数理解析研究所講究録
第 265 巻 1976 年 1-9

Countable spectrum をもつ測度について

神奈川大 工 泉池敬司
北大 応電研 清水善宏

G を L.C.A. group としその dual group を $\hat{G}$ とする。$M(G)$ で G 上の bounded regular Borel measure よりなる, convolution multiplication, total variation norm による Banach algebra とする。$L^1(G)$ は G 上の Haar measure に絶対連続な bounded measure よりなる group algebra とする。Taylor [5] により, $M(G)$ の maximal ideal space はある compact abelian semigroup S 上の semicharacter $\hat{S}$ と1対1の対応があり, $M(G)$ は $M(S)$ に weak* dense にうめ込まれている。$\mu\in M(G)$ の Gelfand 変換は $\hat{\mu}(f)=\int f d\mu$ $(f\in\hat{S})$ で与えられる。今後 $\hat{S}$ を $M(G)$ の maximal ideal space とみる。$Sp(\mu)=\{\hat{\mu}(f): f\in\hat{S}\}$ を $\mu\in M(G)$ の spectrum と呼ぶ。$M(G)$ の idempotent に関しては次の定理はよく知られている。

Cohen の idempotent 定理([3])

$\mu\in M(G)$ が idempotent $\Rightarrow$ $\mu=\sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i m_{H_i}$, ここで $\gamma_i\in\hat{G}$,

m_{H_i} は compact subgroup H_i 上の normalized Haar measure,
a_i は整数。

Shilov の idempotent 定理 ([2])
$\hat{S} \supset E$ は open, compact subset
$\Rightarrow$ $\eta \in M(G)$ が存在して, $\hat{\eta}=1$ on E, $\hat{\eta}=0$ on E^c である。

μ が idempotent ならば $Sp(\mu)=\{0,1\}$ である。又 $Sp(\mu)$ が finite set ならば Cohen と Shilov の定理より $\mu=\sum_{j=1}^{m} a_j \gamma_j m_{H_j}$ と表わせる。ということは $Sp(\mu)$ が finite set になる μ は完全にわかっている。ここでは, 我々は $Sp(\mu)$ が countable set であるものを考える。一つは G の L.C.A. group としての構造とどの様に関係しているか捕えることである。もう一つは $M(G)$ の中でどの様な性質を持っているかである。

用いる記号

$M_0(G) \equiv \{\mu \in M(G);\ \hat{\mu}(\gamma_\alpha) \to 0 \text{ if } \gamma_\alpha \in \hat{G},\ \gamma_\alpha \to \infty \text{ in } \hat{G}\}$

$M_c(G) \equiv \{\mu \in M(G);\ \mu$ は continuous measure$\}$

$\mathrm{Rad}\,L^1(G) \equiv \{\mu \in M(G);\ \hat{\mu}(f)=0\ \forall f \in \hat{S} \setminus \hat{G}\}$

$\mu \in M(G)$ に対して $\mu^*(E) \equiv \overline{\mu(-E)}$, E は G の Borel subset.

$\mathfrak{M} \equiv \{\mu \in M(G);\ \widehat{\mu^*}(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}\ \forall f \in \hat{S}\}$ symmetric measure の集合

$\mu \in M(G)$ に対して $L^1(\mu) \equiv \{\lambda \in M(G);\ \lambda \ll \mu\}$

$\mathcal{L}(G) \equiv \sum L^1(G_\tau)$, ここで $\sum$ は G 上のもとの topology より強い L.C.A. group topology で全体を動く。G_τ はこの備わった L.C.A. group を表わす。

$A(G) \equiv \{\mu \in M(G)\,;\ Sp(\mu)$ は countable set$\}$。

§1. $Rad\,L^1(G)$, $M_0(G)$, $M_c(G)$, $\mathcal{M}$ と $A(G)$ の関係と G の構造。

M. Zafran [6] は次の事を示した。

定理 (Zafran) G は compact abelian group, $\mu \in M_0(G)$,

$Sp(\mu) = \hat{\mu}(\hat{G}) \Rightarrow \mu \in Rad\,L^1(G)$

ここで μ を定理の仮定を満たすものとすると, $\mu \in A(G)$ である。まずこの定理の拡張から初める。

定理1. $A(G) \cap M_0(G) \subset Rad\,L^1(G)$。

(証明) $\mu \in A(G) \cap M_0(G)$ かつ $\mu \notin Rad\,L^1(G)$ とする。$h \in \hat{S} \setminus \hat{G}$ が存在して $\hat{\mu}(h) \neq 0$ と出来る。$\mu \in A(G)$ より $|\hat{\mu}(h)| > \varepsilon > 0$ に対して $E = \{f \in \hat{S}\,;\ |\hat{\mu}(f)| \geq \varepsilon\}$ は $\hat{S}$ で open compact になっている。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$ で $\hat{\eta} = 1$ on E, $\hat{\eta} = 0$ on E^c とできる。$\mu \in M_0(G)$ より $E \cap \hat{G}$ は $\hat{G}$ の中で compact である。よって $\eta \in L^1(G)$。しかし $\hat{\eta}(h) \neq 0$ より $\eta \in Rad\,L^1(G)$。矛盾。

(注) 実はもう少し強い型で, $\mu \in A(G)$ に対して $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \in M_0(G)$, $\mu_2 \perp M_0(G)$ とする時 $\mu_1 \in A(G)$ が証明される。

命題2. 次は同値である。

1) $A(G) \cap M_0(G) = \mathrm{Rad}\, L^1(G)$.

2) $\mathrm{Rad}\, L^1(G) \subset A(G)$

3) G: compact

(証明) 1) ⇒ 2), 3) ⇒ 1) は明らか。2) ⇒ 3). Gは$R^n \times H$ (Hはcompact subgroup)なるopen subgroupを持つ。$n \neq 0$ならば2)に矛盾する。故に$n=0$, つまりGはcompact open subgroup Hを持つ。G/Hがfinite groupであることを示せばよい。もしG/Hがinfinite discrete groupであるならば, $\hat{\mu}(\widehat{G/H})$がuncountable setになる$\mu \in M(G/H)$が存在するから, $L^1(G)$にuncountable spectrumを持つmeasureが存在する。よって$\mathrm{Rad}\, L^1(G) \subset A(G)$に矛盾する。よって$G/H$はfinite group。故に$G$はcompact。

次に$A(G) \cap M_c(G)$について見ることにする。

命題3. 次は同値。

1) $A(G) \cap M_c(G) = \{0\}$.

2) Gはinfinite compact subgroupを持たない。

(証明) 1) ⇒ 2) は明らか。2) ⇒ 1) $A(G) \cap M_c(G) \ni \mu$, $\mu \neq 0$とする。$\varepsilon > 0$で$E = \{f \in \hat{S} : |\hat{\mu}(f)| > \varepsilon\}$がopen compactになるものがある。Shilovの定理より$\eta \in M(G)$, $\hat{\eta} = 1$ on E, $\hat{\eta} = 0$ on E^cなるものがある。Cohenの定理より$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i m_{H_i}$。所で$\eta \in M_c(G)$より$H_i$はinfinite compact subgroupである。

2)に矛盾する。

命題4. 次は同値。

1) $A(G) \cap M_c(G) \subset M_0(G)$

2) $A(G) \cap M_c(G) \subset \mathrm{Rad}\, L^1(G)$

3) Gの infinite compact subgroup は全て open。

(証明) 2)⇒1), 1)⇒3)は明らか。3)⇒2) 命題3の2)⇒1)の証明と同じくすればよい。$\mu \in A(G) \cap M_c(G)$, $\mu \notin \mathrm{Rad}\, L^1(G)$ とするとある H_i は open でない compact subgroupになることに注意すればよい。

系5. 次は同値.

1) $A(G) \cap M_c(G) = \mathrm{Rad}\, L^1(G)$

2) Gは compact でその infinite compact subgroup は全て open。

(注) Gが上の2)をみたすものは, $G = \mathbb{T} \oplus H$ 又は $G = \Delta(p^\infty) \oplus H$ (Hは finite group)の時のみである。

次に $\mathfrak{M}$ と $A(G)$ の関係をみる。所で $\mu \in M(G)$ が finite spectrum を持つならば Cohen の定理より $\mu \in \mathcal{L}(G)$ である。又 $\mathcal{L}(G) \subset \mathfrak{M}$ はよく知られている事実である。そこで μ が countable spectrum を持てば, $\mu \in \mathcal{L}(G)$ が成立するのではという問題が出てくるが実はこれは成立しない。([1], [4])。しかし $\mu \in \mathfrak{M}$ であることは示すことができる。$f \in \hat{S}$ に対して,

$M(G) \ni \mu \longrightarrow \overline{\widehat{\mu^*}(f)}$ は又 complex homomorphism である。この homomorphism を f^* で表わす。$\mu \in M(G)$ が symmetric であることは $\hat{\mu}(f) = \hat{\mu}(f^*)$ ($\forall f \in \hat{S}$) と同値である。

定理 6. $A(G) \subset \mathfrak{M}$。

(証明) $\mu \in A(G)$ とする。任意の $f \in \hat{S}$ に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon = \{g \in \hat{S} ; |\hat{\mu}(g) - \hat{\mu}(f)| < \varepsilon\}$ が open compact in $\hat{S}$ になる様にできる。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$, $\hat{\eta} = 1$ on B_ε, $\hat{\eta} = 0$ on B_ε^c とできる。所で $\eta \in \mathfrak{M}$ より $\hat{\eta}(f) = \hat{\eta}(f^*)$ ($\forall f \in \hat{S}$) である。よって $f^* \in B_\varepsilon$。ε は十分小さくてもよいから $\hat{\mu}(f) = \hat{\mu}(f^*)$。よって $\mu \in \mathfrak{M}$。

§2. $A(G)$ と $L^1(\mu)$。

ここでは次の定理を示したい。

定理 7. G を metrizable L.C.A. group, $\mu \in A(G)$, $\mu \geq 0$ とする。もし $Sp(\mu)$ の集積点は存在しても 0 のみ。

$\Rightarrow L^1(\mu) \subset A(G)$。

いくつかの補題を用意する。

補題 8. X : infinite discrete abelian group

$\mu \in A(X)$, $\mu \geq 0$, $\|\mu\|$ が $Sp(\mu)$ で isolated

$\Rightarrow \mu = \sum_{j=1}^{n} r_j \delta_{x_j}$, ここで $r_j > 0$, $x_j \in X$ は finite order。

(証明略)

補題9. $\mu \in M(G)$, $\mu \geqq 0$, $\|\mu\|$ が $Sp(\mu)$ で isolated, H を G の open subgroup とする。

$\Rightarrow$ $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} * \lambda_i$, ここで $x_i + H$ は G/H で finite order, $\lambda_i \in M(H)$

証明は補題8より明らか。

補題10. $G \supset H$ を compact metrizable subgroup とする。
$\mu = \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} * \lambda_j$, $x_j + H$ は G/H で finite order, $\lambda_j \in M(H)$
$\Rightarrow$ $\hat{\mu}(\hat{G})$ は countable set。

（明らか）

[定理7の証明] $h \in \hat{S}$ に対して $\hat{\mu}(|h|) > 0$ とする。
$\hat{S}^{+} = \{|f| ; f \in \hat{S}\}$ とする時 $\hat{\mu}(\hat{S}^{+}) \setminus \{0\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく。
$\hat{\mu}(|h|) = a_n$ とする。仮定より $E_n = \{f \in \hat{S} ; \hat{\mu}(f) = a_n\}$ は open compact である。Shilov の定理より idempotent η_n で $\hat{\eta}_n = 1$ on E_n, $\hat{\eta}_n = 0$ on E_n^c なるものがある。$\eta_n = \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i m_{H_i}$ とする。K_n として $\hat{m}_{H_i}(|h|) = 1$ となる H_i より generate される compact subgroup とする。すると $f_n \in \hat{S}^{+}$, $f_n^2 = f_n$ が存在して $f_n \leq |h|$, $|f_n \cdot h| = |f_n|$, $f_n \cdot h \in \hat{G}_{K_n}$ となる。ここで G_{K_n} は K_n を open compact にする G にもっとも強い L.C.A. group topology が備わったものを表わす。又 $\hat{\mu}(f_n) = a_n$ でもある。よって $f_n = |h|$ a.e. μ である。そこで $\nu \ll \mu$ とする。$\hat{\nu}(h) = \hat{\nu}(h \cdot f_n) \in \nu(\hat{G}_{K_n})$。よって

$\hat{\nu}(\hat{S}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\nu}(\hat{G_{K_n}}) \cup \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\nu}_n(\hat{G_{K_n}}) \cup \{0\}$, ここで ν_n は ν の $M(G_{K_n})$ に含まれる部分とする。所で $\nu_n \ll \mu_n$ であり μ_n は $G = G_{K_n}$ とした時 補題9の条件をみたすから $\mu_n = \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_j^{(n)}} * \lambda_j^{(n)}$ と書ける，ここで $\lambda_j^{(n)} \in M(K_n)$, $x_j^{(n)} + K_n$ は G/K_n で finite order をもつ。補題10より $\hat{\nu}_n(\hat{G_{K_n}})$ は countable set。故に $Sp(\nu)$ は countable set である。

(注) 定理7において，metrizable の条件はなしでよいのかはまだわかっていない。しかし $\mu \geq 0$, $Sp(\mu)$の集積点はあってもOのみ，の条件はそれぞれははずせない。

§3. 一般には $A(G) \not\subset \mathcal{L}(G)$ であるが，ここで $\mu \in A(G)$ に対してある compact subgroup H に対して $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(H)$ になるための条件を最後に与える。

定理11. G を compact metrizable abelian group とする。次は同値である。

1) $Sp(\lambda) \subset \hat{\lambda}(\hat{G}) \cup \{0\} \quad \forall \lambda \in L^1(\mu)$

2) $Sp(\lambda) \subset \hat{\lambda}(\hat{G}) \cup \{0\} \quad \forall \lambda \in L^1(\mu),\ \lambda \geq 0$

3) compact subgroup H があって $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(H)$

(証明略)

(注) metrizable の条件は必要である。

References

[1] K. Izuchi, On a problem of J.L. Taylor, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975).

[2] C.E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand 1960.

[3] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience 1962.

[4] T. Shimizu, Independent sets and measure algebras, to appear.

[5] J.L. Taylor, Measure algebras, Regional conf. ser. Math. (AMS) 1973.

[6] M. Zafran, On the spectra of multipliers, Pacific J. Math 47 (1973), 609-626.