

正規分布関数の計算

電総研

戸田英雄

都立農芸高

小野令美

まえおき

$$(1) \quad Q(u) = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

の数値計算には、古くから多くの人々によって公式が考えられている。(→[1]) 最近、有名な Hastings [2] の公式の改良を、竹内啓氏(東大経)のコメントに従って行ない、次の近似式を報告した。

$$(2) \quad Q(u) \doteq \frac{1}{2} \exp\{c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3\} \quad 0 \leq u \leq 5$$

$$c_1 = -0.7587081$$

$$c_2 = -0.3762161$$

$$c_3 = -0.944874 \cdot 10^{-2}$$

$$E_R(u) = \frac{\frac{1}{2} \exp\{c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3\} - Q(u)}{Q(u)}$$

$$|E_R(u)| \leq 0.822 \times 10^{-2} \\ 0 \leq u \leq 5$$

この報告の討論で、森口繁一氏（東大工）から次の宿題が出された：

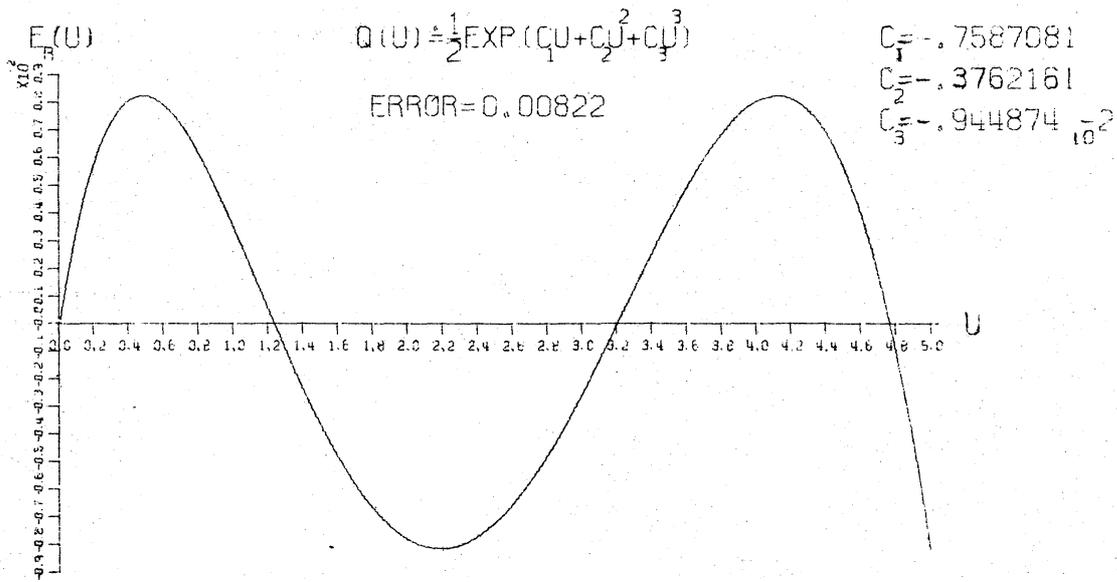
$u \rightarrow \infty$ で $Q(u)$ の漸近展開式に近づき、

$u \rightarrow 0$ で $Q(u) = 1/2$

となる条件で、 $Q(u)$ の $[0, \infty)$ の区間における最良近似式が
できないか？

これに対する試みの報告が A) である。

(1) 式で与えられる正規分布上側確率 $Q(u)$ の表は $u=0.1$
(0.1) 10.0 で有効数字 35 桁の表が作成されている。(→[1]のP.3)
FORTRAN による可変多倍長サブルーチンを用いて、有効数字
100 桁の表を作成した。そのときの問題点と表の報告が
B) である。



(2) 式の相対誤差曲線

A) 正規分布上側確率 $Q(u) = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

を区間 $[0, \infty)$ で最良近似すること。

1. $Q(u)$ の近似式 $\hat{Q}(u)$ の作成方針

$$(A1) \quad \hat{Q}(u) = [Q(u) \text{ の漸近展開}] \cdot \exp \left\{ \frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2} \right\}$$

とおく。ここでもし、定数 $C_3 \neq 0$ ならば、

$u \rightarrow \infty$ で $\hat{Q}(u) \sim [Q(u) \text{ の漸近展開}]$ となる。

$$(A2) \quad \hat{Q}(u) = \left[\phi(u) \cdot \frac{u^2 + 3u + 2}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3} \right] \cdot \exp \left\{ \frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2} \right\}$$

とおく。ここで

$$(A3) \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

$$(A4) \quad \frac{u^2 + 3u + 2}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + \frac{2}{u+3}$$

である。

$$(A5) \quad Q(u) \simeq \phi(u) \cdot \left\{ \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + \frac{2}{u} + \frac{3}{u} + \dots + \frac{k}{u} + \dots \right\} \quad u > 0$$

は Laplace の展開式とも呼ばれる。これを三項と半で打ち切ったのが (A4) 式である。(A5) 式は、よく知られている $Q(u)$ の漸近展開

$$(A6) \quad Q(u) \simeq \frac{1}{u} \cdot \phi(u) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{u^2} + \frac{1 \cdot 3}{u^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{u^6} + \dots \right\}$$

を連分数に変換したものである。

$$(A7) \quad Q(0) = \frac{1}{2} = \hat{Q}(0) = \phi(0) \cdot \frac{2}{3} \cdot e^{C_0}$$

を満たすように C_0 を決めると、

$$(A8) \quad C_0 = \log \left(\frac{3\sqrt{2\pi}}{4} \right) \doteq 0.63125646$$

となる。

2. 区間 $[0, C]$ における $\hat{Q}(u)$ の最良化

関数 $\log \left\{ \frac{Q(u)}{\phi(u)} \cdot \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2 + 3u + 2} \right\}$ を $\frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2}$ で近似する。

C を適当に与えて、区間 $[0, C]$ で近似式を作り、その絶対誤差 $E(u)$ を \min - \max 化する。すなわち、

$$(A9) \quad E(u; C_0, C_1, C_2, C_3) \equiv E(u)$$

$$\doteq \frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2} - \log \left\{ \frac{Q(u)}{\phi(u)} \cdot \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2 + 3u + 2} \right\}$$

$$(A10) \quad E_R(u) = (\hat{Q}(u) - Q(u)) / Q(u)$$

$$(A11) \quad 1 + E_R(u) = \phi(u) \cdot \frac{u^2 + 3u + 2}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3} \cdot \exp \left\{ \frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2} \right\} / Q(u)$$

両辺の対数をとると、

$$(A12) \quad \log(1 + E_R(u)) = \frac{C_0 + C_1 u}{1 + C_2 u + C_3 u^2} - \log \left\{ \frac{Q(u)}{\phi(u)} \cdot \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2 + 3u + 2} \right\} = E(u)$$

となるので、近似的に

$$(A13) \quad E(u) = E_R(u) - \frac{1}{2} (E_R(u))^2 + \dots$$

となる。

3. 区間 $[0, \infty)$ における $\hat{Q}(u)$ の最良化

ある C を適当に決めて、

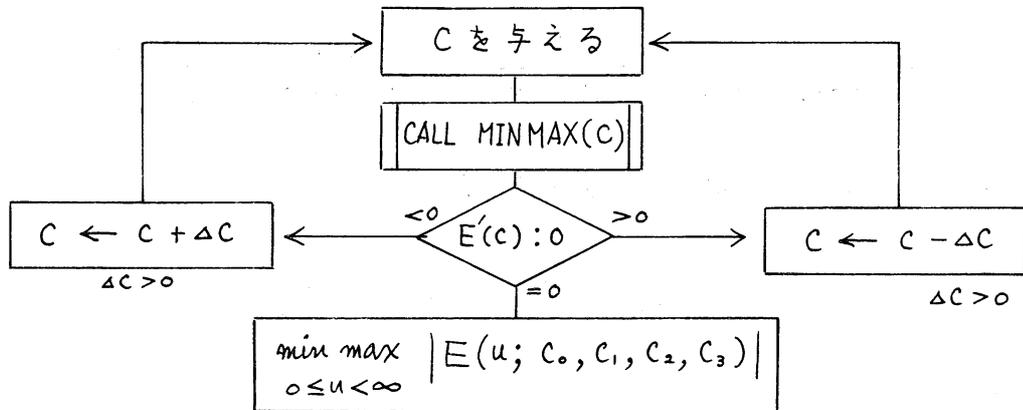
$$(A14) \quad \max_{0 \leq u \leq C} |E(u; C_0, C_1, C_2, C_3)|$$

を \min にするサブルーチン $\text{MINMAX}(C)$ を作り、次のような流れ図 A-1 により、

$$(A15) \quad \left. \frac{dE(u; c_0, c_1, c_2, c_3)}{du} \right]_{u=c} = 0$$

となる c を求めれば、区間 $[0, \infty)$ で $E(u; c_0, c_1, c_2, c_3)$ が $\min \max$ 化されたことになる。(→ 図 A-2, 図 A-3)

流れ図 A-1



4. $u \rightarrow \infty$ で $E(u)$ の様子

$$(A16) \quad \frac{Q(u)}{\phi(u)} \cdot \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2 + 3u + 2} \sim 1 + \frac{6}{u^5} - \dots$$

$$(A17) \quad E(u) \sim \frac{c_0/u^2 + c_1/u}{1/u^2 + c_2/u + c_3} - \log \left(1 + \frac{6}{u^5} - \dots \right)$$

$$\doteq \left(\frac{c_1}{c_3} \right) \frac{1}{u} + \frac{1}{c_3} \left(c_0 - \frac{c_1 c_2}{c_3} \right) \frac{1}{u^2} + \dots$$

$$\doteq -0.063 \frac{1}{u} + 0.287 \frac{1}{u^2}$$

☒ A-2

MAXER = 0.0038703
C0 = 0.63125646
C1 = -0.16240382
C2 = 1.6259307
C3 = 2.5615101

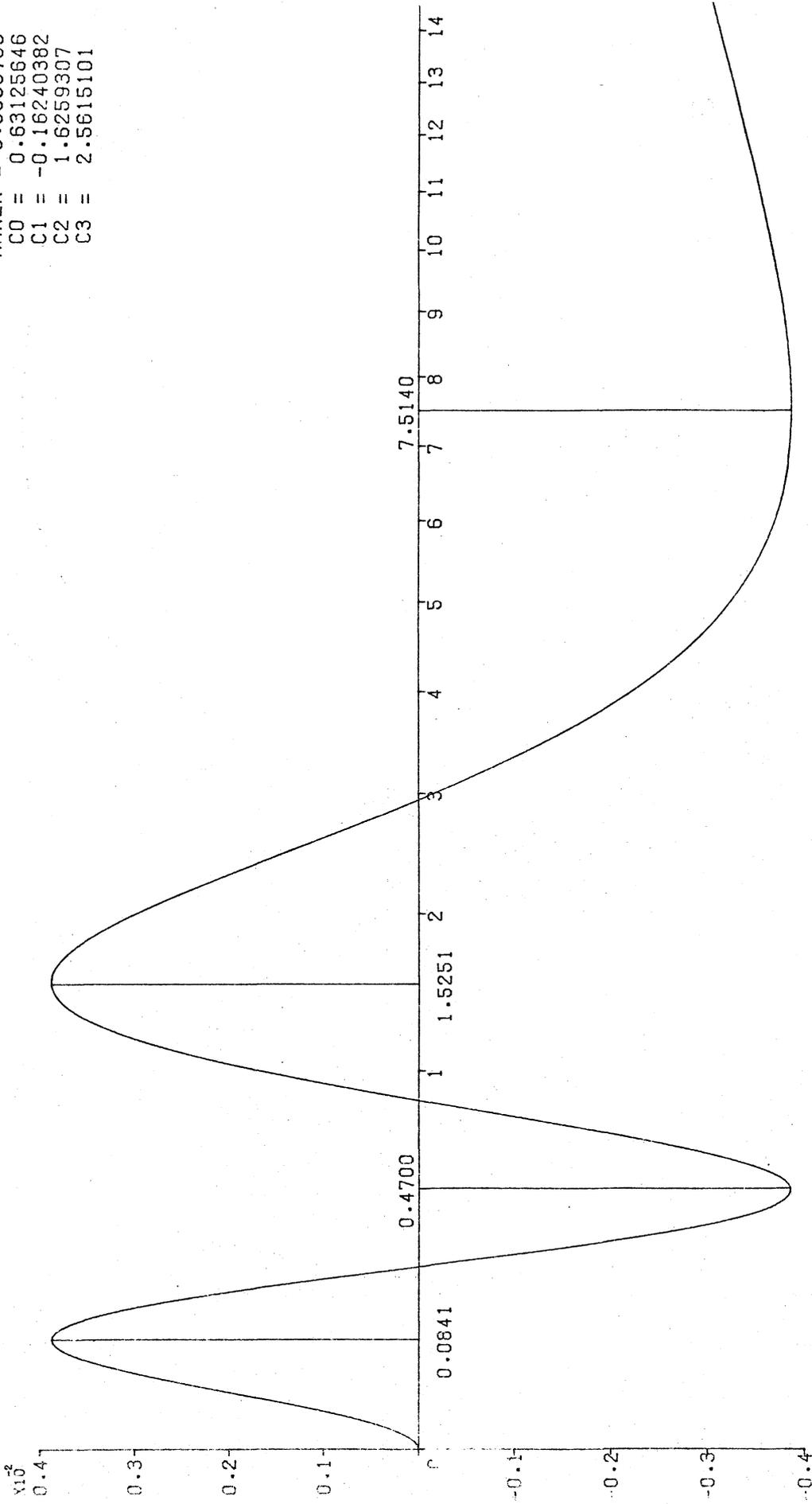
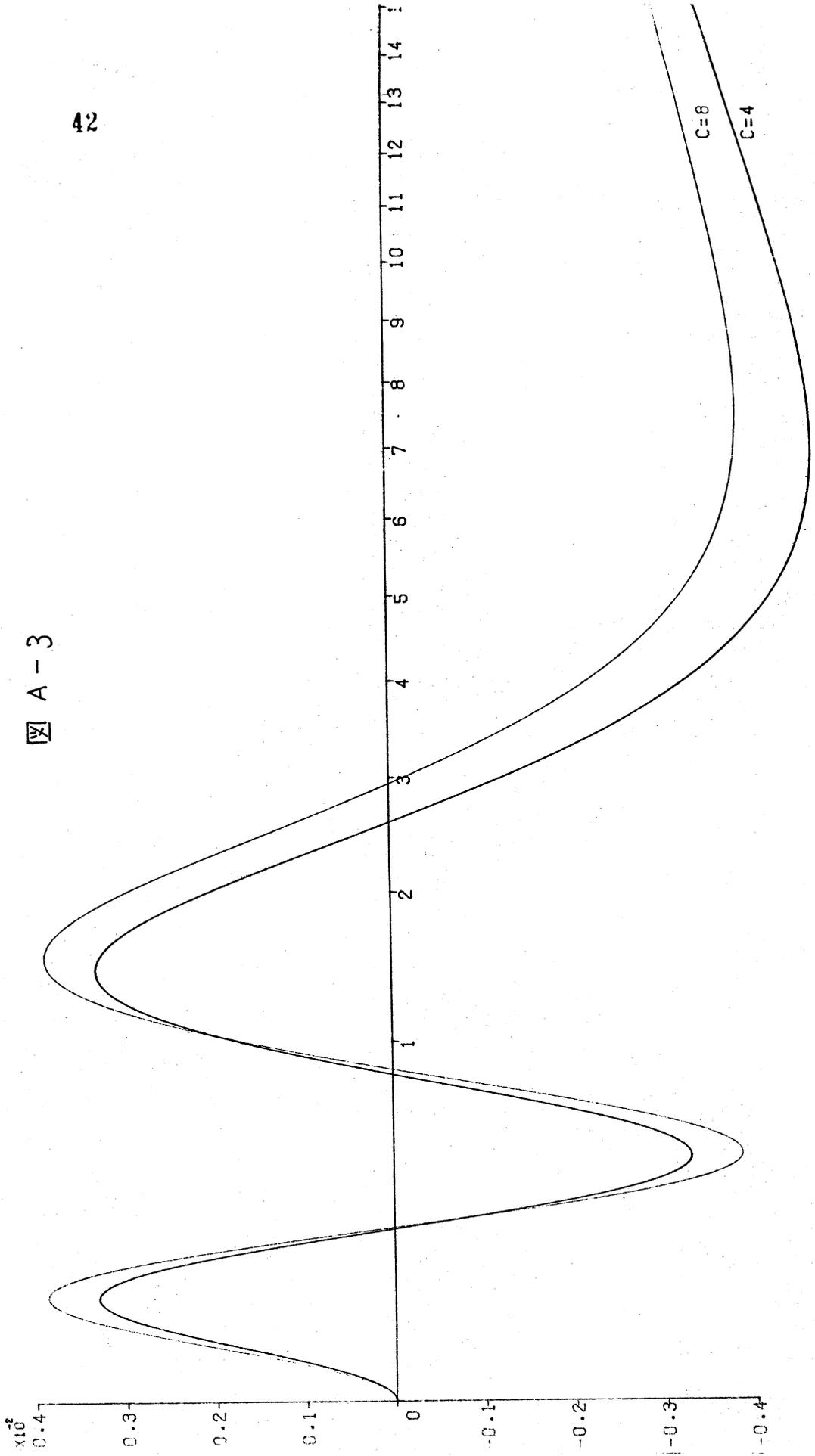


图 A-3



B) 正規分布上側確率 100 桁の表

$$(B1) \quad Q(u) = \frac{1}{2} - \varphi(u) \left\{ \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \right\} \quad \text{Shentonの展開式}$$

u の小さいところ (B1) 式 大きいところ (A5) 式を用いた。

1. 問題点

- i) 桁をどこまでとるか。(桁数と u とによって変わる)
- ii) (B1) 式では桁落ちするのでどれだけ桁をのばすか。(u によって変わる)
- iii) (B1) 式と (A5) 式を使い分ける u の値をいくらにするか。(桁数によって変わる)

以上の3点について次のようにした。

i) 連分数 $b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots$ の近似分数として

$$(B2) \quad \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}, \quad Q_0 = 1, Q_1 = b_1, Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

を用い $\left| \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} / \frac{P_n}{Q_n} \right| < 10^{-N}$ となったらやめる。(N : 演算桁数)

ii) (B1) 式で誤差の入る桁は図 B-1 のようになるので、

$$(B3) \quad f(u) = (u-4)(u+9)/3, \quad \text{但 } u > 4$$

で近似して $\left[\frac{f(u)+8}{8} \right] \times 8$ 桁増す。($u > 4$ のとき)

iii) 桁数 N を得るのに必要な項数は図 B-2 のようになるが、

(B1) 式は桁数を増すので、計算回数の増加による修正をする

と図 B-3 のようになる。各の N に対し交点の u の値を

$$(B4) \quad g(N) = 2.35 + \sqrt{6.3 \times \frac{N}{16} - 3.5775}$$

で近似し、(B1), (A5)式を使いわける u の値とする。(→図B-4)

((B4)式は一松先生のコメントにより直した。)

2. 計算法

以上からこのサブルーチンで求められる最大桁のときの

(B4)式の値を UB とすると、次のように用いる式を決める。

$u \leq 4$ のとき (B1) 式

$u \geq UB$ のとき (A5) 式

$4 < u < UB$ のとき $u \geq g(N)$ ならば (A5) 式

$u < g(N)$ ならば (B3)式で桁を増し(B1)式

3. 計算結果とチェック

$u=0.1(0.1)20.0$ の表を示す。(→表B1~4) CPU Timeは FACOM 230-75 で 685.8秒かかった。チェックは $u=5.0 \sim 8.8$ は (B1), (A5)式の両方で計算し、 $u=0.1 \sim 4.9$ は (B1)式、 $u=8.9 \sim 20.0$ は (A5)式を必要な項数だけとり、連分数を後から計算した。

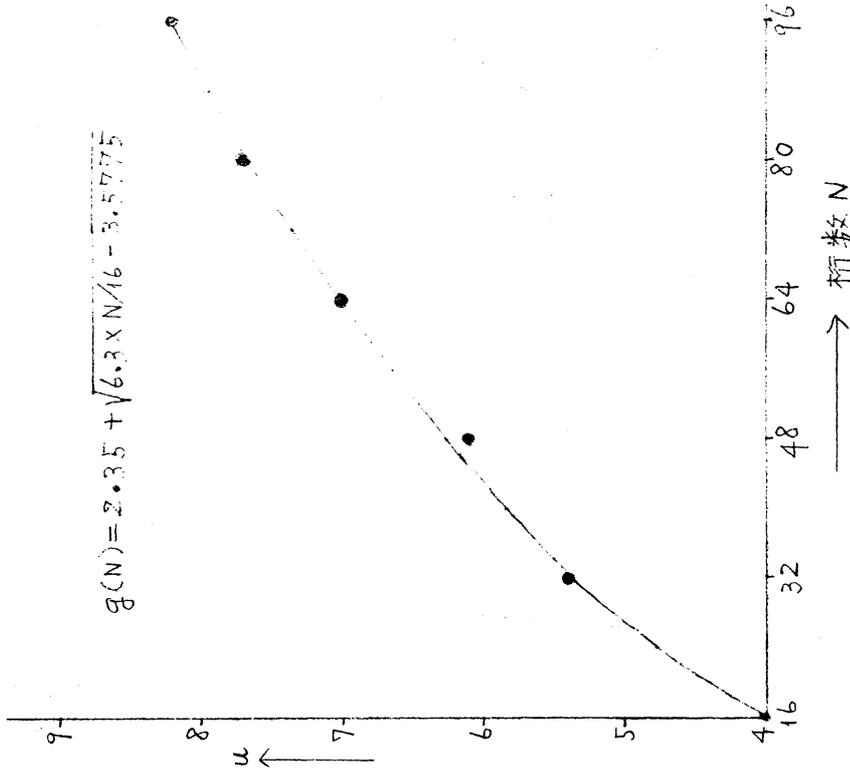
参 考 文 献

- [1] 統計数値表 JSA-1972, 日本規格協会
- [2] G.Hastings, JR. (1955): Approximations for digital computers, Princeton Univ. Press.
- [3] A.N.Khovanskii translated by Peter Wynn(1963): The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory, Noordhoff.

図B-4

(B1), (A5)式を用いたときの u の値

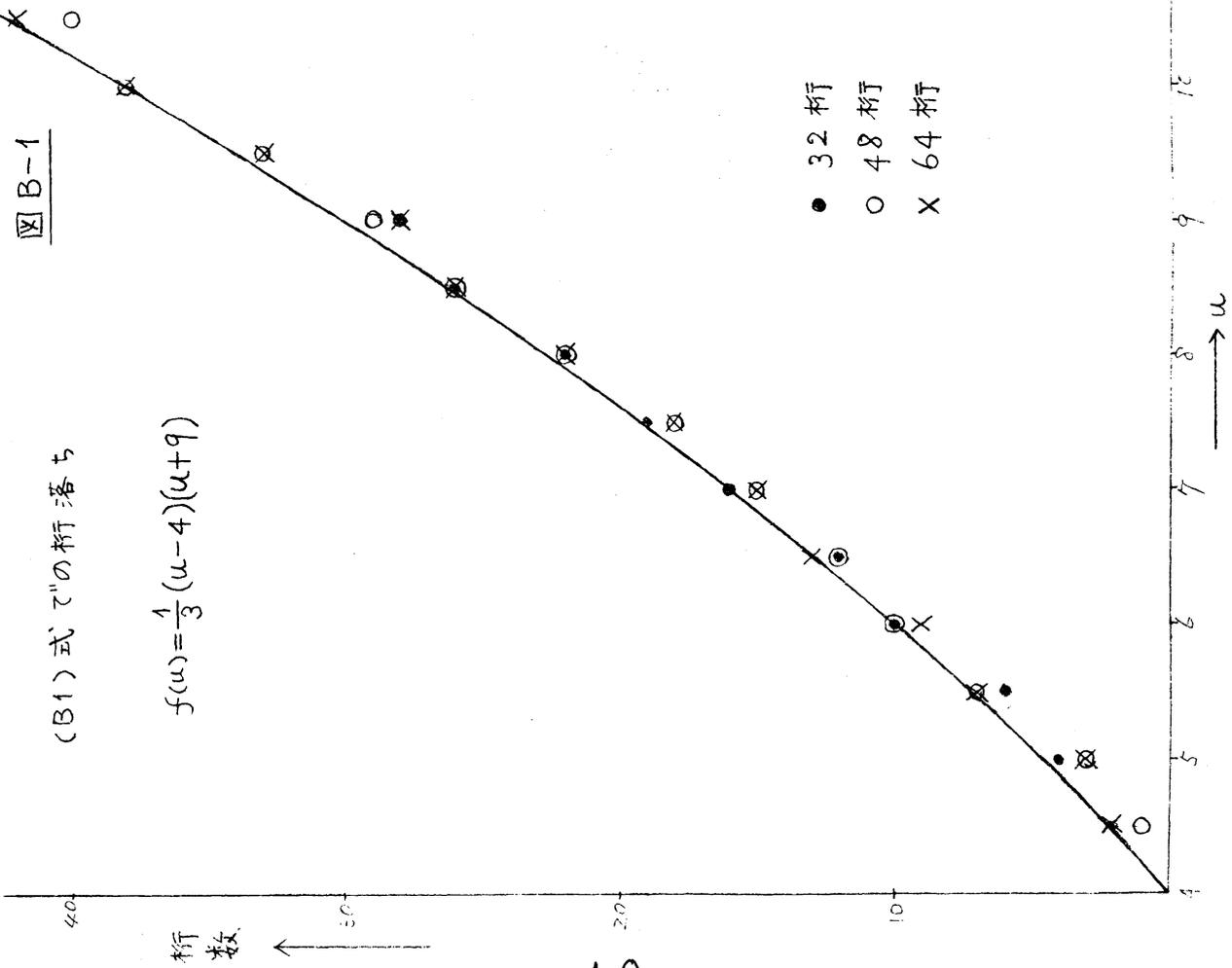
$$g(N) = 2.35 + \sqrt{6.3 \times N / 16} = 3.5775$$



図B-1

(B1)式での析落ち

$$f(u) = \frac{1}{3}(u-4)(u+9)$$



- 32 析
- 48 析
- × 64 析

图 B-3

46

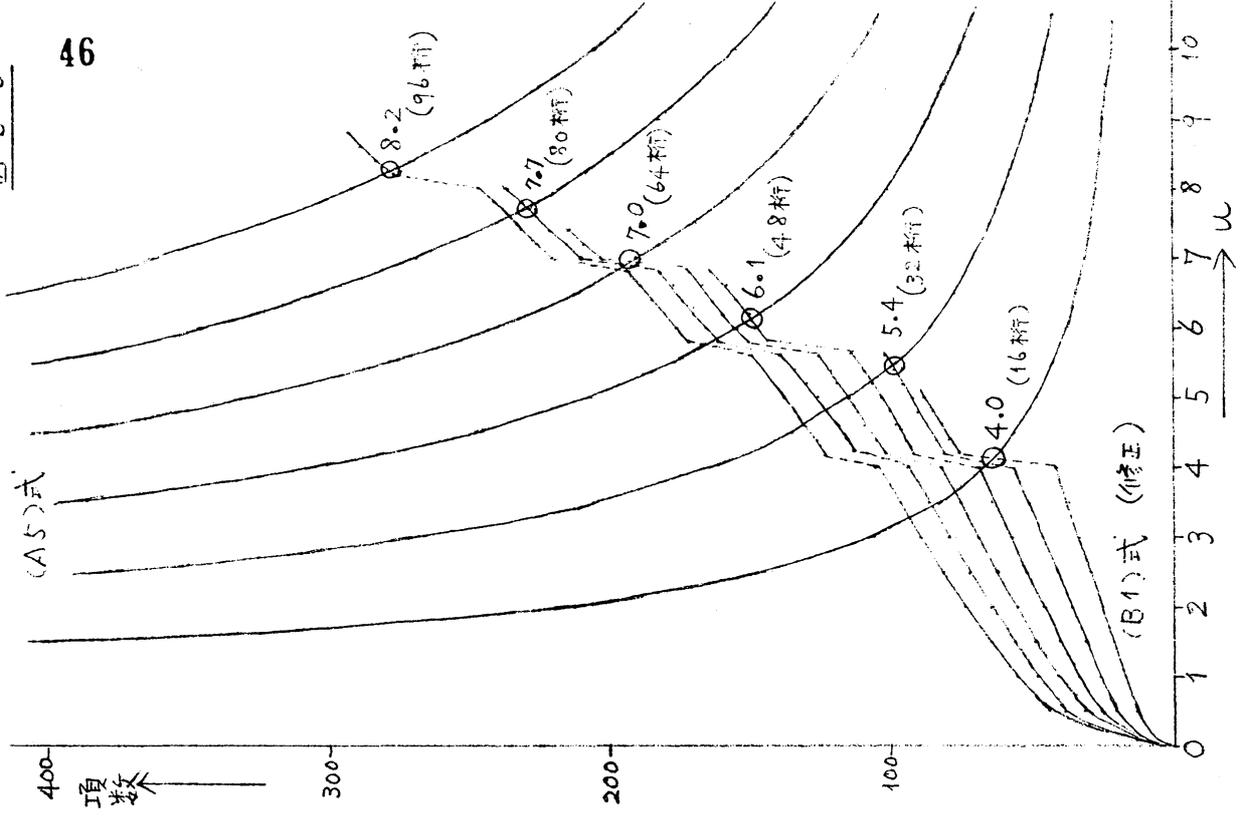
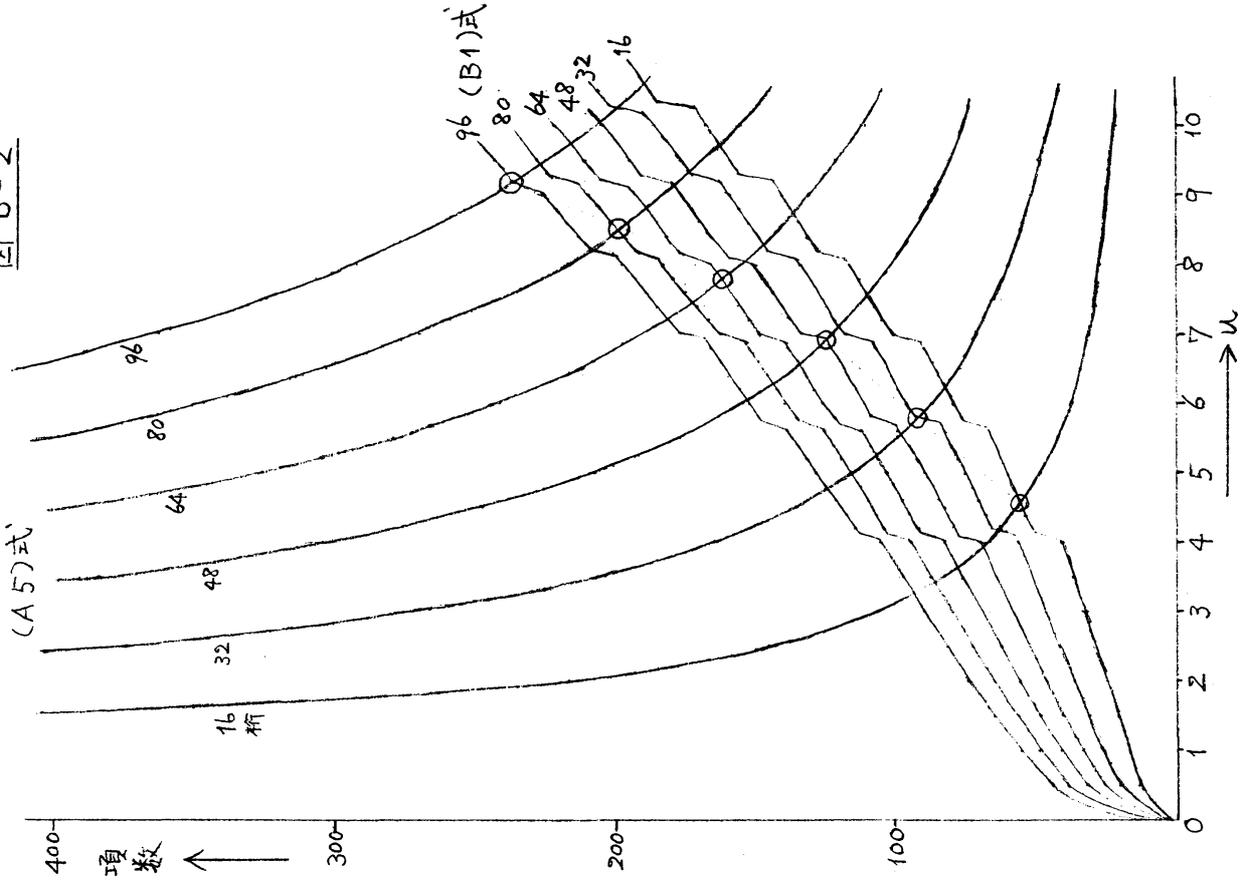


图 B-2



0.1	0.4601721627	2297101833	4595361750	8179169859	37711631022	8967331517	9578516759	4760233348	0087891879	9872361928	E 0
0.2	0.4207402905	6089697695	7362047043	6993655783	6558681384	6117459006	2975665394	5341843320	2421201931	5527463937	E 0
0.3	0.3820885778	1104738269	3471036878	5823519487	5853261877	1922351111	3523411909	7568634356	4725698716	5199496077	E 0
0.4	0.3445782583	8967583326	31193223978	0179069992	5227430919	3701813177	6108255297	6464038671	9540413933	2445104985	E 0
0.5	0.3085375387	2598685636	2295389391	6622601163	9782448452	2063179223	8573208442	4059372045	5974758939	9537550681	E 0
0.6	0.2742553177	5007358029	4362785069	7691963016	5198189510	0262826502	6098483573	3436599908	8795353316	5809307981	E 0
0.7	0.2419636322	2307301474	9330428172	5075147331	653417536	286012738	3823949381	5184693368	6076564140	8233215668	E 0
0.8	0.2118539985	8339668557	5531771771	4958300878	593666342	7038192394	9123372551	9828349091	3269320381	6731987461	E 0
0.9	0.1840601253	4675948855	4197800881	4384128939	5192520906	0783652572	509825207	2201298506	1485429233	7044796433	E 0
1.0	0.1586552539	3145705141	4767450367	9620779220	8703327339	5609012603	54991570085	5801279517	04991515081	9493606725	E 0
1.1	0.1356660609	4638267517	3057038026	3469608686	9014206006	7398157599	0281696688	7390221098	3093666475	4457568699	E 0
1.2	0.1150696702	2170826602	2220406956	6351486754	4703533750	4541551263	3030900601	1524965021	2401062629	8514719261	E 0
1.3	0.9680048458	5610333152	0098243022	2366273010	5423064771	6881069932	5718244059	5368441414	0198850958	1641786584	E -1
1.4	0.8075665923	3771046596	1886306347	7058975916	0795936222	3650573988	8839240265	2533587223	4624692827	5479231764	E -1
1.5	0.6680720126	8458066004	4940409798	8607952289	51856612221	4424062877	3433288886	7814127660	9747350851	6393712723	E -1
1.6	0.5479929169	9557993960	4739665741	7868243445	4409644664	3736215162	4771012309	5041085938	6349848995	1315732577	E -1
1.7	0.4456546275	8543039487	4230047079	7200660607	6170423421	6533396059	9083422099	4774748039	3909153397	6690942652	E -1
1.8	0.3593031911	2925803900	3258614422	2234841146	8857955352	21420009950	5827902771	5932403468	1196351296	5784516200	E -1
1.9	0.2871659981	6001799401	3369641645	2926431947	8176200381	8529296521	7051641653	3017683529	4425486259	5799153307	E -1
2.0	0.2275031394	8179207200	2826371655	3343747177	6223701678	4339836660	0013047629	0352775748	3482691520	7578961492	E -1
2.1	0.1786442056	24165551783	92424611983	5464521363	2270018759	6767966000	2558313252	1808809270	8240767459	5970952339	E -1
2.2	0.1390344751	3498610614	7538768922	3735461961	6751834945	6900500669	0347552642	4249306098	2096777042	3116944296	E -1
2.3	0.1072411002	1675805392	3548386226	1454154997	2815930193	6725782795	7101364066	1448473636	0238720546	E -1	
2.4	0.8197535924	5961294443	8694022106	9229939629	2575683997	4592220194	7086970401	1300010800	0061160785	1235587314	E -2
2.5	0.6209665325	7761351669	7810457419	2221427897	7469230927	6826656285	4783302936	4077524963	2488341223	1994075008	E -2
2.6	0.46611188023	1167502509	9340922905	8716045861	3992158151	3422704487	0837451340	4529648033	3623762697	3750150004	E -2
2.7	0.3466973803	0406684959	4182687988	3956495702	3162203689	6796240065	8187956370	0393923637	2235807630	3373500569	E -2
2.8	0.2555130330	4279328015	3136679234	8626473170	2304628193	5209540581	3251955021	9802038388	4572538941	0420121563	E -2
2.9	0.1865813300	3840579303	1028486503	5933203564	5034211701	0946667289	3001682344	0053168066	110600957	1392425503	E -2
3.0	0.1349898031	6300945266	5181476759	4977377629	3681583806	4936422198	53558505720	7645721002	6803856126	6004217053	E -2
3.1	0.9676032132	1835689211	5671924507	3408730964	7125484086	2085659076	3556777864	0854625818	5462533573	2523523078	E -3
3.2	0.6871379379	1584846511	7763589130	1391748369	2325257063	9319337596	2959754468	5939025741	9287631819	9900564172	E -3
3.3	0.4834214223	837720111	0109129627	2756493086	6361857731	1353705816	4844498376	4484913958	3062299190	5424770130	E -3
3.4	0.3369292656	7688093340	9763544095	1950821136	5210756240	8317359394	1484048391	9301381093	4516886013	5222783979	E -3
3.5	0.2326280790	3952503634	9925886727	9847735487	4933588904	1235769892	0018045125	2146302503	9236040328	4476049297	E -3
3.6	0.1591085901	5753387966	5097095878	5225539955	9037412097	8121297689	2470957488	2717647008	8042551688	8131369323	E -3
3.7	0.1077997334	7738833693	7469432870	4530513739	4210892584	3283342593	9792713227	3947903892	9146935423	5300992888	E -3
3.8	0.7234804392	5119973993	4125727908	6502956251	4475362779	2389307216	3463359818	7767561185	2551825764	5223402929	E -4
3.9	0.4809634401	7602171446	7075231275	2902824257	0797221151	8981540636	4890045598	2704899310	0511396692	2956986162	E -4
4.0	0.3167124183	3119921253	7707567221	5129844383	3375480276	5085493317	2207858516	9125898302	3859139676	7140790810	E -4
4.1	0.2065706691	2546738795	2544564698	6605551051	6166404521	1370464055	14757252665	8938328899	3547438469	1026090637	E -4
4.2	0.1334574901	5906338333	0921177856	2730725071	7739167976	4435207208	6788051355	3093424456	8658020920	2850260308	E -4
4.3	0.8539905470	9418041953	5425049120	4356256511	6216838982	4652675514	4965981279	7274787464	7756660276	0849043669	E -5
4.4	0.5412533907	7038598419	2097197439	8115526383	7825248403	4170850805	6910538868	9983623207	4911872529	4113917116	E -5
4.5	0.3397673124	7300604016	8744919087	1523512104	7650868486	4833655359	5604469994	1241474778	9329957229	2429534583	E -5
4.6	0.2112454702	2008497681	24327356924	3754052483	7028339678	5200282250	2109724224	7289242716	44338166321	2020336158	E -5
4.7	0.1300807453	9172820596	0192696117	1205343031	4687295623	2394035664	4684790424	4753006947	5484465493	4567956077	E -5
4.8	0.7933281519	7559461614	7038601857	0726463889	5311930429	0940931097	761177723	8602438003	5802377507	2365907496	E -6
4.9	0.4791832765	9031985329	5093494174	2043363383	6312191943	8202758005	0293715309	0276028933	4783552149	1108740432	E -6
5.0	0.2866515718	7919391167	3752352674	6453538544	2301361188	95173085492	7989345787	6992220399	33636853088	5165572741	E -6

5.1	0.1698267407	1479882739	3792528430	9133424881	4484727560	6128572512	4788729506	2821198577	4148470486	2736754294	E-6
5.2	0.9964426316	9334812698	4162867807	0553330890	2093229267	9852148171	6232958516	3178156035	7820388531	9453898040	E-7
5.3	0.5790134039	9645884827	0541491848	1456275011	6577489826	4730804920	3279802108	1359133526	4871582269	1983079075	E-7
5.4	0.3320448848	5428572847	7561692883	7099375459	2351850227	8790478233	9456278076	8286917084	6657418083	6913555960	E-7
5.5	0.1898966246	588719363	8512740335	8018631635	7489119296	7938525675	94657880158	2637080834	1111379478	5005802370	E-7
5.6	0.1071759025	8310907354	9608960828	1702225940	1291555389	49112138663	1934430465	0495201632	4248914580	5405502008	E-7
5.7	0.5990371401	0635344298	3394641785	0679728931	9073717162	6708119869	4163240369	9387084193	3070213859	909093327	E-8
5.8	0.3313745978	3261613380	2670107475	5404664981	3545522607	4830195229	4924422177	2821632071	1284180353	553706030	E-8
5.9	0.1817507863	0994323713	6193456009	3866919134	3223604734	5830652138	6602205442	3778407957	0656970287	1664816192	E-8
6.0	0.9865876450	3769814070	0864132398	0420186897	9124997902	8722477015	2161754656	7424291416	8401203526	8150551752	E-9
6.1	0.5303423262	9488297373	2872680085	3888298440	7000965206	3930338792	2571065707	9900403751	0874212320	4080214336	E-9
6.2	0.2823158037	0432744696	5248695676	4010990001	7670317564	9658969272	3820440911	6167255666	8677207345	727714501	E-9
6.3	0.1486228221	7623109613	1962200961	7610616055	6220452474	2202635659	8351039656	9737579477	6109960386	0560024581	E-9
6.4	0.7768847581	7098304085	5779878740	379924308	3558986405	2916473370	2060345541	8486963961	6723633751	2078962229	E-10
6.5	0.4016000383	8591178093	4614542240	0687488697	0706521132	3124835789	8503942388	4717507445	8748716997	1100488621	E-10
6.6	0.2055788909	3995179676	1317866570	9423956460	6044245059	5501557768	9390705853	9946746865	6754498228	1064840351	E-10
6.7	0.1042097698	7965193707	92342599460	4600196783	859583486	1152815230	84553488028	1786400712	7947459581	4199786609	E-10
6.8	0.5230957544	1445875087	2661586809	0465361505	9433736989	0449328691	5613048608	5480657191	5087547617	8507214989	E-11
6.9	0.2600126965	6381728380	2543875393	7396335902	4273540273	3878851933	4558822262	0047066996	0168413778	1835037110	E-11
7.0	0.1279812543	8858350043	8362369078	0832998032	8441541987	1792902220	4325228526	2394293800	9297615403	7055517050	E-11
7.1	0.6237844463	3315751092	2013481330	7977555525	2962711821	937787398	2843121076	3429360075	9958105920	3214501613	E-12
7.2	0.3010627981	1174374872	3694191581	4076349047	7715337323	6924588879	8814743406	8313681289	0302195452	8654836775	E-12
7.3	0.1338838638	1575857486	7574989876	8669354902	5295462948	3391065004	7653870894	0803073627	4486138708	4096710144	E-12
7.4	0.680224890	6200331849	4658759919	9586608114	4083058250	7351033323	6881763772	4125201447	2417802259	5486220671	E-13
7.5	0.3190891672	9108962277	6728834472	6355312875	6367843546	9419353568	1985864106	1206069168	6481408204	6908667219	E-13
7.6	0.1480653149	0048047086	0921789009	9801730439	9356613873	0917556589	6697579799	4633395923	1381151643	8919831102	E-13
7.7	0.680311540	7739707759	3852296582	5176130216	6596399735	0326756500	8843747121	5135743646	6334517591	6727185385	E-14
7.8	0.3095358771	9586954505	5810749090	2357929987	8683285032	6218968364	3806282435	1186098685	8033349389	7567643266	E-14
7.9	0.1394517146	6592682528	4082955118	0435378676	2933205247	2180192262	7110856334	4002561808	4904274680	1308004965	E-14
8.0	0.6220960374	2717841235	1599517258	8188422488	7172789002	7580152376	3526568603	5037580890	6994866020	4662883334	E-15
8.1	0.2747959392	3982204688	5359828822	8802188630	1769027055	9754076441	5457150252	5525421908	3404572173	8051867734	E-15
8.2	0.1201935154	2735787109	6958412832	7909500780	1280486069	4154160362	8809328604	4550608161	9341367308	5498660043	E-15
8.3	0.3205691744	8902851579	9588197804	5409783416	1739321317	1757416256	4016601364	3652543280	7967327705	5173819882	E-16
8.4	0.232393197	2880503411	3635480060	6128874057	3124025137	0967778112	2772066226	46522690823	9166258079	6539346761	E-16
8.5	0.9479534822	2033183541	5105046784	7551492826	4500867638	1718484496	6316480180	8841728475	8927907724	9097094154	E-17
8.6	0.5985804962	8481695614	1564567238	8927539931	9615770838	1415997999	4953415813	6902634590	1306401065	E-17	
8.7	0.1659420869	9647738339	1822513542	6634395688	0868884118	6942598212	8652937893	9001655833	9181566039	7171511228	E-17
8.8	0.6840807685	9355892927	0641913721	9806014868	1571458178	9771249892	5448596526	4098493017	5218865199	5502534974	E-18
8.9	0.2792334374	9396555669	5621767776	0647330301	0029050597	9527122208	3861723323	1083867223	4700136285	6178434167	E-18
9.0	0.1128588405	9538406477	3550207596	8747257980	0419008481	6494888734	9228121553	9304878813	4872562991	7291397593	E-18
9.1	0.4516591491	4354420874	4067080241	4552503950	5154847389	4967134505	6603048128	7131974488	0119204171	6435483771	E-19
9.2	0.789748812	0140407899	9933759238	2385989167	5026414071	7317209252	3969147223	5547002423	1065629125	4292780756	E-19
9.3	0.702284240	4416729587	7653844349	0254333598	7816476737	1052422369	3687988977	4512704644	8500804515	7694188664	E-20
9.4	0.2228153571	3461261056	0224516898	7432673584	9662515229	7536504420	7431128550	1497784106	6825560450	9595264843	E-20
9.5	0.1049451507	5362607492	8347801715	7665164626	8725521750	5901297725	3823697244	7037814067	6736749323	E-20	
9.6	0.3997221205	7262267099	5957561158	2144486866	4080902854	7232633084	6518661912	0147081763	4685343051	4629574542	E-21
9.7	0.1507493168	8101943747	9439142438	8623091179	4112357195	8236814025	7928804333	723571621	6834828042	4582574414	E-21
9.8	0.5629282311	3765722234	6304247429	1680676976	5087026247	4454981815	6987829736	8499283572	8177462668	3737522680	E-22
9.9	0.2081373219	4932135184	8379118004	5789544166	4841600487	5516367904	4407208949	1985786814	6937520207	7302022459	E-22
10.0	0.7619853024	1603260659	7334325159	9308363504	0332779569	6037803535	5462896615	6220596481	7033415138	5182804672	E-23

13

10.1	0.2762109471	7645067829	2623325157	5823407230	2761891913	4994468814	3886104398	0208877757	2914745133	6515227747	E-23
10.2	0.9913525122	5599099522	2580203039	9372106920	2729237947	5145232443	4272410844	5351771215	4921294708	9445706359	E-24
10.3	0.3523065078	9264386144	7649512174	2082725363	791788823	9332959777	0786095990	4218291056	6296701690	5824234014	E-24
10.4	0.1239665979	5840083601	2438081560	2490176400	5260977633	3144292891	8903388795	7425522369	8042903021	2382619182	E-24
10.5	0.4319006317	8092303465	4781715729	4225206461	7853554399	6813097894	9658166902	1111583661	5749242283	1947711401	E-25
10.6	0.1489801127	2964782125	8887973038	713276774	8526266783	6159961143	7722209750	9996667119	5542282312	0065630467	E-25
10.7	0.5088910855	0272789729	3773076260	4358502355	7162652600	0806932792	4059153664	4283925176	0826840716	3786885853	E-26
10.8	0.1721017839	4797891365	2454556748	1792830610	9529563507	7900789609	4915902437	8514637479	9353674239	9805207973	E-26
10.9	0.5762864413	8356154522	5396219359	3573707429	2716074466	3347100144	4373203252	5712325274	4248526276	5870329407	E-27
11.0	0.1910659574	4986757111	5041563370	7750699767	8717117140	3868129871	3114720881	0315190309	7731287758	165320266820	E-27
11.1	0.6272194393	2170256512	2267488713	3730871710	7593650503	9407891330	4393584268	4228276994	5941209169	0275864392	E-28
11.2	0.2038667503	5448754377	2840966806	1103584036	3413308549	5262621266	3376635468	3567689509	9729056897	9206441061	E-28
11.3	0.6560899940	9042092688	6552094696	0174013261	5189204300	9558442373	4097812519	1181707355	9331184775	9830686960	E-29
11.4	0.2090395421	7385576475	0689763782	2073485632	3535752333	0925451679	3885244400	1689102273	5591362832	9283765482	E-29
11.5	0.6595771446	1136750790	5247210592	3209455760	6702749149	5881144492	3632619813	3185239022	2976422803	1968376388	E-30
11.6	0.2060391236	1587838029	1608249050	6453455092	1383030288	3217501473	3742157316	3132923312	1893363816	8129657631	E-30
11.7	0.6372674915	6861071774	2574527917	7846474946	8657061461	5713281466	1048937842	5354486553	7091664598	7513687051	E-31
11.8	0.1951557293	1695707401	0265066415	9989716755	4396919573	5440458285	8907849631	4502117545	7210681354	4535690565	E-31
11.9	0.5917357716	3061007212	9435454194	3608537541	6983774569	4985887071	7252502918	8288322588	0679142839	5354207151	E-32
12.0	0.1776482112	0776789976	9617100184	5557092392	6664341789	53181503866	1173349444	3638300144	4942033054	6066558251	E-32
12.1	0.5280558767	4335374814	6279971068	0531870349	0836473058	0495607286	4784791416	0300604648	8082407512	1782760880	E-33
12.2	0.1554119786	3895935096	1145355735	7295129147	8647716305	5105750105	2549190316	0941684312	7518252819	8803167834	E-33
12.3	0.4528706956	1588244891	3486387524	2998646405	8056879356	6295909358	8695328613	9701878929	1602235612	6357600313	E-34
12.4	0.1306617983	1246403980	2535668315	7146469844	2277830184	1039447356	1285064734	0872867163	75182209319	2150392541	E-34
12.5	0.3732564298	8777133772	2583633803	1410888500	7134024596	2369434947	0031126127	2213478263	7232664034	4070739011	E-35
12.6	0.1055722558	0886428750	3018699887	2471199541	7854812152	0384003504	6859102631	7865036913	7363257062	8817939914	E-35
12.7	0.2956485364	8520232346	4906162246	702381173	8901415784	5763870127	6977598161	4716638957	6716448635	6037709193	E-36
12.8	0.8197561713	1630075103	0057218223	8493839680	2065618370	3142439143	4270692639	1146839775	3898939340	8807458544	E-37
12.9	0.2250485893	4150737469	8171454638	6049480643	1737797131	4524753678	3190594359	3801354132	1098133512	2502635816	E-37
13.0	0.6117164399	5498796822	7520977234	4071145112	8915282893	6748606640	3341124569	4987011520	0145570248	1496597423	E-38
13.1	0.1646288306	9508663714	2647343809	4878631974	0585197782	0574094068	5910754136	4827703118	8160139926	6016078977	E-38
13.2	0.4386752713	0742060913	2307354517	8347918630	4334687515	4177843715	2323472177	9012637443	2467598969	07149550799	E-39
13.3	0.1157341628	3690435924	5141869198	6648271685	3920378530	3309555314	7288962970	0671770509	3543733335	1381155834	E-39
13.4	0.3023157735	9451660291	2844229004	030336498	4726358666	7143123354	2852513573	9975412795	9038147175	2128124197	E-40
13.5	0.7818807305	6578912157	0563091552	1254402684	4762775106	7637529623	5584910168	4288208123	7544720894	8701747345	E-41
13.6	0.2002167223	6814922526	1409107975	3038760822	9592691357	1788121550	5576933917	3188075605	8403051147	1705939171	E-41
13.7	0.5076214811	5978295478	9406683563	8679472210	638274780	0214641735	6094145896	7263492356	1245267696	8696550919	E-42
13.8	0.1274263145	5068540279	9201095428	1057865816	2072604113	3700101635	9818320197	2876404519	1989137193	7284016276	E-42
13.9	0.3167088268	1307948000	8696950341	6537796174	9182952129	1474496593	5571293345	7764658422	9401597292	6217766676	E-43
14.0	0.7793536819	19226002543	5968183889	5086135557	91651463107	2432862094	9647249748	7732677809	3060046431	0754154242	E-44
14.1	0.1898848521	2291663569	8540083733	2888113363	9491616805	5646432273	3662023692	5291903692	9242299931	1532012467	E-44
14.2	0.4580620551	8947431392	3128854164	6008121721	3871980170	0982373332	999430783	6419432099	3438675333	4525735185	E-45
14.3	0.1094047787	0189158912	6534574870	9734636375	3343013410	8091349544	0836502525	2299410745	1570579110	5374552147	E-45
14.4	0.2587175925	4022625767	1501204731	0277587083	8772645389	9124619826	4866292967	4377697401	1736907602	7084873556	E-46
14.5	0.6057494764	4152207796	3344978551	2872750343	2003835536	7179312882	9029115560	9273386817	8115030865	1039077517	E-47
14.6	0.1404226866	9626447247	0483918222	3812857643	2060140026	8934902310	7262103483	1071300901	2211569870	8170235889	E-47
14.7	0.3222985757	7448078022	2646023294	4589330729	8099975497	7082430530	7441348312	2750177430	0393015968	989845260	E-48
14.8	0.7324131119	8271681602	6630544107	0899852005	5130826383	2308715687	0331387430	7044006956	4707177333	0880631422	E-49
14.9	0.1647897497	7000100705	1711571999	3502568514	94035299863	5857411302	2302003133	3825583506	5374441904	2401070002	E-49
15.0	0.33670986199	3127508657	8608965533	4743486416	2516280401	5747465937	9870356428	3193576477	1316072778	3257566109	E-50

U Q(U)

15.1	0.8076669988	0.151798538	7756884007	8838836234	8163230329	9884673517	8513990021	4153774770	5103305641	0000768446	E-51
15.2	0.1766105234	1.222155738	4614702762	5742032002	02613337142	2000812854	8942314445	1431962096	6215776432	7315141731	E-51
15.3	0.3822831562	0.734919588	910844787	3828515709	1827689811	7437476670	8064140512	2068062972	3426114243	9062084545	E-52
15.4	0.8183467554	0.142948090	6408838682	7138085341	2744141301	8557367481	3785637181	7937551320	8935122104	6305444285	E-53
15.5	0.1734460791	7938700051	4047479266	3711906986	5047852890	1105901798	7071561702	0230194654	4118891258	9351960160	E-53
15.6	0.3639706001	48657428191	8657415947	6845517471	2952645390	0446507201	6437519339	1638107986	6794812585	4748586572	E-54
15.7	0.7562103174	6836960804	587698280	8251351018	3930371290	4429012683	3560634809	281959062	7804834474	6256231182	E-55
15.8	0.135582868	9501404923	2169548919	3547405791	4292081624	4205570218	0594875664	1611777288	0831869536	4184267987	E-55
15.9	0.3168237665	3796663945	4349311643	6042991819	11590707436	3317314660	3838459327	995929197	2164242087	4083936161	E-55
16.0	0.6388754400	5380872812	7548257491	7666624836	7202353700	3255396600	9488494596	2078672197	10129380394	0881580399	E-57
16.1	0.1275522924	4501927744	2180843217	3754357095	4941456677	7652007520	8563021336	2281372616	0523107081	4810358497	E-57
16.2	0.2521353725	3100802703	7256095365	6881998757	0189940301	6840135927	7700201211	6901077896	3642402009	7066573361	E-58
16.3	0.4934606477	0.662630565	5100886359	8848185169	6811464211	8610322000	9199980508	9032284598	9461119279	2190973609	E-59
16.4	0.9361902574	2317604816	4354226970	1454516114	0186637414	6470036759	6533101168	7985156413	9362469482	1089502345	E-60
16.5	0.1834463003	1647311099	5458084279	6849168295	9303139711	8454592736	9844769853	9845491858	4685716287	6067408638	E-60
16.6	0.3484546519	9504081021	7553910495	8508990213	8094334572	1682054412	3936666521	6922099264	5557631664	8378896073	E-61
16.7	0.6253239781	9423294809	8822630670	4232384683	3440955018	0956547613	5527607031	8928848049	4708933558	4450746021	E-62
16.8	0.1220200540	5976357813	8493977052	5505281416	1479995630	1391053855	0252374862	2608498626	1386085647	2297298218	E-62
16.9	0.2249533023	0512156549	6228655115	9744209677	2583308986	6412017616	6349838635	3042554126	7600098270	1858590495	E-63
17.0	0.4105996202	0989062895	9465519386	2685619130	1850111580	44955477142	7745773365	4174898826	8213630853	8463845367	E-64
17.1	0.7420215071	6404780958	0640105447	0819676485	9208233375	4626875089	2195126507	2823925435	8057685637	3123088350	E-65
17.2	0.1327657504	27117691280	3125484810	5271439257	4915011711	9725051424	6383246536	3949305032	8533339428	2440768062	E-65
17.3	0.2351944458	8092813236	9414997229	5098119362	6098485159	0533493024	7322140321	6715348651	2090022069	1009223451	E-66
17.4	0.4125146265	0789260371	97535395123	4255661736	7934673257	1852682279	3895566017	5950695901	3950259325	5932593925	E-67
17.5	0.7163458766	2350358453	6064375019	6387519225	3108209322	449760886	2954241918	0050784555	6480378690	1081993454	E-68
17.6	0.1293162148	5946207187	9118112977	5453916025	1604672443	1375231620	893767051	6850366902	9856518859	9943531908	E-68
17.7	0.2095366054	3715211566	3912984923	1385151545	9474086361	8861541467	4887454908	6606284422	3612076645	1889286375	E-69
17.8	0.5333443775	4137991262	9279439397	6099694134	6079076058	1937334335	0060231131	5851585398	0659449990	6221586244	E-70
17.9	0.5896095977	2629257549	1446563391	7274881169	5627647187	0709098921	2436766624	0604047882	7036537423	3287559008	E-71
18.0	0.9740948918	9371504825	91892518997	14985833883	9796454481	8537971578	0108550873	6432311077	4791193699	2944526427	E-72
18.1	0.1593339067	8840164796	5029986490	4485256195	4192922263	1617197325	0967581134	3905756039	4579114158	5144989303	E-72
18.2	0.2580389220	6517789979	8023353413	7568756346	8862104958	8474387920	8883198803	2469863160	8512127983	4399589696	E-73
18.3	0.4137444373	5047477139	9324627499	2573346361	4280102071	2031596069	4525708437	8426047509	9455079023	3133763834	E-74
18.4	0.6563238493	3867949659	1792624893	7491300047	7603776765	3187919899	1610204598	8704445834	9500267644	3868623097	E-75
18.5	0.1032369868	9563289608	6569038420	0150650406	5561625020	0402984561	1567244588	5206221679	2852365673	0448936070	E-75
18.6	0.1606538934	3257364215	1329612129	297804904	2899735519	7961603012	9386780030	8515948076	6437961374	2193205730	E-76
18.7	0.2475235845	1425082826	2286024991	9648630377	4681987452	0548999007	2783176825	8529838594	2524079874	6445659051	E-77
18.8	0.3775819132	6924649998	0525817100	7691964677	1077562262	9625894091	6639460398	0104229374	1256437566	6578830652	E-78
18.9	0.5702626384	2315464730	5165811317	1446861985	6627445434	1271513886	5745326537	4701193779	5804437461	1201609891	E-79
19.0	0.8527223952	6309765105	0611863261	4836272145	06259593383	2499115257	5097266781	2859166966	5506641140	26989931100	E-80
19.1	0.1262435822	1853540708	3062573938	0682100100	0369494506	3208190408	7749733151	0081952991	4862258996	5189718089	E-80
19.2	0.1850460069	9425195701	0060633638	5255393394	7295174773	5460857767	5623794295	4033842080	1514465222	8615411712	E-81
19.3	0.2685460542	7992595132	1822897246	2180819340	7847192635	8287257538	6901228856	4729945903	4020735548	6295172643	E-82
19.4	0.3858569828	9812245628	3174617700	2930358378	9904666150	6280199693	3444278750	3622448632	5918076076	1462348250	E-83
19.5	0.5489115475	6604099475	4776427787	8042974225	8042024378	1917232609	0659635550	9766116588	6431797216	5656658302	E-84
19.6	0.7731195168	1316717109	6251392696	9080629454	9788089082	9221794312	7225580874	6870002267	4755895933	4012110328	E-85
19.7	0.1078100286	3662156473	7413466181	2926339424	3653387143	6254592107	2256951549	8377018108	2737121156	7164734195	E-85
19.8	0.1488468775	8892855432	2663267907	6744259670	9534581406	0655989502	3143804732	9518369443	0142767674	2297170517	E-86
19.9	0.2034643208	7826721227	4727412839	3621823036	1428270335	7484467002	8779738370	9919403293	2787511996	9687351774	E-87
20.0	0.2753624418	6062336950	7562278085	7465332807	4977347593	3056769937	1654584918	6208826035	3369172344	2117928075	E-88