数理解析研究所講究録
第 256 巻 1975 年 1-11



# Generalized growth conditions and convexoid operators

弘前大.理　　古田孝之

**1.** ここでは，複素ヒルベルト空間Hの上の有界線形作用素Tを取り扱うことにする。通常の growth condition なる概念を少し変えて，次のような定義をする．

定義1．Tが growth condition $(G_1)$ for $(M, N)$ をみたすとは次の条件を満足することとする；

$$(*)\qquad \|(T-\mu)^{-1}\| \leqq \frac{1}{d(\mu, M)} \qquad \text{for all } \mu \notin N$$

こゝにM，Nは $N \supseteq M \supseteq \sigma(T)$ なる closed sets であり，$\sigma(T)$ はTのスペクトラムを示す。このときTを $T \in (G_1)$ for $(M, N)$ と略記することにする。又(*)の等号をみたす作用素を $E\text{-}(G_1)$ for $(M, N)$ と表わし，このときのTを，$T \in E\text{-}(G_1)$ for $(M, N)$ と略記する。更に条件(*)の左辺の作用素ノルムを numerical radius norm $w((T-\mu)^{-1})$ でおきかえたとき不等式の成立する作用素を $(w\text{-}G_1)$ for $(M, N)$ で表わし，このときのTを，

$T \in (w\text{-}G_1)$ for $(M, N)$ と略記し、かつ等号をみたす作用素を $E\text{-}(w\text{-}G_1)$ for $(M, N)$ と表わし、このときの $T$ を $T \in E\text{-}(w\text{-}G_1)$ for $(M, N)$ と略記する。

上の定義 ($(G_1)$ for $(M, N)$) で $M = N$ のときは、T. Saito の意味の $(G_1)$ for $M$ のことである。さて numerical range の closure $\overline{W}(T)$ と、spectrum の convex hull $co\,\sigma(T)$ とが一致する作用素 $T$ を convexoid 作用素と呼ばれているが、この作用素 $T$ の特性化を、Orland とは一寸異なる形で与え、この応用の一つとして、G. R. Luecke と M. Fujii が構成したある二つの convexoid 作用素を含む更に広い convexoid 作用素を generalized growth conditions の立場から考察してみることにしたい。

**2.** 後の議論のために、次の明らかな結果を整理してみることにする。

Proposition 1. Any one of the following conditions is necessary and sufficient in order that $T$ is convexoid :

(i) $T - \mu$ is spectraloid for all complex $\mu$,

(ii) $T - \mu$ is spectraloid for all complex $\mu$ whose absolute values are sufficiently large,

(iii) $T \in (G_1)$ for $co\,\sigma(T)$,

(iv) $T \in (G_1)$ for $(co\,\sigma(T), N)$,

(v) $T \in (w\text{-}G_1)$ for $co\,\sigma(T)$,

(vi) $T \in (w\text{-}G_1)$ for $(co\,\sigma(T), N)$.

ヒルベルト空間上の作用素 T は，一般に次の不等式をみたすことは良く知られている；

$$\frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \leqq \|(T-\mu)^{-1}\| \leqq \frac{1}{d(\mu, W(T))}$$

ただし左辺の不等式は for all $\mu \notin \sigma(T)$ についてであり，同様に右辺の不等式は for all $\mu \notin W(T)$ についてである。Luecke は右辺の等号成立の作用素につき考察した。

定義 2. $T \in \mathcal{R}$ とは，次の等式が成立つことである；

$$\|(T-\mu)^{-1}\| = \frac{1}{d(\mu, W(T))} \qquad \text{for all } \mu \notin \overline{W}(T).$$

Theorem A (Luecke). $T \in \mathcal{R}$ if and only if $\partial W(T) \subset \sigma(T)$ where $\partial M$ is the boundary of $M$.

Luecke は上の theorem A を示し $T \in \mathcal{R}$ は convexoid 作用素であることを示したが，この class $\mathcal{R}$ は，H が有限次元のときでさえ，identity の scalar 倍で構成されるため，一般の normal operator を含まない。そこで、Fujii は次のような定義をし、$\mathcal{R}$ と $(G_1)$ を含む class $(H_1)$ を構成した。

定義3. $T \in (H_1)$ とは $T \in (G_1)$ for $\tilde{\sigma}(T)$ が成立することである、ここに $\tilde{\sigma}(T)$ とは hon-spectrum と呼ばれ、$\sigma(T)$ の complement $\sigma(T)^c$ の unbounded component の complement を示す。

更に Fujii は次の結果を示した。

Theorem B (Fujii). $T \in \mathcal{R}$ if and only if $\overline{W}(T) = \tilde{\sigma}(T)$.

上の Theorem A, Theorem B ともに $T \in \mathcal{R}$ なる $T$ が convexoid 作用素であることを幾何学的に示している興味ある結果であるが、ここでは、定義1 と Proposition 1 より別な考察をしてみよう。

Theorem 1. Any one of the following conditions is necessary and sufficient in order that $T$ belongs to $\mathcal{R}$;

(i) $T \in E\text{-}(G_1)$ for $\overline{W}(T)$,

(ii) $T \in E\text{-}(G_1)$ for $(\mathrm{co}\,\sigma(T), \overline{W}(T))$,

(iii) $T \in E\text{-}(G_1)$ for $\mathrm{co}\,\sigma(T)$,

(iv) $T \in E\text{-}(w\text{-}G_1)$ for $\overline{W}(T)$,

(v) $T \in E\text{-}(w\text{-}G_1)$ for $(\mathrm{co}\,\sigma(T), \overline{W}(T))$,

(vi) $T \in E\text{-}(w\text{-}G_1)$ for $\mathrm{co}\,\sigma(T)$.

$T \in R$ の特性化として，numerical range とその spectrum との相互関連を geometrical にとらえて表現したものが，Theorem A, Theorem B であり共に $R$ が convexoid 作用素の subclass をなすことを示している。一方 Theorem 1 は次のように考えられる，つまり「convexoid 作用素がみたすべき growth condition $(G_1)$ for $co\,\sigma(T)$ (或は $(G_1)$ for $(co\,\sigma(T), \overline{W}(T))$) という不等式における"等式"が，成立する作用素 $T$，それが $R$ を構成している」と。この意味で Theorem A, Theorem B が "geometrical characterizations" と考えられるのに対して，Theorem 1 は "characterization in formula" とみなされることになる。これで確かに Theorem 1 も $R$ が convexoid 作用素の subclass であることを"式"の上で的確に示していることが判った。

**3.** 次に新しい convexoid 作用素の一つの class を定義しよう。$(H_1)$ は $R$ と $(G_1)$ の双方を含む convexoid 作用素であるが，この $(H_1)$ を含む convexoid 作用素 $\mathcal{S}$ を定義しよう。

定義 4. $T \in \mathcal{S}$ とは，$T \in (G_1)$ for $(\sigma(T), \overline{W}(T))$ をみたすことである。つまり $(T-\mu)^{-1}$ が normaloid for all $\mu \notin \overline{W}(T)$ のことである。

Theorem 2. $(H_1) \subset \mathcal{S} \subset C$ and these inclusion relations are proper, where $C$ is the set of all convexoid operators.

実際上の定理をみたす $\mathcal{S}$ は次のごとくにて構成される。

Theorem 3. If $A$ is an operator and $B$ satisfies $(G_1)$ for $(\sigma(B), \overline{W}(B))$ such that $d(\mu, \sigma(B)) \leqq d(\mu, W(A))$ for all $\mu \notin \overline{W}(B)$, then $T = A \oplus B$ also satisfies $(G_1)$ for $(\sigma(T), \overline{W}(T))$.

又 Theorem 2 の inclusion relations が proper である例は実際作れることがわかるし，更に $\mathcal{S}$ が convexoid 作用素の subclass であることは，Proposition 1 より明らかである。

定義 5. 作用素 $T$ が numeroid であるとは，$\overline{W}(T)$ が $T$ の一つの spectral set になることである。

Proposition 2. There exists a numeroid which does not belong to $\mathcal{S}$ and vice versa.

上の Proposition 2 により "there exists a normaloid which does not belong to $\mathcal{S}$ and vice versa." という事もでてくることに

なります。

**4.** 定義1をみたす作用素の一般的な construction method を与える結果を示すことにします。

Theorem 4. If $A$ is an operator, $X$ and $Y$ both closed sets in the complex plane and $B$ satisfies $(G_1)$ for $(\sigma(B), Y)$ such that for all $\mu \notin Y \supset X$,

$$d(\mu, X) \leqq \min\{ d(\mu, W(A)),\ d(\mu, \sigma(B))\},$$

then $T = A \oplus B$ satisfies $(G_1)$ for $(X, Y)$ in the generalized growth condition.

上の定理で $d(\mu, X) \leqq d(\mu, W(A))$ が essential であり、これを $d(\mu, X) \leq d(\mu, \sigma(A))$ for all $\mu \notin Y \supset X$ でおきかえることは、できないことは、次の結果が示している。

Proposition 3. If $X$ and $Y$ are both closed sets in the complex plane and $A$ does not satisfy $(G_1)$ for $(X, Y)$ such that for all $\mu \notin Y \supset X$, $d(\mu, X) \leqq d(\mu, \sigma(A))$ and there exists a $\lambda \notin Y$ such that $d(\lambda, X) > d(\lambda, W(A))$, then $T = A \oplus B$ does not satisfy $(G_1)$ for $(X, Y)$ whenever $B$ satisfies $(G_1)$ for $(\sigma(B), Y)$ such that the following property holds;

$$d(\mu, X) \leq d(\mu, \sigma(B)) \qquad \text{for all } \mu \notin Y \supset X.$$

**5.** 第三節では $\mathcal{R}$ と $(G_1)$ を共に含む $(H_1)$ を subclass として含む更に広い convexoid 作用素 $\mathcal{S}$ を構成したが、ここでは $\mathcal{R}$ や $(G_1)$ にも含まれる更に狭い convexoid 作用素の class $\mathcal{P}$ を構成しよう。

定義 6. $T \in \mathcal{P}$ とは $\overline{W}(T) = \sigma(T)$ を $T$ がみたすことである。

上の class $\mathcal{P}$ に属する代表的な例は unilateral shift 作用素である.

Theorem 5. If $A$ is an operator and $B$ belongs to $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{R}$) such that $\sigma(B) \supset \overline{W}(A)$ (resp. $\tilde{\sigma}(B) \supset \overline{W}(A)$), then $T = A \oplus B$ also belongs to $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{R}$).

Remark 1. Luecke は "if $A$ is an operator on $H$, then $A \oplus N \in \mathcal{R}$ on $H \oplus K$ whenever $N$ is a normal operator on $K$ with $\sigma(N) \supseteq \partial W(A)$" を示しているが $A = 1$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ととり, $T = A \oplus N$ と定義すれば, $N$ は normal で $\sigma(N) = \{1, 2\} \supseteq \partial W(A) = \{1\}$ であるが, この normal 作用素 $T$ は $\mathcal{R}$ には属さないことは $\partial W(T) \not\subset \sigma(T)$, つまり $\overline{W}(T) \neq \tilde{\sigma}(T)$ であるから, Theorem A, 又は Theorem B より明らかである。つまり Luecke の結果は insufficient である. 定理5のようにすべきであろうと考えられる。上の定理でも解るように $\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$ とは, $\sigma \longrightarrow \tilde{\sigma}$ におきかえれば, parallel な結果が得られる。

Theorem 6. $\mathcal{P} \subset (G_1) \cap \mathcal{R}$ and this inclusion relation is proper.

Remark 2. Luecke は " if $A$ is an operator and $B$ normal operator such that $\sigma(B) = \overline{W}(A)$, then $T = A \oplus B$ belongs to $(G_1)$ " で $(G_1)$ に属する $T$ の構成法を示しているが、実は、Theorem 5 によって $(G_1)$ より狭い class である $\mathcal{P}$ に属することが解る。更に彼が具体的に構成した $(G_1)$ にも $\mathcal{R}$ にも属する作用素の例は実は $\mathcal{P}$ に属することが解る。そこで彼の結果と上の事柄を合わせれば、次の結果を得る。

Proposition 4. There exists an invertible operator belonged to $\mathcal{P}$ such that (i) $T^2 \notin (G_1)$ and $T^2 \notin \mathcal{R}$, (ii) $r(T) < \|T\|$ (non-normaloid) (iii) $T^{-1} \notin (G_1)$ and $T^{-1} \notin \mathcal{R}$.

次に $T \in Q$ とは $\tilde{\sigma}(T) = co\,\sigma(T)$ なる $T$ のことし、又 $T \in U$ とは $\sigma(T) = co\,\sigma(T)$ なる $T$ , $T \in V$ とは $\tilde{\sigma}(T) = \sigma(T)$ なる $T$ のことと定義する。

Theorem 7. $\mathcal{P} = V \cap \mathcal{R} = C \cap U = V \cap Q \cap C$, where $C$ is the set of all convexoid operators.

次の結果は convexoid 作用素の各 class である $C$, $\mathcal{S}$, $(H_1)$, $(G_1)$, $\mathcal{R}$

及び$\mathcal{P}$との間の関係を示している。

Theorem 8. If $T$ has a convex spectrum, i.e, $\sigma(T) = \mathrm{co}\,\sigma(T)$, then the following statements are mutually equivalent :

(i) $T$ is convexoid ,　　(ii) $T \in \mathcal{S}$ ,

(iii) $T \in (H_1)$ ,　　(iv) $T \in \mathcal{R}$ ,

(v) $T \in (G_1)$ ,　　(vi) $T \in \mathcal{P}$

(vii) $(T-\mu)^{-1}$ is spectraloid for all $\mu \notin \overline{W}(T)$ ,

(viii) $(T-\mu)^{-1}$ is spectraloid for all $\mu \notin \tilde{\sigma}(T)$ .

Proposition 5. $T \in \mathcal{P}$ is a spectroid if and only if there is a strong normal dilation $N$ of $T$ with $\overline{W}(N) = \sigma(T)$ .

Remark 3. 上の proposition で $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{R}$ に、かつ spectroid $\longrightarrow$ non-spectroid とすれば $\sigma \longrightarrow \tilde{\sigma}$ という結論になることは Fujii によって示されている。このように $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{R}$ なる対応は $\sigma \longrightarrow \tilde{\sigma}$ なる対応に適合し、Theorem 5 でも示されたように parallel な結果とみなすことができる。更に "$T \in \mathcal{Q}$ is a numeroid, then $T$ is a non-spectroid" に対して "$T \in \mathcal{U}$ is a numeroid, then $T$ is a spectroid" という結果も、これらの路線の延長上にあるとみなせる。

**6.** 第一節の定義1の(*)のoperator normとnumerical radius normを含む更に一般的な"operator radii"である$w_\rho^0(T)$でおきかえて議論を進めてみることも可成りの部分にわたり可能であるが、紙面の予定もあり割愛する。(ここに$w_\rho^0(T)$は$\rho$-dilationに関係して定義される)

## References


[1] Fujii, On some examples of non-normal operators. I, II and III. Proc. Japan Acad., 47(1971) 458–463, 48(1972) 118–123, and 48(1972) 124–129.

[2] Furuta, Generalized growth conditions and convexoid operators (to appear).

[3] G. R. Luecke, A class of operators on Hilbert space. Pacific J. Math., 41 (1971) 153–156.