

葉を葉へうつすはのこみについて

京大理 足立正久

1959 年 M. W. Hirsch [2] は次の定理を示した。
 V^m, W^n をそれぞれ C^∞ -manifold of dimension m, n とする。
paracompact

$\text{Imm}(V, W) = \{ f: V \rightarrow W, \text{immersion} \}$, with C^1 -topology.

$\text{Mon}(TV, TW) = \{ \phi: TV \rightarrow TW, \text{monomorphism} \}$,
with compact-open topology.

mapping の differential をとることは C^1 級の continuous map
をとり:

$$d: \text{Imm}(V, W) \longrightarrow \text{Mon}(TV, TW).$$

Hirsch の Theorem.

$m < n \Rightarrow$ d は weak homotopy equivalence

そこで、我々は次のものについて考えてみる。

(V, \mathcal{F}) : foliated manifold,

ここで、 \mathcal{F} は codim. p on V^m ,

(W, \mathcal{F}') : foliated manifold,

ここで \mathcal{F}' は foliation of codim. q on W^n .

$$\text{Imm}(V, W) \supset \text{Imm}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(V, W)$$

||

$$\left\{ \begin{array}{l} f: V \rightarrow W; \text{ immersion, } f \text{ は } \mathcal{F} \text{ の leaf} \\ \text{を } \mathcal{F}' \text{ の leaf } \mapsto \mathcal{F} \end{array} \right\},$$

with relative topology,

$$\text{Mon}(TV, TW) \supset \text{Mon}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(TV, TW)$$

||

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi: TV \rightarrow TW; \text{ monomorphism} \\ TV = T\mathcal{F} \oplus \nu\mathcal{F}, \\ TW = T\mathcal{F}' \oplus \nu\mathcal{F}', \\ \phi \text{ は } T\mathcal{F} \text{ の fibre } \in T\mathcal{F}' \text{ の} \\ \text{fibre } \mapsto \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

with relative topology.

continuous

そこで、differential $\in \mathcal{C}^\infty$ map $d\phi$ は、次の map を induce する:

$$d: \text{Imm}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(V, W) \rightarrow \text{Mon}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(TV, TW).$$

問題 上の map は weak homotopy equivalence か?

これについて考える。

次の一方向的部分的結果をうる。

i) $W = \mathbb{R}^n$, ii) \mathcal{F}' は $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-b} \times \mathbb{R}^b$ と \mathcal{F} , \mathcal{F}' は $\mathbb{R}^{n-b} \times y, y \in \mathbb{R}^b$ ε leaf

とける foliation,

iii) $p < b, m-p < n-b$.

i), ii), iii) \Rightarrow 上の d は π_0 の向きの onto map ε induce する。

証明の方法は Gromov の Convex integration theory [1] による。

上の結果は誤りであった。福井和彦氏により反例があげられた。

References

- [1] M. L. Gromov, Convex integration of differential relations I,
Izv. Akad. Nauk SSSR., 37(1973), 329-343;
Russian Math.-Izv., (1973),
- [2] M. W. Hirsch, Immersions of manifolds,
Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959), 242-276.