不変微分方程式"の報告集に掲載予定．

[7] 佐藤幹夫，河合隆裕，柏原正樹，Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, Berlin, 1973, pp. 265-529.

[8] 峰村勝弘，本講究録に載る論文．