数理解析研究所講究録
第 257 巻 1975 年 101-113

C^∞ 函数のイデアルの零点集合について

近畿大 理工　泉 脩藏

C^∞ 函数あるいはその芽(germ)のなす環に於けるイデアルの零点集合について述べる。 C^∞ の幾何においては C^0 的な側面と実解析的な側面が交錯している。ここではそれぞれの特徴が出ている二つの話を紹介する。(I)では個々のイデアルではなくその全体のなす族と零フィルター(あるいはその局所化したもの)の族の対応を束論的に調べる。(II)では共通零点の次元について考察し、またそれが実解析集合に似た形を持つための条件を解析性を用いずに与える。((I)は元来(II)の基礎づけとして始めた研究であった。)

I. イデアルと零フィルターの双対性 ([5],[6])

集合 S の部分集合から成る集合族 $\tilde{S} \subset P(S)$ が次の二条件を充すとき、S 上のムーム族(Moore family)と呼ばれる。

(i) $S \in \tilde{S}$.

(ii) $X_\lambda \in \tilde{S}\ (\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \tilde{S}$.

ムーア族$\tilde{S}$は包含関係に関して完備束となっている。すなわち$\tilde{S}$は(半)順序集合であり任意の部分集合$A\subset\tilde{S}$が上限$\bigvee_{X\in A}X$及び下限$\bigwedge_{X\in A}X$をもっている。

以下M^nをパラコンパクトなn次元C^∞多様体とする。

(i) M上のC^∞函数全体のなす環$\mathcal{E}(M)$の全イデアルの族$\tilde{\mathcal{E}}(M)$はムーア族をなしている。

(ii) Mの閉集合全体$\mathcal{Cl}(M)$は包含関係に関して完備分配束となっている。その双対イデアル全体$\widetilde{\mathcal{Cl}}(M)$は$\mathcal{Cl}(M)$上のムーア族である。($\mathcal{Cl}(M)$自身も$M$上のムーア族であるが、このことはここでは重要でない。)

但し(ii)で、ある束Lの部分集合$\mathfrak{a}$が双対イデアルであるとは$\mathfrak{a}$が次の条件(i),(ii)をみたすことである。

(i) $a, b\in\mathfrak{a} \Longrightarrow a\wedge b\in\mathfrak{a}$.

(ii) $a\in\mathfrak{a},\ b\in L \Longrightarrow a\vee b\in\mathfrak{a}$.

したがって$\widetilde{\mathcal{Cl}}(M)$の元は閉集合からなる$M$上のフィルターのようなものである。

さて関数の零点集合をとることによって$Z:\mathcal{E}(M)\to\mathcal{Cl}(M)$なる写像が定義される。もし$\mathfrak{a}\in\tilde{\mathcal{E}}(M)$, $\mathfrak{A}\in\widetilde{\mathcal{Cl}}(M)$ならば$Z(\mathfrak{a})\in\widetilde{\mathcal{Cl}}(M)$, $Z^{-1}(\mathfrak{A})\in\tilde{\mathcal{E}}(M)$となるから$Z$は次のような写像をひきおこす。

$$Z_*:\ \tilde{\mathcal{E}}(M)\ni\mathfrak{a}\longrightarrow Z(\mathfrak{a})\in\widetilde{\mathcal{Cl}}(M).$$

$$\mathcal{Z}^*: \widetilde{\mathfrak{Cl}}(M) \ni \mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{Z}^{-1}(\mathfrak{a}) \in \widetilde{\mathcal{E}}(M).$$

$Z_*(\mathfrak{a})$は$\mathfrak{a}$の零フィルターと呼ばれる。 $\mathfrak{a}\in\widetilde{\mathcal{E}}(M)$が有限生成ならば$Z_*(\mathfrak{a})$は一つの閉集合で生成される。 そうでないときも$Z_*(\mathfrak{a})$の元の共通部分をとれば$\mathfrak{Cl}(M)$の元が一つ定まる。 通常この閉集合を$\mathfrak{a}$の"零"と呼ぶ。 しかしこの流儀では函数の芽のイデアルを扱うとき一つの困難が生じる。無限個の閉集合の芽の共通部分は、閉集合の芽としてはうまく定義できないのである（例としてはR^2の原点0でy軸に右から接している閉円板全体の0での芽の共通部分を考えよ。一般的に云うと完備束の帰納的極限は必ずしも完備とはならないからである）。 この理由でこの節Iではイデアルの"零"として零フィルターそのものを考えることにする。

一般に完備束$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$の間に写像 $\Phi: \mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}'$があって濃度が$m$以下の部分集合$\mathcal{K}\subset\mathcal{L}$に対して $\varphi(\bigvee_{k\in\mathcal{K}} k)=\bigvee_{k\in\mathcal{K}}\varphi(k)$ となるとき、φは$(m\vee)$連続ということにする。 特に任意濃度の$\mathcal{K}$に対して上式が成立するとき$(\forall\vee)$連続と記す。
$(m\wedge)$連続，$(m\vee, n\wedge)$連続の定義も同様である。

(1) 定理. $Z_*: \widetilde{\mathcal{E}}^r(M)\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{Cl}}(M)$ は$(\forall\vee, \alpha\wedge)$連続であり、$Z^*: \widetilde{\mathfrak{Cl}}(M)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{E}}^r(M)$ は$(\forall\wedge)$連続である。 $Z_*\circ Z^*$は$\widetilde{\mathfrak{Cl}}(M)$の恒等写像である。

この定理を局所化してみよう。 一点$a\in M$を含むMの開

集合の族 G_a をとり、これを包含関係と双対(逆)の順序によって有向集合と見なすことにする。 $U, V \in G_a$, $U \supset V$ のとき制限写像 $\varphi_{VU}: \mathcal{E}(U) \ni f \longrightarrow f|V \in \mathcal{E}(V)$ は環の準同型であり $\varphi_{WV} \circ \varphi_{VU} = \varphi_{WU}$ をみたす。 したがって帰納的極限 $\varinjlim_{G_a} \mathcal{E}(U) \equiv \mathcal{E}_a$ は a での C^∞ 函数の芽の環と呼ばれる環となっている。 これのイデアルの全体 $\tilde{\mathcal{E}_a}$ はもちろんムーア族をなしている。 一方、制限写像
$\gamma_{VU}: \mathcal{Cl}(U) \ni A \longrightarrow A \cap V \in \mathcal{Cl}(V)$ についても束の帰納系ができ、帰納的極限 $\varinjlim_{G_a} \mathcal{Cl}(U) = \mathcal{Cl}_a$ は分配束となっている(これはもはや完備ではない)。 これの双対イデアル全体のなすムーア族を $\tilde{\mathcal{Cl}_a}$ とおく。 $Z: \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{Cl}(U)$ を用いて自然な写像 $Z_a: \mathcal{E}_a \longrightarrow \mathcal{Cl}_a$ が定義され、U上のときと同様にして写像 $Z_{a*}: \tilde{\mathcal{E}_a} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Cl}_a}$ 及び $Z_a^*: \tilde{\mathcal{Cl}_a} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}_a}$ がひきおこされる。

(2) <u>定理</u> $Z_{a*}: \tilde{\mathcal{E}_a} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Cl}_a}$ は $(\vee V, \cap \wedge)$ 連続であり、$Z_a^*: \tilde{\mathcal{Cl}_a} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}_a}$ は $(\vee \wedge)$ 連続である。 $Z_{a*} \circ Z_a^*$ は $\tilde{\mathcal{Cl}_a}$ の恒等写像である。

これらの定理はこれ以上改良できない。 証明には次の Tougeron の補題が重要で残りは形式的考察をつみかさねればよい。 また C^r $(0 \leqq r \leqq \infty)$ の場合について同じ結果が得られることを注意しておく。

(3) 補題 (Tougeron [13], [14]). $V \subset U$, $f_1, f_2, f_3, \cdots \in \mathcal{E}^\infty(V)$ のとき可逆な $g \in \mathcal{E}^\infty(V)$ が存在して gf_i は全て $U-V$ で ∞ フラットな（各階の微係数が全て 0 となる）$\mathcal{E}^\infty(U)$ の元に延長できる。このことにより $\mathcal{E}^\infty(V)$ は $\mathcal{E}^\infty(U)$ 加群として平坦である。

$\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathcal{E}}(M)$ に対して $Z^* \circ Z_*(\mathfrak{a})$ の一つの特徴付けを与えてみよう。$\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathcal{E}}(M)$ に対して ∞ 根基を次のように定義する。

$$\sqrt[\infty]{\mathfrak{a}} = \{ f \in \mathcal{E}(M) : \text{ある狭義単調増大で } \theta(0)=0 \text{ なる } \theta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \text{ について } \theta \circ f \in \mathfrak{a} \}.$$

(4) 命題. $\sqrt[\infty]{\mathfrak{a}} = Z^* \circ Z_*(\mathfrak{a})$.

芽のイデアルについても同様のことがいえる。

II 零点集合が良い性質をもつイデアル ([6], [7])

良く知られているように任意の閉集合は C^∞ 函数の零点集合となりうる。以下イデアルに自然な条件をつけてその零点集合がいくらかでも実解析集合に似た性質を持つようにする事を試みる。問題の出発点は次の結果である。

(5) 定理 (Thom [12]). $\mathcal{E}^\infty(M)$ の有限生成 Łojasiewicz イデアルの共通零点は正則部分多様体の閉包である。

但しここで $\mathfrak{a}$ が Łojasiewicz イデアルであるとは，その共通零点を X とするとき，任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対して

$f \in \mathfrak{a}$, $a>0$, $b>0$ が存在して $x \in K$ に対して

$|f(x)| \geq a \cdot d(x, X)^b$ （$d(\ ,\ )$ はリーマン距離）がなりたつことである。またこの部分多様体の次元は点によって異ることがある。

さて一点 $a \in M^n$ で閉集合の芽 X_a が与えられたとき，その代表元 X をとり $\dim X_a = \min_{U:a\text{の近傍}} (\dim X \cap U)$ とおいて X_a の幾何的次元ということにする。もし X が正則部分多様体 Y の閉包となっておれば $\dim X_a = \min_{U:a\text{の近傍}} (\dim Y \cap U)$ となる。一方 X_a で 0 となる函数のイデアル $\subset \mathcal{E}_a$ を $\mathfrak{a}_a$ とし a での形式的テイラー展開を $T_a : \mathcal{E}_a \longrightarrow \mathcal{F}_n$ と記すとき，X_a の代数的次元 $\operatorname{adim} X_a$ を $\mathcal{F}_n / T_a \mathfrak{a}_a$ の Krull 次元をもって定義する（$\mathcal{F}_n$ は局所座標の形式的巾級数環）。すると Malgrange の準備定理によって次の事がわかる。

$\boxed{\text{(6) \underline{命題}.　任意の閉集合の芽 } X_a \text{ に対して } \operatorname{adim} X_a \geq \dim X_a.}$

$\dim X_a$ の逆の評価を得るために少し条件を付けよう。函数のイデアル（あるいは函数の芽の有限生成のイデアル）$\mathfrak{a}$ が性質 (Z) をもつとは，集合（集合芽）のイデアルであること すなわち「$\mathfrak{a}$ の共通零点（共通零点の芽）の上で 0 となる元はすでに $\mathfrak{a}$ に含まれている」こととする。（$\mathfrak{a}$ が有限生成のときこのことを (I) の記号で記せば $\sqrt[\infty]{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ となる。）$\mathfrak{a}_a$ を $\mathcal{E}_a$ で (Z) をみたす有限生成イデアルとする。$\mathfrak{a}_a$ の生成元

の代表元 $f_1, f_2, \cdots, f_p$ に対し近傍 U が存在して

$\mathfrak{a} = (f_1|U, f_2|U, \cdots, f_p|U)$ は $\mathcal{E}(U)$ で (Z) をみたす ([6], [13])。

すると $\mathfrak{a}$ は U の Łojasiewicz イデアルとなり (cf. [2], [14])，その共通零点 X は正則部分多様体 Y の閉包となる．$b \in Y$ のとき $\mathfrak{a}$ で生成されるイデアル $\mathfrak{a}\mathcal{E}_b \subset \mathcal{E}_b$ も $\mathcal{E}_b$ において (Z) をみたし多様体の芽 Y_b の定義方程式を含むから，イデアルの生成元の最小個数を $g(\ )$ で表わせば $\dim Y \geqq n - g(\mathfrak{a})$ となりしたがって $\dim X_a \geqq n - g(\mathfrak{a}_a)$ となる。一方 $\mathcal{E}_a$ は擬局所環であるから a を中心とする局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ をとるとき $g(\mathfrak{a}_a) = \dim_R \{\mathfrak{a}_a / \sum_{i=1}^n x_i \mathfrak{a}_a\} = \dim_R \{T_a\mathfrak{a}_a / \sum_{i=1}^n x_i \cdot T_a \mathfrak{a}_a\}$ (cf. [10, P.81])。最後の等号は次の補題によった。

<u>(7) 補題 (Bochnak-Risler [3]).</u> $\mathfrak{a}$ が C^∞ 位相に関して閉じた $\mathcal{E}(M)$ の有限生成イデアルのとき．$f_1, f_2, \cdots, f_p \in \mathfrak{a}$ かつ $(T_a f_1, T_a f_2, \cdots, T_a f_p) = T_a \mathfrak{a}$ ならば $(f_1, f_2, \cdots, f_p) = \mathfrak{a}$。

結局次のことがわかった。(cf. Krull の標高定理)

<u>(8) 命題.</u> 閉集合の芽 X_a のイデアル $\mathfrak{a}_a \subset \mathcal{E}_a$ が有限生成ならば a を中心とする局所座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をとるとき．

$$\dim X_a \geqq n - g(\mathfrak{a}_a) \equiv \dim_R \{T_a \mathfrak{a}_a / \sum_{i=1}^n x_i \cdot T_a \mathfrak{a}_a\}.$$

<u>例.</u> R^3 の解析函数の環 $\mathcal{O}(R^3)$ のイデアル

$\mathfrak{a} = (x^2 + yz,\ y^3 + xz,\ z^2 - xy^2)$ を考える。この共通零点を X とおくと $Y = X - \{0\}$ は 1 次元解析多様体であり，$a \in Y$ に対し

て$\mathfrak{a}_a$は解析函数の芽の環$\mathcal{O}_a$における条件(Z)をみたす。Weierstrassの準備定理を用いて$\mathfrak{a}_0$も(Z)をみたすことが示せる。するとXはコヘラントになり、(12)によって$\mathfrak{a}_a \cdot \mathcal{E}_a$も$\mathcal{E}_a$において(Z)をみたす。単位分解により大域イデアル$\mathfrak{a} \cdot \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$も(Z)をみたす。しかし$n - g(\mathfrak{a}_a) = 3 - 3 < 1 = \dim X_0 = \operatorname{adim} X_0$.
尚、準備定理を用いて、Xが局所的にも大域的にも既約な解析集合であることも示せる。

さていよいよ幾何的次元と代数的次元が等しくしかも解析集合に似た形の零点集合をもつ$\mathcal{E}_a$のイデアルの族を与えよう。

定義　M^nの閉集合Xで次の条件をみたすものの全体を$\Phi_a^0(M)$と記す。

(a)　X_aのイデアル$\mathfrak{a}_a \in \mathcal{E}_a$は有限生成。

(b)　$T_a \mathfrak{a}_a$はaを中心とする局所座標の形式的巾級数環$\mathcal{F}_n$の素イデアル。

(9) 定理.　$\operatorname{adim} X_0 = k$なる$X \in \Phi_0^0(\mathbb{R}^n)$に対しては、0の近傍U, 部分空間$\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$及び$T_0 \delta \in \mathcal{F}_k$ ($\mathbb{R}^k$に対応する形式的巾級数環), $T_0 \delta \neq 0$なる$\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$を適当にとれば次のことが成立する。

(i)　自然な射影$\pi: X \cap U \longrightarrow \mathbb{R}^k$は固有(コンパクト集合の原像がコンパクト)で一点の原像の数はU全体で有界.

(ii) $Y \equiv X \cap U \cap \{\delta \neq 0\}$ は空でなく，その上で π は $\mathbb{R}^k$ の中への局所微分同相写像．従って Y は k 次多様体．

(iii) $\operatorname{adim}(X \cap U \cap \{\delta = 0\}) \leq k-1$.

この結果は $\Phi_a^0(M)$ の元が a の近くで既約解析集合によく似た構造を持つことを示している。証明も解析的な場合と同様であるがやや複雑となる。解析的な場合の Weierstrass の準備定理のかわりに Malgrange のそれが決定的な役割をはたす．

$T_a\mathfrak{a}_a$ が素でない場合に解析集合と同様な扱いをしようとすれば，何か附加的な条件が必要となる．原因は $T_a\mathfrak{a}_a$ の分解と $\mathfrak{a}_a$ の分解が並行していないことにある。

例. $\varphi(t) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ を 0 で ∞-フラット，他で正とする．$f \equiv xy - \varphi(z) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ の生成する単項イデアル $\mathfrak{a}$ は性質(Z)をみたすが，形式的分解 $T_0\mathfrak{a} = (x) \cap (y)$ に対応する $\mathfrak{a}$ の分解はない。

例. $\varphi(t) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ を 0 に収束する点列及び 0 で ∞-フラット，他で正とする．$g = y(y - \varphi(x)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ は(Z)をみたすイデアルを生成する。その零点集合　　　　　　は無限通りの仕方で $\Phi_0^0(\mathbb{R}^2)$ の二つの元に分解する。

さて $\mathfrak{a}$ が $\mathcal{E}_a$ のイデアルで $T_a\mathfrak{a} = \sqrt{T_a\mathfrak{a}}$（根基）となっているとする．$T_a\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{p_i} P_{ij}$ が無駄のない素イデアルへの分解

となるような分解 $T_a\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ $(A_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}P_{ij})$ に対して、$T_a\mathfrak{a}_i=A_i$ となる $\mathcal{E}_a$ での分解 $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{p}\mathfrak{a}_i$ が一意的に存在するとき、$\mathfrak{a}$ を単に一意的分解可能ということにする。

<u>定義</u>　M^n の閉集合 X で次の条件をみたすものの全体を $\Phi_a(M)$ とする。

(a)　X_a のイデアル $\mathfrak{a}_a$ は有限生成。

(b')　$T_a\mathfrak{a}_a$ は一意的分解可能な根基。

(b')の「一意的」というのは非常に強い条件であるが、(a)のもとでこれが本当に必要なのかどうかはわからない。ただ条件(a)をおとせば、根基を展開とするが一意的でなく分解でき、(2)をみたすイデアルの例が作れる。

(10) <u>命題</u>.　$X\in\Phi_a(M)$ とし $\mathfrak{a}$ をその $\mathcal{E}_a$ でのイデアルとする。　$T_a\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ $(A_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}P_{ij})$ が $\bigcap_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{p_i}P_{ij}$ が最短の準素分解（したがって極小素因子への分解）となるような $\mathcal{F}_a$ での分解であれば、$X_1,X_2,\cdots,X_p\in\Phi_a^0(M)$ が存在して $X_a=\bigcup_{i=1}^{p}X_{i,a}$ となる。　この分解は一意的で無駄がない。

前の定理と併せて一つの目標であった次の系を得る。

(11) <u>系</u>.　$X\in\Phi_a(M)$ ならば　$\operatorname{adim}X_a=\dim X_a$.

尚、X が実解析集合であるときもこの等号は成立する。（イデアルから出発するのでなく、閉集合から出発することに留意せよ。）

それでは、Mが実解析的であるとき解析集合と$\Phi_a(M)$の関係はどうなっているであろうか。これに関しては次のことがわかる。

(12) 命題. 閉集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ が原点 0 で実解析的な芽をもっているとき次の三条件は互いに同値である。

(i) $X \in \Phi_0(\mathbb{R}^n)$.

(ii) X の $\mathcal{E}_0$ でのイデアルは有限生成.

(iii) X_0 はコヘラントな解析集合の芽.

最後に$\Phi_a(M)$の性質について反省してみる。$\Phi_a(M)$の二つの元の和と交りが再び$\Phi_a(M)$に属しているとはかぎらない。しかしこれは解析的な場合のように基準的な座標がとれないC^∞多様体上でバラィアティのようなものを考える時には致方ないことである。特に良くないのは、$X \in \bigcap_{a \in M} \Phi_a^0(M)$であってもその特異点集合が$\Phi_a(M)$に属していないことがあるし、また局所的に無限な位相型を持つこともあることである。主定理(9)をもってしても、$X \in \Phi_a^0(M)$ が a の近傍で $\dim X_a = a\dim X_a$ に等しい次元の多様体の閉包としてあらわせるか不明である(解析的な場合は(12)によってO.K.)。$\Phi_a(M)$は一点aの芽の性質で特徴づけられたが、$X \in \Phi_a(M)$が与えられたとき近傍の$b \in X$に対して$X \in \Phi_b(M)$となるであろうか。性質(a)が近傍につたわることだけはわかっ

ている（[6]）.

文献

[1] G. Birkhoff, Lattice theory A.M.S. colloq. publ., vol. 25, third ed. (1967).

[2] J. Bochnak, Sur le théorème des zéros de Hilbert "différentiable," Topology vol. 12 (1973) 417-424.

[3] J. Bochnak・J. J. Risler, Quelques questions ouverts, preprint.

[4] L. Gillman-M. Jerison, Rings of continuous functions, Van Nostrand (1960)

[5] S. Izumi, Note on induced maps of Moore families, to appear.

[6] S. Izumi, Zeros of ideals of differentiable functions, to appear.

[7] S. Izumi, Zero sets of certain ideals of differentiable functions, to appear.

[8] B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Oxford univ. Press. (1966).

[9] J. Nagata, Modern dimension theory, North Holland publ. (1965).

[10] M. 永田, 可換環論, 紀伊國屋書店 (1974).

[11] J.J. Risler, Un théorème des zéros en géométrie analytique réelle, C. r. acad. Sc. Paris, t. 274 (1972), 1488-1490.

[12] R. Thom, On some ideals of differentiable functions, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 255-259.

[13] J.C. Tougeron, Faisceaux différentiables quasi-flasques, C. r. acad. Sci. Paris, t. 260 (1965) 2971-2973.

[14] J.C. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Springer (1972).