数理解析研究所講究録
第 254 巻 1975 年 108-122

力学系の分岐

日大　理工　　松元重則

まえがき

微分可能力学系　ことにそのgenericな性質についての研究が創始されてからすでに久しい。いまや立派な成果が数多く積み重ねられつつある。そして問題はいまだ山積している。何時まで続くのか。力学系の理論はつきあたる壁を持たぬのか。

力学系の分岐についての研究は，安定性について安定した結果が提出された時点で始まった。この方面の研究の重要性（とくに数学以外の諸分野への応用に関しての）についてはThom [6] をみられたい。しかるに安定性についてすら限られた知識しか得られぬ現時点で，我々は分岐について何を知り得たのか。我々はその全体像について，骨子すら知り得たと主張することができない。今日お話しす

る内容も，局所的な分岐の generic な姿を描写したものにすぎず，力学系の理論の最大関心事である大域的様相についての将来の研究のためのひとつの布石にすぎないのである。（重要でないという意味ではないが。） 今日の講演は，Sotomayer [4] の抄録であるが，他に Brunovsky [1] に類似の結果がある。 また Sotomayer [5] には，二次元多様体上の流れに限っての，より完全な記述がある。 一方 Newhouse－Palis [3], [2] には，Morse－Smale 系を，始点とする一径数族（微分同相の）の最初の分岐点の状態についての大域的見地からの研究がある。 後者の議論は複雑至極であるが，この型の分岐点は恐らく一番簡単なものである。

§1. 双曲型特異点と擬双曲型特異点

M はコンパクト C^∞ 級多様体であり境界をもたない。 f は M 上の C^r 級（$1 \leqq r < \infty$）微分同相であり $p \in M$ は f の固定点である。 T_pM を，p における M の接空間とし，$T_pf : T_pM \longrightarrow T_pM$ を，f の p における一階微分とする。一般に T_pM は，T_pf－不変な部分空間の直和 $E^c \oplus E^u \oplus E^s$ に分解され，T_pf の E^c, E^u, E^s への制限の固有値は，すべて単位

円$|z|=1$の上，外，内にある。またMのf-不変部分多様体W^c，W^{uu}，W^{ss}が存在し，それらはpをとおり，そこでE^c，E^u，E^sに接している。$f|_{W^{uu}}$，$f|_{W^{ss}}$は，$T_pf|_{E^u}$，$T_pf|_{E^s}$に位相共役である。さて

（定義）　$E^c=0$のとき，pはfの双曲型固定点と呼ばれる。

（定義）　pがfの擬双曲型固定点であるとは，$f|_{W^c}$がpの近くで次式のいづれかで表わされることとする。

a)　$x \longmapsto x + ax^2 + O(|x|^2)$　　ただし$a \neq 0$，$x \in \mathbb{R}$

b)　$x \longmapsto -x + ax^2 + bx^3 + O(|x|^3)$　ただし$a^2+b \neq 0$，$x \in \mathbb{R}$

c)　$z \longmapsto \lambda z + \beta |z|^2 z + O(|z|^3)$　ただし$|\lambda|=1$，$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1$，$\mathrm{Re}(\beta/\lambda) \neq 0$，$z \in \mathbb{C}$

b)中の条件$b+a^2 \neq 0$は，$f \circ f$の式$x \longmapsto x - 2(a^2+b)x^3 + O(|x|^3)$中の係数（$x^3$の）を0でないと保証するためのものである。c)のとき，pの非常に近くで，fは$\arg \lambda$で決定される一径数群の時間1写像となっているのであるが，この一径数群のPoincaré写像は式$x \longmapsto -x + \frac{\pi}{\arg \lambda} \mathrm{Re}(\beta/\lambda) x^3 + \cdots$で表わされる。従って条件$\mathrm{Re}(\beta/\gamma) \neq 0$は，上式中の$x^3$の係数を0でないと保証するためのものである。

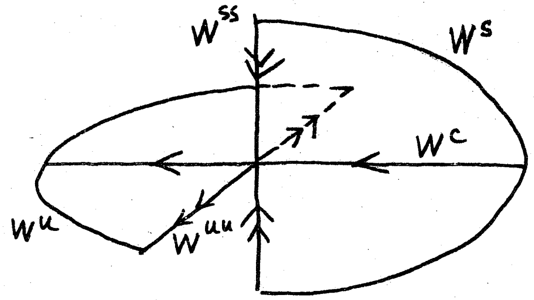
ここで，XをM上のベクトル場とし，Xの定義する一径数群をX_tで表わし，$p\in M$を，Xの特異点（すなわち$X(p)=0$）とするとき

（定義）pはXの（擬）双曲型特異点である。

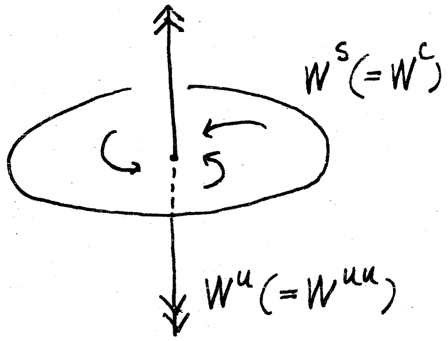
$\Longleftrightarrow$ あるtに対しpはX_tの（擬）双曲型固定点である。

この場合，b)は起らないことに注意しよう。不変多様体を図示すると，

a)型



c)型（$\mathrm{Re}(\beta/A)<0$）



ただし上記中で $W^{u(s)}=\{x\in M \mid X_t(x)\xrightarrow{t\to-\infty(\infty)} p\}$

最後にベクトル場Xの周期軌道γに対して

（定義）γが（擬）双曲型.

$\Longleftrightarrow$ γのPoincaré写像がso .

これは切断のとり方によらず定義される。

§2. 擬双曲型特異点の分岐

径数空間ΛはC^∞級可微分多様体であるとし，C^r級の径数付流れ $\xi : \Lambda\times M \longrightarrow TM$ を考える。ξの特異点の軌跡 $\Theta = \xi^{-1}(M_0)$ （ここにM_0は，TMの0-切断）について

（仮定） ξはM_0に横断的であり従ってΘは余次元nの部分多様体である。

を設ける。$(\lambda_0, p)\in\Theta$をとり，この点のまわりで，合成の写像，$(\xi^c, \xi^u, \xi^s) : \Lambda\times M \xrightarrow{\xi} TM \longrightarrow T_{x_0}M \approx E^c\oplus E^u \oplus E^s$ を考える。呼応して，この独立変数を，$(x, y, z, \lambda) \in W^c\times W^{uu}\times W^{ss}\times \Lambda$ と表わしておこう。

1° a)型の擬双曲型特異点の分岐

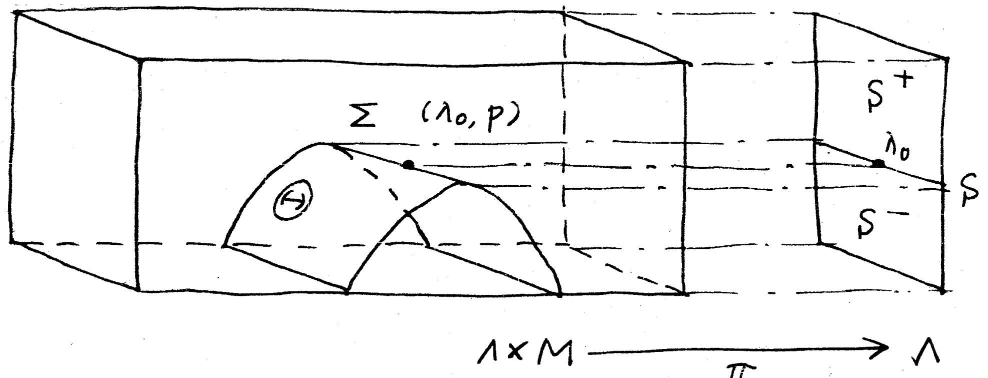
ここでは次の

（仮定）
$$\xi^c = \alpha\cdot\lambda + ax^2 + U$$
$$\xi^u = A\cdot y + A_0\cdot\lambda + V$$
$$\xi^s = B\cdot z + B_0\cdot\lambda + W$$

ここに$a>0$, $x\in\mathbb{R}$, V, Wは(λ_0, p)における一階微分までが0の関数，Uは更に$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$も$0$.

のもとで議論を進める。

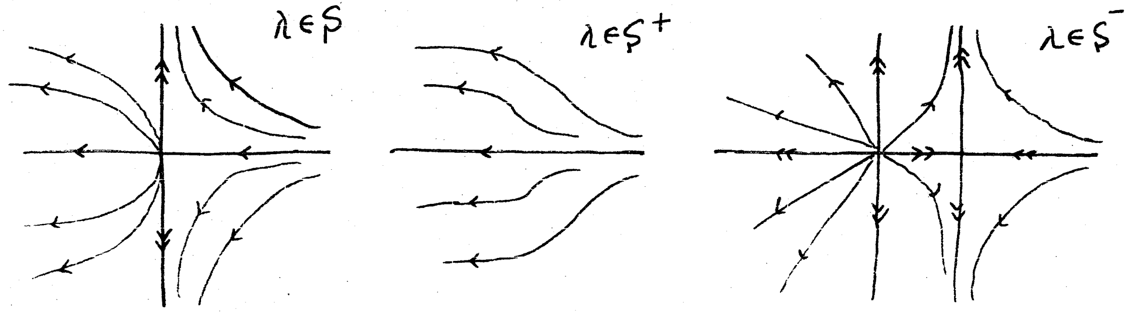
次の絵をみよう。



ここに $\pi_1 : \Lambda\times M \longrightarrow \Lambda$ は第一成分への射影であり，Σ は，$\pi_1|_\Theta$ の臨界点の軌跡を，S は Σ の π_1 による像を表わす。また S^+, S^- は領域であり，一次形式 $\alpha\cdot\lambda$ により定まる。（詳しくは次の命題の証明を見られたい。） 以上すべては，点（λ_0, p）又は点 λ_0 の近くでのみ定義されているのである。

（命題1） (i) S は余次元1の部分多様体である。(ii) $\lambda\in S$ に対し，流れ $\xi_\lambda : M\to TM$ は，ξ_{λ_0} と（局所的に）位相共役である。 (iii) $\lambda\in S^+$ に対し，ξ_λ は p の近くに特異点をもたない。(iv) $\lambda\in S^-$ に対し，ξ_λ は p の近くに二つの双曲型特異点を持ち，それらの指数は1だけ違っている。

次図は ii)～iv) の各々の λ について ξ_λ の様子を描写したものである。



証明: $\xi^u = \xi^s = 0$ を, y, z について解いて, $y = y(\lambda, x)$, $z = z(\lambda, x)$ を得る。 ここに $y(0,0) = z(0,0) = y_x(0,0) = z_x(0,0) = 0$. 一方, 適当に $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ とおくことにより $\alpha \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \lambda_1$ $(\alpha_1 > 0)$ とすることができる。 上の y, z を代入して,

$$\xi^c = \alpha_1 \lambda_1 + a x^2 + U'(x, \lambda) = 0$$

という方程式を得る。 ここに $U'(0,0) = U'_x(0,0) = U'_\lambda(0,0) = U'_{xx}(0,0) = 0$. 上式を λ_1 についてといて, $\lambda_1 = -\frac{a}{\alpha_1} x^2 + \varphi(x, \lambda_2)$. Θ は上の三つの関係式で定義され, 従って前頁の絵の様な形をしているのである。 さらに $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = -\frac{2a}{\alpha_1} x + \varphi_x(x, \lambda_2) = 0$ を, x についてとき, 上の λ_1 の式に代入することにより関数 $\lambda_1 = s(\lambda_2)$ を得るが, このグラフが S に他ならない。 $S^{+}_{(-)} = \{ \lambda_1 \underset{(<)}{>} s(\lambda_2) \}$ とおけば, iii) ~ iv) は, 困難なく証明される。 ■

2° 周期軌道と微分同相

引きつづき径数付流れ $\xi : \Lambda \times M \longrightarrow TM$ を考える。 $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し流れ ξ_{λ_0} は周期軌道 γ をもつものとしよう。 U を γ の切断とし, $\{p\} = U \cap \gamma$ とおく。 p の U における近傍 V と λ_0 の Λ における近傍 N とを十分小さく選べば, $^\forall \lambda \in N$

に対し ξ_λ の Poincaré 写像 $f_\lambda : V \longrightarrow U$ が定義される。（または $f : N \times V \longrightarrow U$）. $\mathcal{F} = \{ (\lambda, x) \in N \times V \mid f(\lambda, x) = x \}$ とおき，$d : N \times V \longrightarrow U$ を $d(\lambda, x) = x$ にて定義する。次の

（仮定）写像 f と d は横断的である。

のもとで，$\mathcal{F}$ は多様体となり，その余次元は U の次元と一致し $n-1$ である。

さて γ の近くでの軌道状態の位相型を調べるには，径数付微分同相 f の位相型がわかればよいのである。（Smale [ ] をみよ。）

3° 微分同相の b) 型固定点の分岐

前段に述べたことによりここでは微分同相の固定点の分岐について述べる。a) 型擬双曲型固定点については 1° と平行に論ずればよいのでここでは省略し，b) 型について論ずる。引きつづき $f : N \times V \longrightarrow U$（径数付の局所微分同相）を扱うのであるが，記号の便のため N を Λ で，V を U で表わしておく。$(\lambda_0, p) \in N \times V$ に対し，p は，f_{λ_0} の b) 型固定点とするのであるが，このとき前段の横断性の仮定は，$T_p f_{\lambda_0}$ が固有値 1 をもたないことから，自動的に満

足され，固定点の軌跡 $\mathcal{F}$ は，部分多様体となる。さらに $\pi_1 : \Lambda \times U \to \Lambda$ を，第一成分への射影とするとき，$\pi_1|\mathcal{F}$ は，(p, λ_0) にて正則である。従って点 (λ_0, P) の近傍で $\mathcal{F}$ はある写像：$\Lambda \to U$ のグラフとなっているのであるが，$\Lambda \times U$ の局所座標 (λ, x, y, z) *) を，次のようにとっておく。
(i) $\mathcal{F} = \{x = y = z = 0\}$ (ii) 各 λ に対し，$\mathcal{V}$ の λ の level での x, y, z－平面は，各々，$W^c(f_\lambda)$，$W^{uu}(f_\lambda)$，$W^{ss}(f_\lambda)$ に一致する。さて，$v : \Lambda \to \mathbb{R}$ を，次の条件をみたす関数とする。(i) $v(\lambda)$ は，$T_{(\lambda,0,0,0)} f_\lambda$ の固有値である。(ii) v は C^{r-1} 級である。(iii) $v(\lambda_0) = -1$ である。(このような関数 v の存在と一意性は明白である。) これより，λ_0 の近くで，$\lambda \longmapsto E^\sigma(f_\lambda)$，$\sigma = c, u, s$ は C^{r-1} 級であることがわかり，従って上記のごとき局所座標が実際に存在することが示されるのである。

さて，v は λ_0 にて正則であるとすれば，Λ の局所座標として (v, λ_2) をとることができる。これを仮定する。$f = (f^c, f^u, f^s)$ とおいて次の表現を得る。

$$f^c = vx + \alpha x^2 + \gamma x^3 + X$$

$$f^u = A \cdot y + Y, \qquad f^s = B \cdot z + Z$$

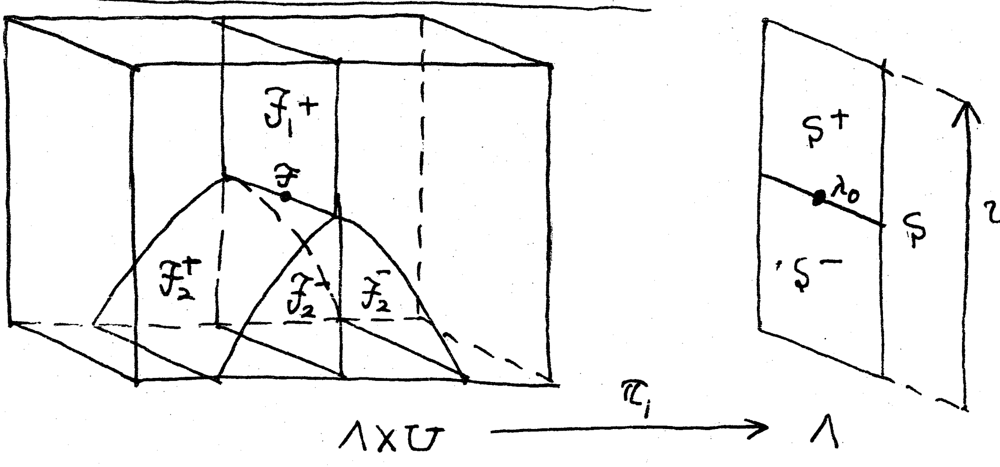
---

*) x, y, z は λ に従属している。

ただし, α, γ は, $\lambda=(\upsilon, \lambda_2)$の関数. A, B は, λの行列値関数. そして, X, Y, Z は (λ, x, y, z)の関数であり $(\lambda_0, 0, 0, 0)$にて, 一階微分まで 0. Xは, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ まで消えている。さらに, 話をきめるため $\alpha^2+\lambda$ はつねに正であるとしよう。

Λの部分集合を, $S := \{\upsilon=-1\}$, $S^{(\pm)} = \{\upsilon \gtrless -1\}$ と定め, これらの $\pi_1|_{\mathcal{F}}$ による逆像を, 各々 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1^{(\pm)}$ とおく。このとき,

(命題2) (1) $\lambda \in S$ ならば, f_λの位相型は, f_{λ_0}のそれと等しい。$\lambda \in S^{(\pm)}$ ならば, f_λ は, 双曲型の固定点をPの近くに, ただひとつ有し, それらの指数は, S^+ とS^-でひとつだけ異なる。 (2) 次図のような部分多様体 $\mathcal{F}_2^+$, $\mathcal{F}_2^-$が存在し, それらは周期2の周期点の軌跡である。各周期点は双曲型であり, その指数は, f_{λ_0}の指数から定まる。fは $\mathcal{F}_2^{\pm}$ を $\mathcal{F}_2^{\mp}$ に移すのである。



<u>証明</u>　(1)は明白であろう。(2)のために，方程式 $f \circ f = id$ を解こう。y, z 一成分の方程式は，変数 y, z について解けるので，その解を x 一成分の方程式に代入して，

$$x = v^2 x + (\alpha v + \alpha v^2) x^2 + (v\gamma + 2\alpha^2 v + v^3 \gamma) x^3 + \text{高次項}$$

を得る。$x \neq 0$ として両辺から x をはらったのち，左辺を v につき，$(\lambda_0, 0; 0, 0)$ で微分して -2 を得るので，これを v について解くことができて，$v = v(x, \lambda_2)$ を得る。簡単な計算により　$v_x = 0$，$v_{xx} = -2(\gamma + \alpha^2) < 0$　。以上より，$F_2^+ \cup F_2^- \cup F_1 = \{ y = y(v, \lambda_2, x),\ z = z(v, \lambda_2, x),\ v = v(x, \lambda_2) \}$ を得て，従って $F_2^{\pm}$ は，前頁の絵のようになっていることがわかる。双曲性の証明は困難でないので省略する。■

4°　C型固定点の分岐

ひきつづき　$f : \Lambda \times M \longrightarrow M$ を，径数付きの微分同相とし，固定点の軌跡 F の点 (λ_0, x) をとる。

ここでは，適当な局所座標系 (λ, x, y, z) に対して f は次のように表わされるものと仮定する。

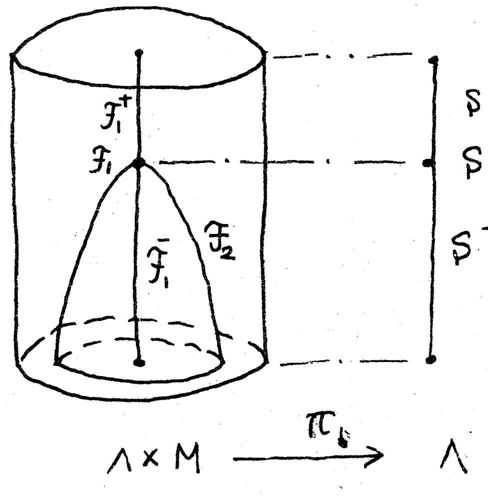
$$f^c = v(\lambda) x + \gamma(\lambda) x |x|^2 + \text{高次項}$$

$$f^u = A(\lambda) \cdot y + \text{高次項}, \qquad f^s = B(\lambda) \cdot y + \text{高次項}$$

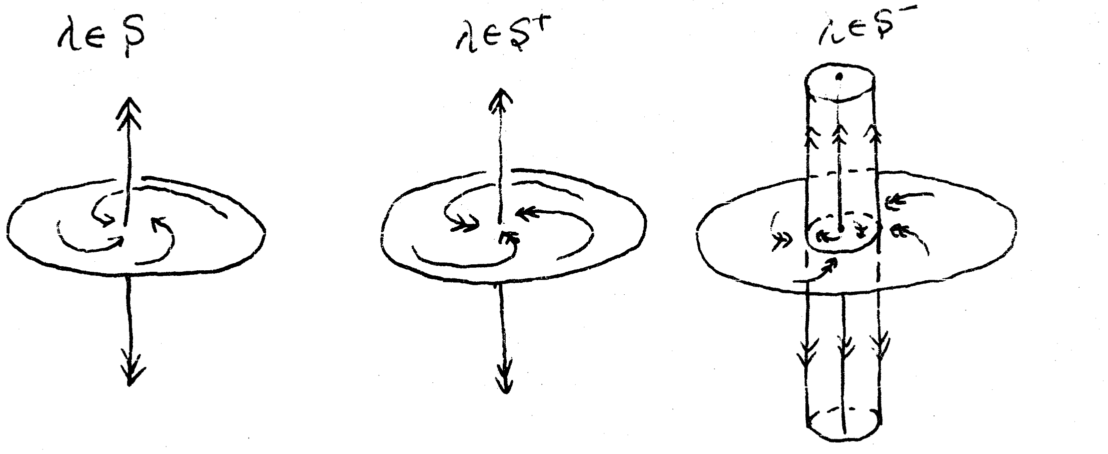
ただし $x\in\mathbb{C}$, $|\nu(\lambda_0)|=1$, $\nu(\lambda_0)$, $\nu(\lambda_0)^2$, $\nu(\lambda_0)^3$, $\nu(\lambda_0)^4\neq 1$
$\mathrm{Re}\,(\gamma(\lambda)/\nu(\lambda))<0$. さらに、$|\nu|'(\lambda_0)\neq 0$ としよう。

$\mathcal{S}=\{\lambda\in\Lambda \mid |\nu(\lambda)|=1\}$, $\mathcal{S}^{+(-)}=\{|\nu(\lambda)|\underset{(<)}{>}1\}$ とし、
$\pi_1|_{\mathcal{F}}$ によるそれらの引き戻しを、$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1^{+(-)}$ とする。

（命題3）(1) $\lambda\in\mathcal{S}$ ならば、f_λ の位相型は、f_{λ_0} のそれと一致し、$\lambda\in\mathcal{S}^{+(-)}$ ならば f_λ は双曲型固定点を p の近くにただひとつ有し、その指数は、$\mathcal{S}^+$ と $\mathcal{S}^-$ でふたつ異なる。
(2) 下図のような部分多様体 $\mathcal{F}_2$ が存在し、その level λ での切り口は、円周と微分同相であり、f_λ-不変かつ双曲型である。($\lambda\in\mathcal{S}^-$)



各 λ について f_λ の軌道状態を図示すると、次頁のようになる。ただし、上の絵では、M は 2 次元であったが、次の絵では、M は 3 次元である。



命題3の証明の概略　(1)はなんでもない。(2)のために、切断面$\{\mathrm{Im}\,x=0\}$を考え、微分同相f_λを拡張した1径数群の、この切断面におけるPoincaré写像を考えれば、b)型の擬双曲型固定点の分岐になっているので、前段の結果を利用する。■

§3. genericity定理

ここでは$\dim\Lambda=1$とし、$\Phi^r(\Lambda)=\{\xi:\Lambda\times M\to TM,\ C^r\text{-級}\}$に$C^r$位相を与えておく。$r\geq 5$とする。

（定理4）$\Phi^r(\Lambda)$において、次の性質は、genericである。
(1) ξの特異点、周期軌道はすべて双曲型もしくは擬双曲型であり、擬双曲型のところで、a)型かb)型かc)型かを問わず、前節に用いた横断性の仮定が満たされ、従ってSはΛの部

分多様体となっている。

(2) 各擬双曲型軌道に対するSは（dim Λ = 1より）点であるが，互いに交わらない。

(3) Λ×M 中で，(不)安定多様体の軌跡は，stratified set になっているが，それらは，互に stratified set として横断的である。

参考文献

[1] P. Brunovsky, On one parametre families of diffeomorphisms, Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 3.

[2] S. Newhouse and J. Palis, Bifurcation of Morse-Smale dynamical systems, Dynamical Systems, ed. Peixoto, Academic press, N.Y., 1973, 303－366.

[3] ——————, Cycles and Bifurcation Theorems, To appear.

[4] Sotomayer, Generic Bifurcations of Dynamical Systems, [2]と同じ本で，561～581.

[5] ———, Generic one parametre families of vector fields in two-dimensional manifolds, Publ. Math

I. H. E. S.

[6] R. Thom, Stabilité structurelle et Morphogénèse,