

## 対称空間上の境界値問題

広大 理学部 岡本清郷

$\mathbb{R}^2$  の  $x$  軸上の一実点  $(x_0, 0)$  の近くに於いて

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

なる初期値問題を考える。このときよく知られているように *real analytic category* では常に解けるが、 $C^\infty$ -category では一般には解けない。という訳でこの問題を放棄してしまったのでは、代数学程式論でいえばアーベルの時代でストップということに対応する。やはりガロアにならうて、解けるための  $\varphi_0, \varphi_1$  の満たすべき条件その他の研究もすべきである。勿論上記の例についてはこれは完全に分っているがそれを一般に拡張した場合（これは拡張する方向

にもよるが)の研究は特に対称空間上の不変微分方程式については“micro-local analysis”という強力な武器の出現によって一大進歩を遂げた。

さて、上の例は Cayley変換によって

$X = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ ,  $\partial X = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$   
と表わすとき、

$$\Delta u = 0$$

$$\begin{cases} u|_{\partial X} = \varphi_0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{\partial X} = \varphi_1 \end{cases}$$

(組  $z = r e^{i\theta}$ )

という形になる。この初期値問題が解けるためには  $\varphi_0, \varphi_1$  が一般には或る種の関係を満たす必要があるという事実は、大域的解を考察するとき更に明確になる。即ち大雑把に言えば、 $X$ 全体上の解  $u$  はその境界値  $\varphi_0$  のみによって一意的に定まり  $X$  上の <sup>調和</sup> 関数全体と  $\partial X$  上の超関数全体とが 1対1に対応する(ディリクレ問題)。その際ノイマン問題を考えれば  $\varphi_1$  は  $\varphi_0$  によって一意に決定される事が分る。 $\partial X$  上の超関数と  $X$  上の調和関数との対応はポアソソ積分を与えられこのポアソソ積分を一般に拡張するためには上記の方程式

$$\Delta u = 0$$

モテ方程式

$$-(1-|z|^2)^2 \Delta u = \lambda u \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

の特別な場合 (つまり  $\lambda = 0$ ) と見做すのが自然であるとい  
うことは今迄何度も強調して来たがそれは微分作用素

$$P_\lambda = -(1-|z|^2)^2 \Delta - \lambda$$

が  $X$  の自己同型群により不変であり従ってその表現論は接用  
出来るからである。即ち上記の  $\varphi_0, u, \varphi_1$  の間の対応は  
群  $SL(2, \mathbb{R})$  の  $X, \partial X$  への自然な作用に関し, equi-  
variant であり従って対応  $\varphi_0 \mapsto \varphi_1$  は  $\partial X$  上で実現さ  
れる  $SL(2, \mathbb{R})$  の principal series (non-unitary)  
の表現の間の "intertwining operator" となる。こ  
の intertwining operator を  $A_\bullet$  とかくと,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{A}^{P_0}(X) & \rightarrow & \mathcal{B}(\partial X) \oplus \mathcal{B}(\partial X) & \rightarrow & \mathcal{B}(\partial X) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ & & u & \mapsto & (\varphi_0, \varphi_1) & \mapsto & A_\bullet \varphi_0 - \varphi_1 \end{array}$$

なる exact sequence が得られる。但し  $\mathcal{A}^{P_0}(X)$  は  $X$  上  
の調和関数の空間,  $\mathcal{B}(\partial X)$  は  $\partial X$  上の超関数の空間を表わす。

今,  $s^2 + 1 = \lambda$  を満たす複素数  $s$  を 1 つ固定し  $s$  に対応  
する spherical principal series から  $-s$  に対応する  
spherical principal series の表現への inter-  
twining operator を  $A_s$  とかくと,  $is \notin \mathbb{Z}$  のとき

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^{P_\lambda}(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X) \oplus \mathcal{B}(\partial X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & u & \longmapsto & (\varphi_s, \varphi_{-s}) & \longmapsto & A_s \varphi_s - \varphi_{-s}
 \end{array}$$

なる exact sequence が得られる。但し  $u \leftrightarrow \varphi_s$ ,  
 $u \leftrightarrow \varphi_{-s}$  は夫々 parameter  $s, -s$  に対するポアソニ  
 ン種分を与えられる。 $(\mathcal{A}^{P_\lambda}(X))$  は  $X$  上での  $P_\lambda u = 0$  の解全体

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(\partial X) \longrightarrow \mathcal{A}^{P_\lambda}(X) \longrightarrow 0$$

なる exact sequence がポアソニン種分により与えら  
 れること、およびその射影空間への拡張については、「3.2.7  
 1の射影空間上のディリクレ問題」(峰村-田中-国幸)  
 の稿を参照せよ。この out の証明にはその逆写像即ち  
 $P_\lambda u = 0$  の解  $u$  に対しその境界値を対応させる写像を考  
 えることが必要になる。

さて、 $\partial X$  の任意の点  $x$  とその  $\mathbb{C}$  上の近傍  $U$  に対し  
 $U \cap X$  上での  $P_\lambda u = 0$  の解  $u$  の全体を  $\mathcal{A}^{P_\lambda}(U \cap X)$

とおき、
$$\mathcal{A}^{P_\lambda} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{A}^{P_\lambda}(U \cap X)$$

により  $\partial X$  上の sheaf  $\mathcal{A}^{P_\lambda}$  を定義する。このとき、境界  
 値を対応させる写像

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{P_\lambda} \longrightarrow \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}$$

が定義される。2の写像の定義および一般の対称空間への拡張については、「対称空間における境界値問題について」(大島)の稿を参照されたい。最初に述べた問題は「2の写像の像を調べよ」という形で定式化される。2つの境界値の間の関係は *real analytic category* では全然存在しないということからあるように modulo  $\mathbb{A}$  で与えられ、或る invertible micro-local operator  $A$  が存在して

$$0 \rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{B} \oplus \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/\mathbb{A} \rightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto A\varphi_1 - \varphi_2$$

なる exact sequence が成立することから昨年佐藤一河井-相原氏により、証明されたが2の  $A$  は上記の  $A_S$  を超局所化することにより得られる。2の2ことから一般に、  
 “境界値連の満たすべき必要十分条件は *intertwining operators* により与えられる”と予想される。実際、 $SO_0(m, 1)/SO(m)$  に対しては、相原氏によりこれが正しいことが証明されている。 $SU(m, 1)/U(m)$  に対しては *intertwining operator* が *micro-local operator* であることが分かっているが上の予想は未解決である。 $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$ ,  $Sp(2, \mathbb{R})/U(2)$  等 rank が高くなると *intertwining operator* は

micro-local operator にならないので, 上記の  
佐藤-河村-梅原 氏による定式化は, 修正を要するが,  
どのように修正すればか今のところ分っていない。

次に大域的問題に対する一般化について述べる。

$G$  を非コンパクトかつ連結な実半単純リー群とし,  $K$  を  
その極大コンパクト部分群の一つとする。  $G = KAN$  を  
素分解の一つとし,  $A, N$  のリー環をそれぞれ  $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}$  とする。

$\rho(H) = \frac{1}{2} \text{Tr ad}(H)|_{\mathfrak{n}}$  ( $H \in \mathfrak{a}$ ) により  $\rho \in \mathfrak{a}^*$   
を定義し,  $\mathfrak{a}$  の任意の元  $\lambda$  に対し

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{(i\lambda - \rho)(H(gk))} dk$$

とおく。但し  $G$  の元  $x$  に対し  $\exp H(x)$  により  $x$  の  $A$   
成分を表わし,  $dk$  は  $K$  の正規化されたハール測度を  
表わす。  $X$  上の不変微分作用素の可換 algebra を  $D(X)$   
とかくとき, 或る  $\chi_\lambda \in \text{Hom}(D(X), \mathbb{C})$  (alg. homo.)  
が存在して

$$D\phi_\lambda = \chi_\lambda(D)\phi_\lambda \quad (D \in D(X))$$

が成立する。  $\chi_\lambda(D)$  は  $\mathfrak{a}$  について  $\mathfrak{a}^*$  上の多項式であ  
り,  $\chi_\lambda = \chi_\mu$  ( $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ ) が成立するための必要  
十分条件は  $\lambda = w\mu$  を満たす Weyl 群  $W$  の元  $w$  が  
存在することである。  $A$  の  $K$  に対する中心化群を  $M$  とし

$P = MAN$  とおくと  $P$  は  $G$  の極小パラボリック部分群である。  $P$  の指標  $P \ni man \mapsto e^{(\lambda + \rho)(\log a)} \in \mathbb{C}^*$  に随伴した  $G/P$  上の line bundle を  $L_\lambda$  とかく。

$L_\lambda$  の hyperfunction sections 全体を  $\mathcal{B}(L_\lambda)$  と表し  $\mathcal{B}(L_\lambda)$  の元  $\varphi$  に対し

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(x) = \int_K \varphi(xk) dk \quad (x \in G)$$

によりポアソソニ種  $\mathcal{P}_\lambda$  を定義すると、  $\mathcal{P}_\lambda$  は  $\mathcal{B}(L_\lambda)$  の元を

$$\mathcal{A}(G/k)^{\mathcal{M}_\lambda} = \{ f \in \mathcal{A}(G/k) ; f \text{ は } \mathcal{M}_\lambda \text{ の解} \}$$

$$\left( \text{但し } \mathcal{M}_\lambda ; \quad Du = \chi_\lambda(D)u \quad (D \in \mathcal{D}(X)) \right)$$

のえに写すことが証明出来る。

このとき次のことが予想される。以下  $\lambda$  は整形式でないとは。

$$\text{(予想 A)} \quad 0 \rightarrow \mathcal{B}(L_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} \mathcal{A}(G/k)^{\mathcal{M}_\lambda} \rightarrow 0$$

は exact.

$$\text{(予想 B)} \quad 0 \rightarrow \mathcal{A}(G/k)^{\mathcal{M}_\lambda} \xrightarrow{\cup} \bigoplus_{w \in W} \mathcal{B}(L_{w\lambda}) \rightarrow \bigoplus_{1 \neq w \in W} \mathcal{B}(L_{w\lambda}) \rightarrow 0$$

は exact.  $u \mapsto \sum_{w \in W} \varphi_w \mapsto \sum_{1 \neq w \in W} (A_w \varphi - \varphi_w)$

$$\text{但し } \mathcal{P}_{w\lambda} \varphi_w = u \text{ かつ } A_w \text{ は } L_\lambda \text{ から } L_{w\lambda}$$

$\lambda$  の 0 でない intertwining operator.

(予想 B) は (予想 A) および intertwining operator の一次元性から出る。又 (予想 A) は次の (予想 C) から出る。

(予想 C)  $A(G/k)^{int}$  の元  $u$  に対してその境界値  $\mathcal{B}(L_\lambda) \ni \gamma_\lambda(u)$  を対応させる写像  $\gamma_\lambda$  が存在して次を満たす。

1)  $\gamma_\lambda$  は  $G$ -equivariant.

2)  $\gamma_\lambda \circ P_\lambda = id.$

3)  $\gamma_\lambda \circ \int_K f(kx) dk = \int_K (\gamma_\lambda f)(kx) dk.$

(予想 C) の仮定の下に (予想 A) が成立することを証明しよう。  $P_\lambda$  が onto であることをいうには 2) から  $\gamma_\lambda$  が 1対1 であることを言えばよい。  $\gamma_\lambda(f) = 0$  を満たす  $0 \neq f \in A(G/k)^{int}$  が存在しないことを仮定して矛盾があることをいう。  $\gamma_\lambda$  は  $G$ -equivariant だから、  $f(e) = 1$  としてよい。

$$F(x) = \int_K f(kx) dk$$

とおくと、  $F(e) = \int_K f(k) dk = f(e) = 1.$

このとき  $F$  は global spherical function になり  $F(x) = \varphi_\lambda(x)$  ( $x \in G$ ) である。このとき、

$\delta$



$$(\gamma_\lambda \varphi_\lambda)(\alpha) = (\gamma_\lambda P)(\alpha) = \int_K (\gamma_\lambda f)(hx) dk \equiv 0$$

更に,  $\psi_\lambda(ham) = e^{(\lambda-\rho)(\log a)}$  ( $h \in K, a \in A, m \in N$ )  
 とおくと,  $\rho_\lambda \psi_\lambda = \varphi_\lambda$  であるから,

$$0 = \gamma_\lambda \varphi_\lambda = \gamma_\lambda \rho_\lambda \psi_\lambda = \psi_\lambda \quad (\text{矛盾})$$

故に (予想 A) は (予想 C) に帰着された.  $\mathcal{M}_\lambda$  は  
 確定特異点型であることが証明され, 従って大島の定理を  
 適用出来る. 実際  $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$  に対しては, 大島  
 氏により, 上の (予想 C) が成り立つことが証明された.

$\lambda$  が integral のときは  $\mathcal{A}(G/K)^{\mathcal{M}_\lambda}$  は一般には  
 不変部分空間 (勿論 non-trivial な) を持つ. 例えは,  
 $\lambda = \rho$  であつて  $G/K$  が hermitian のときは  $G/K$   
 $L^p$  の正則関数の全体は不変部分空間であり, その  $L^p$ -可  
 積分関数との共通部分を考えることによりハーディー-ワラス  
 の拡張が得られる. 更に, vector bundle の場合に  
 のような考察をすることによって discrete series 等  
 の具体的な定理と principal series の sub-quotient  
 との関連が明らかになり, これらの結果<sup>から</sup> 逆に vector  
 bundle に値を持つ関数の不変微分方程式系の解の構造  
 が調べられる.