数理解析研究所講究録
第261巻 1976年 41-45

Gauss過程の表現と再生核空間

名工大　櫃田　倍之

1. 2つの可分なGauss過程 $X_1=\{X_1(t)\,;\,t\in[0,1]\}$, $X_2=\{X_2(t)\,;\,t\in[0,1]\}$ が与えられたとき，それらの標準表現に現われる重複度およびspectre測度が一致するための十分条件を，再生核Hilbert空間を使って考察する．目標とする結果は簡明で，両者の再生核Hilbert空間が同一ならば，重複度，spectre測度は同じであることが主張される．

便宜上，$X_i(0)=0$ $(i=1,2)$ 及び $E[X_i(t)]\equiv 0$ $(i=1,2)$ と固定する．$\Gamma_i(t,s)=E[X_i(t)X_i(s)]$ $(i=1,2)$ とおく．

2. 一般に可分Gauss過程 $X=\{X(t)\,;\,t\in[0,1]\}$ が与えられると，Hida-Cramér (cf [3]) の意味での標準表現

$$(1)\qquad X(t)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^t F_i(t,u)\,dB^i(u)+\sum_{\{t_j\le t\}}\sum_{\ell=1}^{L_j}G_j^{\ell}(t)\,B_{t_j}^{\ell},$$

$$N,\ L_j\le\infty$$

が存在する．$dB^i(u)$ $(i=1,\cdots,N)$ は $E[dB^i(u)^2]=m_i(du)$ をみたすGauss加法過程，$B_{t_j}^{\ell}$ $(j=1,2,\cdots;\ell=1,2,\cdots,L_j)$ は $N(0,1)$ に従がう確率変数であるが，これらはすべて互に独立である．$m_i(du)$ は連続な測度とする（不連続な部分は，(1) の右辺の $B_{t_j}^{\ell}$ の中にくり込まれているとしてよい）．このとき，N を<u>連続重複度</u>，L_j を t_j における<u>離散重複度</u>という．また右辺に表われる加法過程 $\mathbb{B}=\{\mathbb{B}(t);t\in[0,1]\}$

$$\mathbb{B}(t)=\left(B^i(t),\ i=1,\cdots,N;\ \chi_{[t_j,1]}(t)\,B_{t_j}^{\ell},\ j=1,2,\cdots;\ell=1,\cdots,L_j\right)$$

を X の<u>innovation過程</u>とよぶことにしよう．$\chi_{[t_j,1]}$ は区間 $[t_j,1]$ の定義関数であるが，$[t_j,1]$ は $G_j^{\ell}(t_j)\neq 0$ となる ℓ については，$[t_j,1]$ を，$G_j^{\ell}(t_j)=0$ となる ℓ については，$(t_j,1]$ を意味する．

<u>注意</u>．各 j に対して，$G_j^{\ell}(t_j)\neq 0$ となる ℓ は，標準表現の性質から，高々1つしかない．

もちろん，X と $\mathbb{B}$ の時間 t までに張る σ-加法族は等しい：

$$\mathcal{B}_t(X)=\mathcal{B}_t(\mathbb{B}),\quad t\in[0,1].$$

innovation過程を規定する組

$$\{N,\ m_i(du)\ (i=1,\cdots,N);\ t_j\ (j=1,2,\cdots),\ L_j\}$$

を Gauss過程 X の<u>標準システム</u>とよぼう．明らかに，

<u>補助定理 1</u>．Gauss 過程 $X_1=\{X_1(t),t\in[0,1]\}$ 及び $X_2=\{X_2(t),t\in[0,1]\}$ の標準システムが等しいことと，

X_1 と X_2 の間に因果的（causal）でかつ因果的に可逆な線形変換が存在することは同値である．但し，<u>因果的</u>であるとは，$\mathcal{B}_t(X_1) \subset \mathcal{B}_t(X_2)$ の意味である．第2の命題をより詳しく言えば，共通の確率空間の上に X_1 及び X_2 を実現することができて，$\mathcal{B}_t(X_1) = \mathcal{B}_t(X_2)$，$t \in [0,1]$，がなりたつようにできるということである．

3．補助定理1によって，X_1 と X_2 の間の因果的及び因果的に可逆な対応をみつければ，目標が達成される．このことを，再生核Hilbert空間を使って言おう．まず，主定理を正確に述べよう．

<u>主定理</u>．Gauss過程 X_1 と X_2 の共分散 $\Gamma_1(t,s)$，$\Gamma_2(t,s)$ を再生核とするHilbert空間をそれぞれ $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ 及び $\mathcal{H}(\Gamma_2)$ とする．$\mathcal{H}(\Gamma_1) = \mathcal{H}(\Gamma_2)$ ならば，X_1 と X_2 の標準システムは一致する．

ここでは，簡単のために，$\Gamma_i(t,s)$ が連続の場合の証明を述べる．$\Gamma_i(t,s)$ が連続でない場合にも，可分性を仮定していることから，記号および計算の複雑化を除けば，ほゞ同じ構想で証明できる．

まず，次の知られた定理は基本的である．

<u>定理</u>（Aronszajn[1]） $\mathcal{H}(\Gamma_1)=\mathcal{H}(\Gamma_2)$ であることと，定数 $C_1, C_2>0$ があって，

$$C_1\Gamma_1 \ll \Gamma_2 \ll C_2\Gamma_1$$

がなりたつこととは，同等である．但し，$\ll$ は差が正値であることを示す．

これから，次のことがわかる．

<u>定理</u>（Driscoll[2]） $\Gamma_1(t,s)$ 及び $\Gamma_2(t,s)$ が連続な正値核であるときに，$\mathcal{H}(\Gamma_1)=\mathcal{H}(\Gamma_2)$ ならば，次のような，有界線形可逆写像 $L:\mathcal{H}(\Gamma_1)\to\mathcal{H}(\Gamma_2)$ が存在する：

(2) $$L(\Gamma_1(t,\cdot))=\Gamma_2(t,\cdot).$$

<u>注</u>．$\Gamma_1(t,\cdot)$ は $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ で密であるから，L は(2)によって決定される．

<u>主定理の証明</u> $\mathcal{H}_t(\Gamma_i)$ $(i=1,2)$ を $\{\Gamma_i(s,\cdot)\,;\, s\leq t\}$ によって張られる $\mathcal{H}(\Gamma_i)$ $(i=1,2)$ の閉部分空間とする．P_t^i を $\mathcal{H}(\Gamma_i)$ から $\mathcal{H}_t(\Gamma_i)$ への射影とすると，対応 L によって，

$$L\mathcal{H}_t(\Gamma_i)=LP_t^1\mathcal{H}(\Gamma_1)=P_t^2\mathcal{H}(\Gamma_2)=\mathcal{H}_t(\Gamma_2)$$

がなりたつことは明白である．同型対応 $\Gamma_i(\cdot,s)\longleftrightarrow X_i(s)$ $(i=1,2)$ を考えれば以下のことが言える．（ここで $X_i(s)$ は $H_i=\{X_i(s)\,;\, s\in[0,1]\}$ の線形包の要素と考えるのである）対応 L をそのまま H_1 から H_2 への写像として移行してみれば，

これは，X_1 と X_2 の間の因果的かつ因果的に可逆な線形変換を与える．従って，X_1 と X_2 の標準システムは共通である．

文献

[1] N. Aronszajn : Theory of reproducing kernels , Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 337-404 .

[2] M. F. Driscoll : The reproducing kernel Hilbert space structure of the sample paths of a Gaussian process , Z. Wahr. verw. Geb. 26 (1973) 309-316 .

[3] T. Hida : Canonical representations of Gaussian processes and their applications , Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A 33 (1960) 109-155.