数理解析研究所講究録
第256巻 1975年 110-121

Reductive Operator について

東北大 教養　北野孝一

Hで separable, infinite-dimensional complex Hilbert space を、B(H)でH上の bounded linear operator の全体を表わす。

operatorが reductive であるとは invariant subspace がすべて reducing であるときである。J.A.Dyer, E.A.Pedersen 及び P.Porcelli [3] により、次の I, II が同値であることが証明された。

I. 任意の operator が自明でない invariant subspace をもつ.

II. 任意の reductive operator は normal である.

(E.A.Azoff, F.Gilfeather [2] は別証明を与えている.)

これで、invariant subspace の存在の問題と reductive operator の normality の問題が同値であることがわかったのである。以前から reductive operator の normality については研究されていたし、現在も多くの研究がなされてい

る。例えば、T. Andô [1], T. Saitô [14], K. Kitano [6], R.L. Moore [8], P.R. Halmos [5], P. Rosenthal, E. Nordgren, H. Radjavi [10], C.K. Fong [4] など.

この報告では reductive operator についてのいくつかの性質と quasi-similarity と normality との関連についての結果を紹介したいと思う。

$\mathbb{R}$で reductive operator の全体を、$\mathbb{T}$で transitive operator の全体を表わす。ここで operator が transitive であるというのは、自明な invariant subspace しか持たないときである。それから operator A で invariant な subspace の全体を LatA で表わす。

§1、 Reductive Operator の性質

この節の結果は P.R.Halmos, R.L.Moore によっている。

定理 $\mathbb{R}$の閉核(内点全体)は$\mathbb{T}$の部分集合である.

証明、reductive intransitive operator A が$\mathbb{R}$の interior に入らないことを示せばよい. A が intransitive より、自明でない invariant subspace が存在するこれを$\mathfrak{M}$とする. 更に A が reductive より、$\mathfrak{M}$はA^*でも invariant である. ここで$\mathfrak{M}$は invariant であるがしかし reducing でないような operator $Q \in B(H)$をとり、$A+\frac{1}{n}Q$ (nは任意の自然数)を考える。

$\mathfrak{M}$は$A+\frac{1}{n}Q$で invariant であるが$A^*+\frac{1}{n}Q^*$で invariant でない。従って$A+\frac{1}{n}Q$は reductive でない。$n\to\infty$のとき$A+\frac{1}{n}Q\to A$であるから$A\notin\mathbb{R}$の interior である。

系. $\mathbb{R}$の開核は空集合である。

証明。まず$\{T ; T\in B(H)\ \text{s.t.}\ \sigma_p(T)\neq\phi\}$なる集合は$B(H)$の中で dense であることを示す。任意の$A\in B(H)$に対して$\partial\sigma(A)\subset\sigma_{ap}(A)$であるから$\sigma_{ap}(A)\neq\phi$である。次に任意の$\lambda\in\sigma_{ap}(A)$, $\varepsilon>0$に対して、$\|Ae-\lambda e\|<\varepsilon$なるような単位ベクトル$e$が存在する。$e$への projection を$P$とし、$A_0=A-(I-P)AP$とおく。$A_0e=(Ae,e)e$であるから$\sigma_p(A_0)\neq\phi$である。ところで任意の$f\in H$に対して

$$\begin{aligned}\|(A-A_0)f\|=\|(I-P)APf\|&\leqq|(f,e)|\,\|(I-P)Ae\|\\&\leqq\|f\|\,\|Ae-(Ae,e)e\|\leqq 2\varepsilon\|f\|\end{aligned}$$

従って$\|A-A_0\|\leqq 2\varepsilon$. さて、eigenvalue をもつということは transitivity が成立しないから上に示したことより$\mathbb{T}$の interior は空集合である。前に示した定理より系が得られる。

$\mathbb{R}$の complement は dense であるばかりでなく、その interior は non-empty である。

定理. Uを non-invertible isometry operator, $A\in\mathbb{R}$とするとき、$\|U-A\|\geqq 1$が成立つ。

証明。もし$\|U-A\|<1$とする。$\|U^*-A^*\|<1$となるが、

まず $\mathrm{Ker}\,A^* \neq \{0\}$ を示す。 $\|U^*U - A^*U\| < 1$ 即ち $\|1 - A^*U\| < 1$ であるから A^*U が invertible となる. ここで $\mathrm{ran}\,A^* = H$ 即ち $\mathrm{Ker}\,A^* = \{0\}$ とする. closed graph theorem より A^* が invertible. 従って U が invertible となり仮定に反する. ゆえに $\mathrm{Ker}\,A^* \neq \{0\}$ である. 次に A が reductive であるから $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A^*$ 従って $Af = 0$ なるような $f \neq 0$ が存在する. しかし

$$\|f\| = \|Uf\| = \|(U-A)f\| \leqq \|U-A\|\|f\| < \|f\|$$

となり矛盾が生ずる。従って $\|U-A\| \geqq 1$ でなければならぬ。

この定理より. 任意の non-invertible isometry operator と $\mathbb{R}$ との距離は 1 であることがわかる.

次に reductivity と polar decomposition との関係について考えてみる。

補題. $A \in \mathbb{R}$ としその polar decomposition を $A = UP$ とする. そうすれば sub-space $\mathfrak{M} \subset H$ が存在して、$H = \mathfrak{M}^\perp \oplus \mathfrak{M}$ に関して

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされる. 但し、$\mathrm{Ker}\,A_1 = \mathrm{Ker}\,P_1 = \{0\}$, U_1 は unitary operator である.

証明. $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\,A$ とおく. $A \in \mathbb{R}$ より $\mathfrak{M}$ は A を reduce するから A の行列表現は左辺のようになる. 但し $A_1 = A|\mathfrak{M}^\perp$. ここで $A_1 = U_1 P_1$ を $\mathfrak{M}^\perp$ における polar decomposition とする. $\mathrm{Ker}\,A_1 = \{0\}$ であるから decomposition の定義より $\mathrm{Ker}\,U_1 = \mathrm{Ker}\,P_1$

$=\{0\}$である．更に A_1 が reductive であるから $\operatorname{Ker} A_1^* = \operatorname{Ker} A_1$ 従って $\operatorname{Ker} U_1^* = \{0\}$ となる．partial isometry で．$\operatorname{Ker} U_1 = \operatorname{Ker} U_1^* = \{0\}$ であるから U_1 は unitary operator である．次に $U_1 \oplus 0 = U$，$P_1 \oplus 0 = P$ を示せばよい．$U_1 \oplus 0$ は partial isometry であり，$P_1 \oplus 0$ は positive でありその上 $\operatorname{Ker} U_1 = \operatorname{Ker} P_1$ より $\operatorname{Ker}(U_1 \oplus 0) = \operatorname{Ker}(P_1 \oplus 0)$ である従って polar decomposition の一意性より $U = U_1 \oplus 0$，$P = P_1 \oplus 0$ が成立つことがわかる。

定理．$A \in \mathbb{R}$ で．$\operatorname{Ker} A = \{0\}$ とし．polar decomposition を $A = UP$ とするならば $\operatorname{Lat} A \subset \operatorname{Lat} U^* \cap \operatorname{Lat} P$ が成立つ．

証明．$A \in \mathbb{R}$ 及び 1-1 より U は unitary かつ P は 1-1 となる．任意の $\mathfrak{M} \in \operatorname{Lat} A$ に対して $A^*\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ であるから $A^*A = P^2$ で $\mathfrak{M}$ は invariant になる．ところで $\operatorname{Lat} P^2 \subset \operatorname{Lat} P$ であるから $\mathfrak{M} \in \operatorname{Lat} P$ がいえる．次に任意の $f \in \mathfrak{M}$ に対して $U^*f = g + h$，$g \in \mathfrak{M}$，$h \in \mathfrak{M}^\perp$ とする．$A \in \mathbb{R}$ より $A^*f \in \mathfrak{M}$ 即ち $A^*f = PU^*f = Pg + Ph \in \mathfrak{M}$．しかも $P^* = P$ より $Pg \in \mathfrak{M}$，$Ph \in \mathfrak{M}^\perp$ であり．更に $Pg + Ph \in \mathfrak{M}$ であったから $Ph = 0$ となる．P は 1-1 より $h = 0$、即ち $U^*f \in \mathfrak{M}$ が得られる。

この定理は実はもっと強い形で成立つのである．

定理．$A \in B(H)$ で，polar decomposition を $A = UP$ とするとき．次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $A \in \mathbb{R}$，

(ii)　$\mathrm{Lat}\, A \subset \mathrm{Lat}\, U^* \cap \mathrm{Lat}\, P$,

(iii)　$\mathrm{Lat}\, A = \mathrm{Lat}\, U \cap \mathrm{Lat}\, U^* \cap \mathrm{Lat}\, P$.

証明. (i)⇒(ii) 今 Q を $\mathrm{Lat}\, A$ に属する sub-space への projection とする. $A \in \mathbb{R}$ より $AQ = QA$ である. $f \in \mathrm{Ker}\, A$ に対して $AQf = QAf = 0$ であるから $Qf \in \mathrm{Ker}\, A$ となる. ここで $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\, A$ とおくならば, $\mathfrak{M}$ 及び $\mathfrak{M}^\perp \in \mathrm{Lat}\, Q$ となる. $A_1 = A|\mathfrak{M}^\perp$ とし、$A_1 = U_1 P_1$ とする. (補題をみよ). そして $\mathfrak{N} \in \mathrm{Lat}\, A$ で $QH = \mathfrak{N}$ としておく. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$, 但し $\mathfrak{N}_1 \in \mathfrak{M}^\perp$ かつ $\mathfrak{N}_2 \in \mathfrak{M}$ と表わせる. 前定理より $\mathfrak{N}_1 \in \mathrm{Lat}\, U_1^* \cap \mathrm{Lat}\, P_1$ である. よって $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ は $U^* = U_1^* \oplus 0$ 及び $P = P_1 \oplus 0$ で invariant である. 即ち $\mathrm{Lat}\, A \subset \mathrm{Lat}\, U^* \cap \mathrm{Lat}\, P$ がいえた。

(ii)⇒(i). sub-space が A で invariant であれば, 仮定より U^* 及び P で invariant である. 従って $A^* = PU^*$ で invariant となる. 即ち $A \in \mathbb{R}$ である。

(iii)⇒(ii) 明らか。

(i) 又は (ii)⇒(iii) (ii) から出発して $\mathrm{Lat}\, A$ に属する space の orthogonal complement を考えることにより $\mathrm{Lat}\, A^* \subset \mathrm{Lat}\, U \cap \mathrm{Lat}\, P$ を得る. (i) により $\mathrm{Lat}\, A = \mathrm{Lat}\, A^*$ であるから $\mathrm{Lat}\, A \subset \mathrm{Lat}\, U \cap \mathrm{Lat}\, U^* \cap \mathrm{Lat}\, P$ を得る. 次に U 及び P で invariant であれば A で invariant になるから $\mathrm{Lat}\, A =$

Lat $\mathcal{U}$ ∩ Lat $\mathcal{U}^*$ ∩ Lat P が得られる。

§2. reductive operatorがnormalとなる十分条件

operator $A, B \in B(H)$ に対して，1対1かつ dense range をもつような operator X, Y が存在して，$AX = XB$ 及び $YA = BY$ が成立つとき，AとBは quasi-similar であるという．この quasi-similarity と hyperinvariant sub-space に関しては，次の定理が成立つ．(Sz.-Nagy, C. Foiaş: c.f. [9, 11, 13]).

<u>定理</u>. AとBが quasi-similarであるとする．もしAが自明でない hyper-invariant subspace を持つならば，Bも又自明でない hyper-invariant sub-space を持つ．

更に V. Lomonosov により次の定理が証明された．(もとの論文[7]では注に書いてある) (c.f. [7, 11, 13]).

<u>定理</u>. non-zeroな compact operator と可換な non-scalar operator $A \in B(H)$ は自明でない hyper-invariant sub-space を持つ．

ここで ↔ で可換，〜 で quasi-similar を表わすならば，上に示した2つの定理を考慮することにより次のような diagram を考えることができる．

$$K(\neq 0) \longleftrightarrow A(\neq \lambda I) \sim B \longleftrightarrow C$$

$C \in B(H)$ が自明でない invariant sub-spaceをもつことがわかる．Kが non-zero compact operatorという条件のもとで動いたとき，

Cは B(H) の中でどんな集合を作るか？ これが解ければよいのですが今のところよく解らない．しかしながら quasi-similar という概念は重要な働きをしていることがわかる．しかし unbounded operator を仲立ちにしているので割りと取り扱い難い．最近 similar な operator に関してはいくつかの結果が得られている（例えば L.A. Fialkow, D.A. Herrero 等）．

以下において quasi-similarity と normality に関連して，H. Radjavi, P. Rosenthal [13] (p.197) にある問題に対して，C.K. Fong [4] が肯定的に解決を与えた。

定理．normal operator と quasi-similar な operator のすべての hyper-invariant sub-space が reducing なら，その operator は normal である．

証明．normal operator を N とし，これと quasi-similar な operator を $T \in B(H)$ とする．1対1かつ dense range を持つような X, Y なる operator が存在して $TX = XN$ 及び $NY = YT$ が成り立っているわけである．N の spectral measure を E としておく．任意の Borel set σ に対して $E(\sigma)H$ は N の hyper-invariant sub-space となる．ここで $\mathcal{L}$ を N の hyper-invariant sub-space としたとき，$g(\mathcal{L}) = \vee \{ \overline{AX\mathcal{L}} : AT = TA \}$ とおくならば次のことが成立することが示される（see [9: chap II §5]）．

(i) $g(\mathcal{L})$ は T の hyper-invariant sub-space になっている．

(ii) $\overline{Yq(\mathcal{L})} = \mathcal{L}$,

(iii) $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ ならば $q(\mathcal{L}) \subset q(\mathcal{L}')$ である,

(iv) $\bigvee_\alpha q(\mathcal{L}_\alpha) = q(\bigvee_\alpha \mathcal{L}_\alpha)$,

(v) $q(\{0\}) = \{0\}$, $q(H) = H$.

定理の仮定と(i)より $q(\mathcal{L})$ が T を reduce することがわかる. ここで $P = P_{q(\mathcal{L})}$, $Q = P_{q(\mathcal{L}^\perp)}$ なる orthogonal projection P, Q を定義する. reducing より $TP = PT$ が得られる. ところで $q(\mathcal{L}^\perp)$ は T で hyperinvariant であるから P で invariant である即ち $QPQ = PQ$. 従って $PQ = QP$ である. 他方(ii)より

$$\overline{Yq(\mathcal{L})} \cap \overline{Yq(\mathcal{L}^\perp)} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{0\}.$$

ゆえに $q(\mathcal{L}) \cap q(\mathcal{L}^\perp) = \{0\}$ である. また次の関係

$$\overline{q(\mathcal{L}) + q(\mathcal{L}^\perp)} \supset \overline{X\mathcal{L} + X\mathcal{L}^\perp} = \overline{X(\mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp)} = H$$

が成り立つから $P = I - Q$, あるいは $q(\mathcal{L}^\perp) = q(\mathcal{L})^\perp$ であることがわかった. 任意の Borel set σ, τ , $\sigma \cap \tau = \phi$ に対しては $E(\sigma)H \perp E(\tau)H$ 又は $E(\sigma)H \subset \{E(\tau)H\}^\perp$ であるから (ii)より $q(E(\sigma)H) \subset q(\{E(\tau)H\}^\perp) = q(E(\tau)H)^\perp$ 即ち $q(E(\sigma)H) \perp q(E(\tau)H)$ である. ここで任意の Borel set σ に対して

$$F(\sigma) = P_{q(E(\sigma)H)}$$

とおく. $\sigma \cap \tau = \phi$ ならば $F(\sigma)F(\tau) = F(\tau)F(\sigma) = 0$ であり, (i), (v)より F が spectral measure になることがわかる. ここで

$$M = \int z\, dF_z$$

により normal operator M を定義する．T と M が一致することを示せばよい．そのためにまず $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ を示す．(ii)より $\overline{YF(\sigma)H} = E(\sigma)H$ が成立する．ここで $F(\sigma)y = y$ なる y は $F(\sigma)H$ に属する．従って $Yy \in E(\sigma)H$ ゆえに $E(\sigma)Yy = Yy = YF(\sigma)y$ である．次に $F(\sigma)y = 0$ なる y は $F(\sigma^c)y$ と一致し，$\overline{YF(\sigma^c)H} = E(\sigma^c)H$ を考慮すれば $E(\sigma^c)Yy = Yy$ or $E(\sigma)Yy = 0$ となる．以上より任意の $y \in H$ に対して $E(\sigma)Yy = YF(\sigma)y$ 即ち $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ が得られる．また $E(\sigma) = 0$ と $F(\sigma) = 0$ は同値であるから N と M は同じ spectrum を持つ．その spectrum 上 $|f(z) - z|$ が十分小さくなるような step function を f とする．そうすれば $\|f(N) - N\|$ 及び $\|f(M) - M\|$ 両方とも small でありしかも $f(N)Y = Yf(M)$ が成り立つ．従って $NY = YM$ 即ち $YT = YM$ である．ところで Y は1対1であるから $M = T$ となり，T が normal operator であることが示された．

最後に invariant subspace の問題と同値な命題を1つ述べておくことにする．(H. Radjavi, P. Rosenthal [12], T.P. Wiggen [16])．

定理．次の (i), (ii) は同値である．

(i) A が reductive operator であるならば normal である．

(ii) A が reductive operator であれば $A \oplus A$ も reductive operator（H⊕H上の）である.

証明. (i)⇒(ii)： A と I により生成される weakly closed algebra を W(A) とおく. W(A) が star-algebra であれば W(A⊕A) も star-algebra になるから Sarason の定理 [15] より (i)⇒(ii) の成り立つことわかる.

(ii)⇒(i)： $\mathfrak{M}$ を A の graph とする. 即ち $\mathfrak{M}=\{x\oplus Ax;\ x\in H\}$ とおけば $\mathfrak{M}$ は $A\oplus A$ で invariant になる. 従って $A\oplus A$ が reductive ならば $(A^*\oplus A^*)(x\oplus Ax)=A^*x\oplus A^*Ax\in\mathfrak{M}$ が任意の $x\in H$ に対して成り立つから $A^*Ax=AA^*x$ が得られ, A が normal であることわかる.

参考文献

[1] T. Andô, Note on invariant subspaces of a compact normal operator, Arch. Math., 14(1963), 337-340

[2] E. A. Azoff & F. Gilfeather, Measurable choice and the invariant subspace problem, Bull. AMS, 80(1974), 893-895

[3] J. A. Dyer, E. A. Pedersen & P. Porcelli, An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture, Bull. AMS, 78(1972), 1020-1023

[4] C. K. Fong, A sufficient condition that an operator be normal, Michigan Math. J., 21(1974), 161-162

[5] P. R. Halmos, Irreducible operators, Michigan Math. J., 15(1968), 215-223

[6] K. Kitano, Some conditions on a reductive operator implying normality or spectrality, (to appear)

[7] V. Lomonosov, On invariant subspace of families of operators commuting with a compact operator, Fankcional. Anal. i

Prilozen, 7(1973), 55-56

[8] R. L. Moore, Properties of reductive operators, (preprint)

[9] B. Sz.-Nagy & C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, Amsterdam, 1970

[10] E. Nordgren, H. Radjavi & P. Rosenthal, On operators with reducing invariant subspaces, (to appear)

[11] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, Math. Surveys, 13, Amer. Math. Soc., 1974

[12] H. Radjavi & P. Rosenthal, A Sufficient condition that an operator algebra be selfadjoint, Canad. J. Math., 23(1971), 588-597

[13] H. Radjavi & P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New-York, 1973

[14] T. Saitô, Some remarks on Andô's theorem, Tohoku Math. J., 18(1966), 404-409

[15] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966), 511-517

[16] T. P. Wiggen, On direct sums of reductive operators, Proc. AMS, 45(1974), 313-314