数理解析研究所講究録
第 256 巻 1975 年 12-26

ある種の hyponormal operator について

大阪教育大　　藤井正俊

1. 序説. ここではヒルベルト空間上の有界線型作用素のみを扱うことにします。(以後、単に作用素という) 非正規作用素の研究は Halmos, Putnam などの人達によってはじめられ、多くのクラスが導入されました。その相互間の関係は古田[16]に叙述されておりますが、古田一中本の研究[17]以後、クラスの系列が検討され、[9], [11] では、

(I) Growth condition による系列

—— convexoid に続くクラス

(II) Spectral set による系列

—— normaloid, transaloid に続くクラス

が考察され、この2つの系列間にも平行性が成り立つことが示されました。(系列 (I), (II) 及び、クラス間の相互関係は、次節で図示します。)

ところが、最近、作用素の分解に関する研究にお

いて、次のような概念が導入されました。[11], [22]: $\mathcal{S}$ を作用素に関する性質とする。次の条件(*)をみたす多項式の族 $\{P_\alpha\}$ が存在するとき、$\mathcal{S}$ を algebraically definite (semidefinite) という。

(*) T が $\mathcal{S}$ をもつ $(T\in\mathcal{S}) \iff P_\alpha(T,T^*)=0$, $(P_\alpha(T,T^*)\geq 0)$.

作用素 T が algebraically (semi) definite な性質をもつとき T を algebraically (semi) definite という。例えば、正規作用素は algebraically definite であり、これから扱う hyponormal 作用素は semidefinite であります。以後、semidefinite も単に definite と呼ぶことにします。

ここでは、非正規作用素のうち algebraically definite による系列を中心に議論し、これまでに考察されている系列 (I), (II) との関連についても考えていくことにします。

2. k-hyponormal 作用素と heminormal 作用素.

系列 (I), (II) 以外の非正規作用素としては、次のようなものが知られており、それらの関係は次の如くであります：

quasinormal $\Longrightarrow$ subnormal $\Longrightarrow$ hyponormal $\Longrightarrow$ paranormal

このうち subnormal を除き、すべて algebraically definite であります。(paranormal 作用素は $T^{*2}T^2-2\lambda T^*T+\lambda^2\geq 0$ $(\lambda>0)$ なる T として特性化されています [1].) そこで、第三の系列として algebraically definite による系列を考えることができます：

quasinormal $\Longrightarrow$ hyponormal $\Longrightarrow$ paranormal.

ところが、このままでは subnormal がぬけたことや (I), (II) とのクラスの数に関するバランスからいっても、quasinormal と hyponormal との間が開きすぎています。そこで、subnormal 作用素と hyponormal 作用素を比較しながら、この開きを埋めていくことにします。

hyponormal と subnormal の大きな違いの一つに次のことがあげられます：T が hyponormal であっても、T^2 は必ずしも hyponormal とはならない, [18]。この違いを補うために、次のようなクラスを導入します：

$$(TT^*)^k \leq (T^*T)^k$$

をみたす T を k-hyponormal という, [15]. 明らかに、1-hyponormal は hyponormal のことであります。

補題 1. T が k-hyponormal ならば、T は(k−1)-hyponormal である。

$f(\lambda) = \lambda^\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ は operator monotone であることより(cf. [23])，$\alpha = \frac{k-1}{k}$ とすることによって、補題は証明できます。

定理 2. T が k-hyponormal ならば、T^k は hyponormal である。

証明. $T^{*k}T^k \geq (T^*T)^k$，$(TT^*)^k \geq T^kT^{*k}$ を示せば

よい。明らかに $k=1$ のとき成立します。k まで成り立ったとして、$k+1$ のとき成り立つことを示します。補題1より、T が k-hyponormal であることに注意して

$$T^{*k+1}T^{k+1} = T^*(T^{*k}T^k)T \geq T^*(T^*T)^kT \geq T^*(TT^*)^kT = (T^*T)^{k+1},$$

$$(TT^*)^{k+1} = T(T^*T)^kT^* \geq T(TT^*)^kT^* \geq T(T^kT^{*k})T^* = T^{k+1}T^{*k+1}.$$

また、Campbell も、hyponormal 作用素のサブクラスを考察している[5]。T が hyponormal で T^*T と TT^* が可換なとき、T を heminormal という。そして、彼は次の定理を証明しました。

定理 A. [5]. T が heminormal ならば、任意の n に対して、T^n は hyponormal である。

定理 3. T が heminormal ならば、T は k-hyponormal ($\forall k$) である。

証明. $A=T^*T$, $B=TT^*$ とすると、

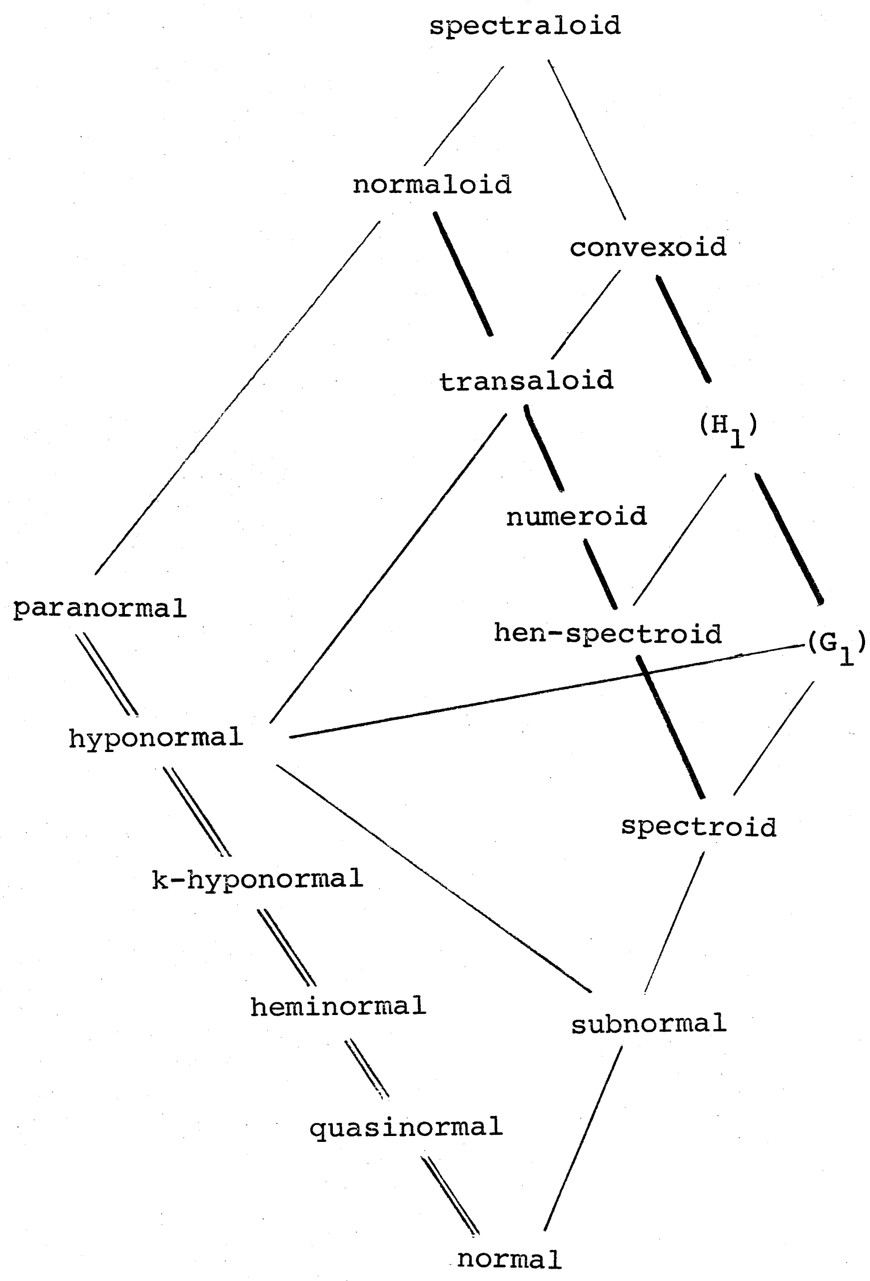
$$A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1}) \geq 0.$$

定理3は、定理2が定理Aの改善になっていることをも示している。定義より、k-hyponormal 及び、heminormal は明らかに、algebraically definite であり、定理3と補題1より、次のことがわかります:

quasinormal $\Rightarrow$ heminormal $\Rightarrow$ k-hyponormal

$\Rightarrow$ hyponormal $\Rightarrow$ paranormal.

この algebraically definite による系列を(III)とします。系列(I)—(III)の関係は下記の通りです。



Notations.

$\sigma(T)$: spectrum of T

$\tilde{\sigma}(T)$: hen-spectrum of T

(unbounded component of $(T)^c)^c$

$W(T)$: numerical range of T

$r(T)$: spectral radius of T

$w(T)$: numerical radius of T

(I) Classes on growth condition.

(G_1) for M	$\|(T - z)^{-1}\| \leqq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z,M)}$, $z \notin M$
spectraloid	$w(T) = r(T)$
convexoid	$\overline{W}(T)$ = convex hull of (T)
(H_1)	(G_1) for $\tilde{\sigma}(T)$
(G_1)	(G_1) for $\sigma(T)$

(II) Classes on spectral set.

normaloid	$\|T\| = r(T)$
transaloid	$T - z$: normaloid, $\forall z$
numeroid	$W(T)$: spectral set for T
hen-spectroid	$\tilde{\sigma}(T)$: spectral set for T
spectroid	$\sigma(T)$: spectral set for T

(III) Classes on algebraical definiteness.

paranormal	$\|Tx\|^2 \leqq \|T^2x\|\|x\|$, $\forall x$
hyponormal	$TT^* \leqq T^*T$
k-hyponormal	$(TT^*)^k \leqq (T^*T)^k$
heminormal	$TT^* \leqq T^*T$ and $T^*T^2T^* = TT^{*2}T$
quasinormal	$T^*T^2 = TT^*T$
subnormal	T has a normal extention.

3. 特性化. この節では，正規作用素から 2-hyponormal 作用素を一つの作用素の等式を使って特性化します。

定理 4. $TT^* = PT^*T$ とするとき，

(a) T; 2-hyponormal $\Longleftrightarrow$ P; contraction

(b) T; heminormal $\Longleftrightarrow$ P; positive contraction

(c) T; quasinormal $\Longleftrightarrow$ P; projection

この証明に際し，次の Douglas の定理[7]は中心的役割を演じています。

定理 B. A, B を作用素とするとき，次の条件は同値である: (1) $\exists \lambda \geq 0$; $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$, (2) $\exists C$; $A = BC$ (3) $\overline{\mathrm{ran}\, A} \subseteq \overline{\mathrm{ran}\, B}$.

ここで，(2) の作用素 C は次のように構成されています: (i) $C^*(B^*x) = A^*x$, (ii) $C^*|(\mathrm{ran}\, B^*)^\perp = 0$, (iii) $\|C\| \leq \lambda$.

定理 4 の証明. (a) T が 2-hyponormal ならば，(2) より $P = C^*$ が存在し，(iii) より，$\|P\| \leq 1$ となります。逆に，$TT^* = PT^*T$ なる contraction P があれば，

$$(TT^*)^2 = T^*TP^*PT^*T \leq (T^*T)^2$$

より，T は 2-hyponormal となります。

(b) T が heminormal ならば，2-hyponormal より，P は contraction となり，さらに，$x_1 \in \overline{\mathrm{ran}\, T^*T}$, $x_2 \in (\mathrm{ran}\, T^*T)^\perp$ に対して，$Px_2 = 0$ ((ii) より)，$Px_1 \in \overline{\mathrm{ran}\, T^*T}$ ((i) と (3) より)。よって，

$$(P(x_1+x_2),\ x_1+x_2) = (Px_1,\ x_1) \geq 0.$$

逆に，$0 \leq P \leq 1$ ならば，(a) より，T は hyponormal であり，

$$T^*T \cdot TT^* = T^*TPT^*T = PT^*T \cdot T^*T = TT^* \cdot T^*T.$$

より，T は heminormal であります。

(c) $T = U|T|$ が quasinormal ならば，U と $|T|$ は可換となり[3]，よって，

$$TT^* = U|T| \cdot |T|U^* = UU^*T^*T.$$

$P = UU^*$ とすれば，P は projection であります。逆に，P が projection ならば，

$$T^*T\ TT^* = T^*T\,PT^*T = T^*TP \cdot PT^*T = (TT^*)^2.$$

ところが，$(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{ran} T^*}$ より，$T^*T \cdot T = TT^*T$.

4. Monotone shift. heminormal 作用素の代表的な例として，monotone shift をあげることができます。この節では，monotone shift によって生成された C^*-algebra について考えてみます。monotone shift の特別な場合として，unilateral shift を考えることができますが，これは subnormal でもあります。そして，その生成する C^*-algebra については次のことが知られています。

定理 C. [6]. U を $\mathfrak{H}$ 上の unilateral shift とすれば，

$$C^*(U)\,/\,\mathcal{C}(\mathfrak{H}) \cong C(\mathbb{T}^1).$$

ただし、$C^*(U)$ は U によって生成された C^*-algebra，$\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ は $\mathfrak{H}$ 上の compact 作用素全体，$C(\mathbb{T}^1)$ は単位円 $\mathbb{T}^1$ 上の連続関数全とします。

定理 C は monotone shift に対しても成立する。この節では，S を injective monotone shift で $\|S\|=1$ とします。

定理 5．$C^*(S)/\mathcal{C}(\mathfrak{H}) \cong C(\mathbb{T}^1)$.

これを証明するために，C^*-algebra に関する準備を少し必要とします。複素数 λ に対して

$$\|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0,\quad かつ,\quad \|(T-\lambda)^*x_n\| \longrightarrow 0$$

をみたす単位ベクトルの列 $\{x_n\}$ が存在するとき，λ を T の正規近似固有値といい，その全体を $\pi_n(T)$ とします。$\{x_n\}$ の条件が "$\|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0$" のみのときが，通常の近似点スペクトル $\pi(T)$ です。正規近似固有値については [8], [9], [13], [19] 等で議論されておりますが，最も重要な結果は，次の定理であります。

定理 D．$\lambda \in \pi_n(T)$ であることの必要十分条件は $\varphi(T)=\lambda$ となる $C^*(T)$ の character φ が存在することである。

この結果より，$\pi_n(T)$ は $C^*(T)$ の character space $\mathfrak{X}$ (w^*-topology) と同相であること，すなわち，$C(\mathfrak{X}) \cong C(\pi_n(T))$ となることがわかります。また，$\mathcal{K}$ を $C^*(T)$ の可換子全体によって生成された閉両側イデアルとすると，$C^*(T)/\mathcal{K} \cong C(\mathfrak{X})$

となることより、$C^*(T)/\mathcal{K} \cong C(\pi_n(T))$ が成り立ちます。よって定理5を証明するためには (1) $\mathcal{K} = \mathcal{C}(\mathfrak{H})$，(2) $\pi_n(S) = \mathbb{T}'$ を示せば十分であります。

(1) [4]より、$C^*(S) \supseteq \mathcal{C}(\mathfrak{H})$. このことより、$S$は既約となり．$S^*S - SS^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ より、Arveson の定理[2]より．$\mathcal{K} = \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ となります。

(2) S は hyponormal より．$\pi_n(S) = \pi(S)$．また [24] において．$\pi(S) = \mathbb{T}'$ であることも知られています（これについては、[12]で初等的証明が与えられています。）

5. Monotone shift の一般化．この節では．作用素を weight にもつ shift について考えます。そして．この応用として．前節までで扱われていた作用素間の関係についても考えていきます。

$\mathfrak{H}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_n$ $(\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H})$，$\{A_n\}$ を $\mathfrak{H}$ 上の作用素の一様有界列とします。

$$(Ax)_n = A_n x_n, \quad x = (x_n) \in \mathfrak{H}_0$$

によって $\mathfrak{H}_0$ 上の作用素 A を定義することができます。また U を shift，すなはち，

$$(Ux)_n = x_{n-1} \qquad x = (x_n) \in \mathfrak{H}_0$$

ただし．$x_0 = 0$ とするとき，$S = UA$ は $\mathfrak{H}_0$ 上の作用素とな

りますが．このSを作用素 weights $\{A_n\}$ をもつ shift と呼ぶことにします．さらにスカラーの場合にならって

$$A_n A_n^* \leq A_{n+1}^* A_{n+1} \qquad n=1,2,\cdots$$

をみたすとき，Sを monotone といいます．

定理7. Sを作用素 weights $\{A_n\}$ を持つ shift とするとき．

(a) S : k-hyponormal $\Longleftrightarrow$ $(A_n A_n^*)^k \leq (A_{n+1}^* A_{n+1})^k$

特に，

(b) S : hyponormal $\Longleftrightarrow$ S : monotone

(c) S : heminormal $\Longleftrightarrow$ S : monotone，かつ．

$A_{n+1}^* A_{n+1}$ と $A_n A_n^*$ は可換

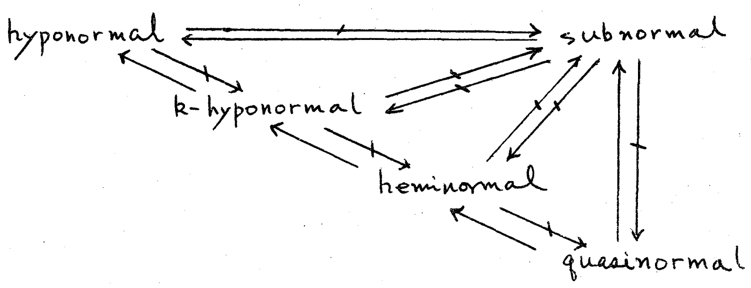
定理7より，次のことがわかります。

定理8. heminormal でない k-hyponormal 作用素が存在する。

例えば，$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ かつ，$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2k}}$ $(n \geq 2)$

とすれば，Sは定理の条件をみたすことがわかる。

この他，各クラス間の関係は下記の通りであります：



6. 作用素の分解. 最後に[21]に従って. 作用素の分解の方向から. 系列(III)と(I),(II)の違いについて考えてみます。作用素の分解は. Wold 分解にはじまり、その後. 一般の作用素の unitary part や normal part を求める問題にと発展してきました。そして. これらを一般化した次の定理が. [11]において示されました。(その束論的考察は[20]においてなされています。)

定理E. $\mathcal{S}$を algebraically definite な作用素に関する性質とするとき. 任意の作用素Tに対して. $\mathcal{S}$-part がある。

これは. 言いかえると. $T = T_0 \oplus T_1$ と一意的に直和分解でき, T_0は$\mathcal{S}$をもち. T_1はそのどんな non-zero reducing subspace に制限しても$\mathcal{S}$をもたないということであります。

一方. [10], [14] 等でよく使われているように. 任意の作用素Aに対して. 適当なBをとることにより、$T = A \oplus B$ の勝手なクラスに属するようにできる。これは. 系列(III)が$\mathcal{S}$-part をもつという意味で分解が一意的であるのに反して、(I),(II)は分解が一意的でないことを示している。このことより. 次の定理がわかります。

定理9. $\mathcal{R}$が(I)か(II)に属しているならば. $\mathcal{R}$は algebraically definite ではない。

また，(Ⅲ) が reduction に関して不変であるのに反して、(Ⅰ),(Ⅱ) は直和で構成できることより、それに関して不変ではないこともわかります。一節でも述べましたように，(Ⅰ) と(Ⅱ) が非常に接近した系列であることに比べて，(Ⅱ) と (Ⅲ) との距離はかなりあるように思われます。例えば，hyponormal と numeroid の関係についてはまだ知られておりません。

References

[1] T.Ando, Operator with a norm condition, Acta Sci. Math. Szeged., 33(1972), 169-178.

[2] W.B.Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.

[3] A.Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 723-728.

[4] J.W.Bunce and J.A.Deddens, C*-algebras generated by weighted shifts, Indiana Univ. Math. J., 23(1973), 257-271.

[5] S.L.Campbell, Linear operators for which T*T and TT* commute, II, Pacific J. Math., 53(1974), 355-361.

[6] L.A.Coburn, The C*-algebra generated by an isometry, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1969), 722-726.

[7] R.G.Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413-415.

[8] M.Enomoto, M.Fujii and K.Tamaki, On normal approximate spectrum, Proc. Japan Acad., 48(1972), 211-215.

[9] M.Fujii, On normal approximate spectrum, V, Proc. Japan Acad., 49(1973), 416-419.

[10] ———, On some examples of non-normal operators, I, II and III, Proc. Japan Acad., 47(1971), 458-463, 49(1973), 118-123 and 49(1973), 124-129.

[11] ———, M.Kajiwara, Y.Kato and F.Kubo, Decompositions of operators in Hilbert spaces, Proc. Japan Acad., to appear.

[12] ——— and Y.Kato, On heminormal weighted shifts, Math. Japonicae, to appear.

[13] ——— and R. Nakamoto, On normal approximate spectrum, II, Proc. Japan Acad., 48(1972), 297-301.

[14] ——— and ———, On some examples of non-normal operators, IV, Proc. Japan Acad., 49(1973), 591-595.

[15] ———and Y.Nakatsu, On subclasses of hyponormal operators, Proc. Japan Acad., 51(1975), 243-246.

[16] T.Furuta, Convexoid operators , Sugaku, 25(1973), 20-37.

[17] ———and R. Nakamoto, On the numerical range of an operator, Proc. Japan Acad., 47(1971), 279-284.

[18] P.R.Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton (1967).

[19] I.Kasahara and H.Takai, Approximate propervalues and characters of C*-algebras, Proc. Japan Acad., 48(1972), 91-93.

[20] Y.Kato and S.Maeda, Remarks on theorems of Szymanski, Math. Japonicae, to appear.

[21] ——— and I.Nishitani, On a remark of a paper of Kubo, to appear.

[22] F.Kubo, On algebraically definite operators, Math. Japonicae, to appear.

[23] G.K.Pedersen, Some operator monotone functions, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 309-310.

[24] W.C.Ridge, Approximate point spectrum of a weighted shift, Trans. Amer. Math. Soc., 147(1970), 349-356.