

自動積分について

京大工 市田浩三
清野 武

1. 自動積分^{1,2)}

与えられた関数 $f(x)$ に対し, 定積分

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (-\infty < a < b < \infty) \quad (1)$$

の近似値を求める際に, 入力パラメータとして

- (i) 積分区間の上下限 a, b ,
- (ii) 許容誤差 ε ,
- (iii) 被積分関数 $f(x)$ の評価の回数の上限 N

を指定し, 出力パラメータとしては

- (i) 積分結果,
- (ii) $f(x)$ の評価回数, あるいは評価回数が N に達したという情報

を与えるようなプログラムを自動積分子とよぶ. この種のプログラムは比較的最近になって数多く発表されているが, こ

こでは, ROMBRG, CHBINT, SIMP, ADSIMP, CADRE, AIND について数値実験を行なった結果を述べる. なお, n 次元についてもいくつかのプログラムを作成した.

(1) ROMBRG (Romberg Integration)

台形公式を

$$T_0^{(k)} = h \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{2^{k-1}} f(a+jh) + \frac{1}{2} f(b) \right], \quad h = (b-a)/2^k \quad (2)$$

と表わし

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

によって, いわゆる, T-テーブルを次のように作る.

$$\begin{array}{cccc} & T_0^{(0)} & & \\ & T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & \\ & T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array}$$

収束判定は

$$|T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}| \leq \varepsilon \quad (\text{または } \left| \frac{T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}}{T_m^{(0)}} \right| \leq \varepsilon) \quad (4)$$

による.

(2) CHBINT (Chebyshev Integration)

積分区間を $[-1, 1]$ に変換して

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt, \quad F(1) = I \quad (5)$$

と お く と

$$\left. \begin{aligned} F(x) &\simeq \frac{a_0}{2} + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x), \\ a_i &= \frac{1}{i(n+1)} \sum_{r=1}^n f(\cos t_r) \sin t_r \sin i t_r \quad (t_r = r\pi/(n+1)), \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{a_0}{2} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と な り

$$F(1) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \quad (7)$$

で与えられる。 $n = IN$ から始め、 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} をテストする。これが ε より小さければ収束したものとする。そうでなければ $n \leftarrow 2n+1$ としてくり返す。

(3) SIMP (Simpson Integration)

Simpson の 1/3 則を利用する。 n 分割および $2n$ 分割の近似値をそれぞれ Y_n, Y_{2n} としたとき、その差の絶対値が ε 以下であれば収束したものと判定する。

(4) ADSIMP (Adaptive Simpson Integration)³⁾

区間 $[a, b]$ をレベル 0 とし、この区間は次にレベル 1 の区間に 2 等分される。レベル 1 の部分区間のいくつかはさらに 2 等分されレベル 2 の区間となる。レベル r の区間 $[a_i, a_i+h_i]$ において

$$R[a_i, a_i+h_i]f(x) = \frac{h_i}{6} \left\{ f(a_i) + 4f\left(a_i + \frac{h_i}{2}\right) + f(a_i+h_i) \right\} \quad (8)$$

$$R^{(2)}[a_i, a_i+h_i]f(x) = R\left[a_i, a_i + \frac{h_i}{2}\right]f(x) + R\left[a_i + \frac{h_i}{2}, a_i+h_i\right]f(x) \quad (9)$$

として

$$|R[a_i, a_i+h_i]f(x) - R^{(2)}[a_i, a_i+h_i]f(x)| \leq 15\varepsilon/2^r \quad (10)$$

であればこの区間は収束したものと判定する。すべての部分区間が収束すれば求める積分値は各部分区間の積分の近似値の和になる。

(5) CADRE (Cautious Romberg Extrapolation Quadrature)⁴⁾

区間 $[a, b]$ を adaptive に分割し、各小区間ごとに Romberg の外挿によって積分の近似値を推定する。

$$I = S(h) + A_1 h^{r_1} + A_2 h^{r_2} + \cdots + A_k h^{r_k} + O(h^{r_k}) \quad (11)$$

$$(0 < r_1 < \cdots < r_k)$$

であるとすると、 $S(h)$ の極限值として

$$I = S(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} S(h) \quad (12)$$

を推定するには、 h の種々の値に対する $S(h)$ を計算し、これらを用いて外挿により $h=0$ における値を求めるのが普通である。

$$S(h; 2^{r_1}) = S(h) + [S(h) - S(2h)] / (2^{r_1} - 1) \quad (13)$$

を計算すれば (11) の誤差は h^{r_2} のオーダーになるが、 $S(h; 2^{r_1})$

が $S(h)$ より高精度になりうるのは, $A_1 h^{r_1}$ が $E - S(h)$ の主要部を占める場合である. これは

$$R_0(h) = \frac{S(2h) - S(4h)}{S(h) - S(2h)} \quad (14)$$

の値が 2^{r_1} に近い場合に限る. したがって, $R_0(h)$ を計算し, これが 2^{r_1} から離れていれば, h を小さくして, 再び $R_0(h) \approx 2^{r_1}$ とするまで続ける. 滑らかな関数に対しては $R_0(h) = 4$, 区間内の 1 点で $f(x)$ が不連続であれば $R_0(h) = \pm 2$, 端点で代数的特異性があれば

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_0(h) = 2^{1+\alpha} \quad (15)$$

となるので, もし $R_0(h)$ が 1 と 4 の間の 1 つの数 ($\neq 2$) に収束する傾向を示すならば, 被積分関数は

$$f(x) = (x-a)^\alpha g(x) \quad \text{または} \quad f(x) = (b-x)^\alpha g(x) \quad (16)$$

の形をもつものと推定できる.

(6) AIND ⁵⁾

小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ についての被積分関数 $f(x)$ に Gauss の 10 点公式を適用した結果を $G(x)$, 同様に Kronrod の 21 点公式を適用した結果を $K(x)$ とする. 後者は Gauss の公式の横座標に適當な横座標を追加したもので, 21 回の関数値の計算により $G(x)$ と $K(x)$

の2つが求められる。

$$e(I) = |K(I) - G(I)| \quad (17)$$

をこの小区間の積分の誤差の推定値とする。このアルゴリズムの n ステップ ($n=2, 3, \dots$) において区間 $[a, b]$ は n 個の小区間 I_j ($j=1, 2, \dots, n$) に分割される。もし

$$\sum_{j=1}^n e(I_j) \leq \varepsilon \quad (18)$$

ならば

$$y = \sum_{j=1}^n K(I_j) \quad (19)$$

を求める積分値とする。そうでなければ

$$e(I_k) = \max_{1 \leq j \leq n} e(I_j) \quad (20)$$

となる区間を選び出してそれを2等分し、 $n+1$ ステップに移る。このアルゴリズムは他の積分公式を使っても同様に構成することができる。

2. 計算結果

いくつかの例について京都大学大型計算機センター FACOM 230-75 で計算を行なった。結果を表1から表10に示す。

注1: 上段は積分の近似値, 下段は関数の評価回数を示す.

空白欄は関数の評価回数(または時間)超過.

注2: 下線を引いたところは有効数字以外の部分である.

注3: CADRE では IFLAG の値(関数の評価回数の右の()内の数字)によつて, 計算値とともにそれを得た状況が示される.

IFLAG = 1, all is well,

= 2, one or more singularities were successfully handled,

= 3, in some subintervals, the estimate *vint* was accepted merely because *error* was small, even though no regular behavior could be recognized,

= 4, failure, overflow of stack *TS* (This was never happened, - so far),

= 5, failure, too small a subinterval is required. This is due to too much noise in the function (relative to the given error requirements) or due to a plain ornery integrand.

例(1)~(35)の結果で誤差が ϵ 以内であった数は次の通りである.

ϵ	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AIND
10^{-5}	33	23	31	34	35	34
10^{-7}	31	16	30	34	35	35

$$(1) \int_0^1 e^x dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \quad (3) \int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} \quad (4) \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (5) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(6) \int_0^1 \frac{dx}{1+25x^2} \quad (7) \int_0^1 \frac{dx}{1-0.5x^4} \quad (8) \int_0^1 \frac{dx}{1+100x^2} \quad (9) \int_0^6 \varphi(x) dx \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0.5 \\ e^{1-x} & x > 0.5 \end{cases}$$

$$(10) \int_0^1 \frac{dx}{1-0.98x^4} \quad (11) \int_0^1 \frac{dx}{1-0.998x^4} \quad (12) \int_{-1}^1 \left|x + \frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{2}} dx \quad (13) \int_0^1 \frac{4 dx}{1+256\left(x-\frac{3}{8}\right)^2}$$

$$(14) \int_0^1 \frac{20 dx}{1+6400\left(x-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} \quad (15) \int_0^1 \sqrt{x} dx \quad (16) \int_0^{\pi} x \cos^2 20x dx \quad (17) \int_0^1 \psi(x) dx \quad \psi(x) = \begin{cases} e^x & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1+e^{\frac{1}{2}}) & x = \frac{1}{2} \\ e^{x-\frac{1}{2}} & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(18) \int_0^1 x^{0.1} (1.2-x) (1-e^{20(x-1)}) dx \quad (19) \int_0^1 H(x) dx \quad H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0.3 \\ 1 & x \geq 0.3 \end{cases}$$

$$(20) \int_{-1}^1 \left(\frac{23}{50}(e^x + e^{-x}) - \cos x\right) dx \quad (21) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4 + x^2 + 0.9} \quad (22) \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(23) \int_0^1 T(x) dx \quad T(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1/\sqrt{x} & x>0 \end{cases} \quad (24) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \quad (25) \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$$

$$(26) \int_0^1 \frac{2 dx}{2+\sin(31.4159x)} \quad (27) \int_0^1 U(x) dx \quad U(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ x/(e^x-1) & x>0 \end{cases}$$

$$(28) \int_{0.1}^1 \frac{\sin(314.159x)}{3.14159x} dx \quad (29) \int_0^{10} \sqrt{50} e^{-50 \times 3.14159 x^2} dx \quad (30) \int_1^1 \frac{dx}{x^2 + 1.005}$$

$$(31) \int_0^{10} 25e^{-25x} dx \quad (32) \int_0^{10} \frac{50 dx}{3.14159(2500x^2+1)} \quad (33) \int_{0.01}^1 \frac{\sin(50 \times 3.14159x)^2}{50(3.14159x)^2} dx$$

$$(34) \int_0^{3.1415927} \cos(\cos x + 3 \sin x + 2 \cos 2x + \sin 2x + 3 \cos 3x + 2 \sin 2x) dx$$

$$(35) \int_0^1 V(x) dx \quad V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10^{-15} \\ \log x & x > 10^{-15} \end{cases}$$

$$(36) \int_{-1}^1 \frac{2^{-\alpha}}{4^{-\alpha} + x^2} dx \quad \alpha = 1, 2, \dots, 31$$

$$(37) \int_0^1 x^\alpha dx \quad x=0 \text{ のとき } x^\alpha = 0 \quad \alpha = 2.0, 1.9, \dots, -0.9$$

$$(38) \int_0^1 (\cos(\alpha\pi x) + 1) dx \quad \alpha = 1, 2, \dots, 54$$

NO.	ROMBRG		CHBINT		SIMP		ADSIMP	
	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}
1	1.7182819 9	1.7182819 17	1.7182817 15	1.7182817 15	1.7182820 17	1.7182819 33	1.7182842 9	1.7182820 21
2	1.0000000 17	1.0000000 33	1.0000000 15	1.0000000 15	1.0000001 33	1.0000000 129	1.0000072 13	1.0000001 45
3	1.0471975 65	1.0471975 129	1.0475114 7	1.0475114 7	1.0471975 65	1.0471975 65	1.0471987 37	1.0471976 121
4	0.69314720 17	0.69314718 33	0.69314721 15	0.69314721 15	0.69314767 17	0.69314720 65	0.69314867 13	0.69314723 37
5	0.78539819 17	0.78539819 33	0.78539814 15	0.78539814 15	0.78539814 9	0.78539817 17	0.78539817 17	0.78539817 37
6	0.27468016 65	0.27468017 129	0.27467986 31	0.27467986 31	0.27468016 65	0.27468016 65	0.27468038 41	0.27468017 117
7	1.1436673 65	1.1436673 129	1.1436672 15	1.1436670 31	1.1436678 65	1.1436673 257	1.1436723 25	1.1436673 77
8	1.4711278 129	1.4711277 257	1.4711251 31	1.4711251 31	1.4711277 129	1.4711277 129	1.4711306 61	1.4711278 165
9	2.2907047 65	2.2907045 129	2.2908334 127	2.2912000 511	2.2907035 65	2.2907047 257	2.2907115 41	2.2907047 109
10	1.8963357 2049	1.8963358 4097	1.8963244 63	1.8963380 127	1.8963364 2049	1.8963357 8193	1.8963696 101	1.8963359 845
11	2.4670697 16385	2.4670700 32769	2.4664566 127	2.4671025 255	2.4670720 16385	2.4670702 131073	2.4671317 277	2.4670713 70393
12	1.4604429 2049	1.4604476 32769	1.4607171 127	1.4605059 511	1.4604422 2049	1.4604471 65537	1.4604422 129	1.4604471 433
13	0.71919392 257	0.71919382 1025	0.71919721 63	0.71919358 127	0.71919385 129	0.71919385 257	0.71919575 93	0.71919388 301
14	0.76382041 1025	0.76382038 2049	0.44739411 7	0.44739411 7	0.76382035 1025	0.76382035 1025	0.76382108 197	0.76382038 609
15	0.66666459 1025	0.66666670 16385	0.66673616 15	0.6666855 63	0.66666423 1025	0.66666664 16385	0.66666326 69	0.66666667 201
16	2.4674013 129	2.4674012 513	3.9465296 7	3.9465296 7	4.9348022 5	4.9348022 5	2.4674004 705	2.4674011 2249
17	1.2974426 33	1.2974426 33	1.2974743 63	1.2974754 255	1.2974427 17	1.2974426 33	1.2974426 233	1.2974426 233
18	0.60229504 32769		0.60374153 7	0.60374153 7	0.60229470 32769		0.60229459 133	0.60229805 393

表 2

NO.	ROM BRG		CH BINT		SIMP		ADSIMP	
	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}
19	<u>0.70000754</u> 65537		<u>0.70121284</u> 511		<u>0.70000713</u> 65537		<u>0.70000000</u> 121	<u>0.70000000</u> 121
20	<u>0.47955507</u> 5	<u>0.47942825</u> 17	<u>0.47942821</u> 7	<u>0.47942824</u> 15	<u>0.47955507</u> 5	<u>0.47942824</u> 65	<u>0.47942887</u> 17	<u>0.47942826</u> 37
21	<u>1.5822329</u> 33	<u>1.5822330</u> 65	<u>1.5822327</u> 15	<u>1.5822322</u> 31	<u>1.5822329</u> 33	<u>1.5822330</u> 65	<u>1.5822329</u> 33	<u>1.5822330</u> 113
22	<u>0.40000027</u> 65	<u>0.40000001</u> 513	<u>0.39999949</u> 15	<u>0.40000008</u> 31	<u>0.40000044</u> 65	<u>0.40000001</u> 513	<u>0.40000152</u> 21	<u>0.40000002</u> 65
23	<u>1.9932979</u> 32769		<u>1.9906717</u> 127	<u>1.9979903</u> 511			<u>1.9999775</u> 649	<u>1.9999730</u> 1745
24	<u>0.86697298</u> 17	<u>0.86697300</u> 33	<u>0.86697300</u> 15	<u>0.86697300</u> 15	<u>0.86697350</u> 17	<u>0.86697303</u> 65	<u>0.86697350</u> 17	<u>0.86697301</u> 57
25	<u>0.37988549</u> 9	<u>0.37988549</u> 17	<u>0.37988549</u> 7	<u>0.37988549</u> 7	<u>0.37988537</u> 9	<u>0.37988549</u> 33	<u>0.37988538</u> 9	<u>0.37988549</u> 17
26	<u>1.1547007</u> 129	<u>1.1547007</u> 257	<u>1.1547010</u> 127	<u>1.1547316</u> 255	<u>1.1547007</u> 65	<u>1.1547007</u> 65	<u>1.1547008</u> 209	<u>1.1547007</u> 709
27	<u>0.77750464</u> 9	<u>0.77750464</u> 9	<u>0.77750459</u> 7	<u>0.77750459</u> 7	<u>0.77750459</u> 9	<u>0.77750464</u> 17	<u>0.77750459</u> 9	<u>0.77750459</u> 9
28	<u>0.0090986514</u> 2049	<u>0.0090986602</u> 32769	<u>0.0090985861</u> 127	<u>0.0090996230</u> 255	<u>0.0090986514</u> 4097	<u>0.0090986544</u> 16385	<u>0.0090986283</u> 1933	<u>0.0090986632</u> 7173
29	<u>0.50000021</u> 2049	<u>0.50000021</u> 4097	<u>0.00000000</u> 3	<u>0.00000000</u> 3	<u>0.50000021</u> 1025	<u>0.50000021</u> 1025	<u>0.50000028</u> 113	<u>0.50000024</u> 393
30	<u>1.5643965</u> 33	<u>1.5643965</u> 65	<u>1.5643964</u> 15	<u>1.5643958</u> 31	<u>1.5643964</u> 17	<u>1.5643965</u> 33	<u>1.5643965</u> 33	<u>1.5643965</u> 73
31	<u>1.00000000</u> 1025	<u>0.99999999</u> 2049	<u>0.00000000</u> 3	<u>0.00000000</u> 3	<u>1.00000001</u> 4097	<u>1.00000000</u> 8193	<u>1.00000003</u> 129	<u>1.00000000</u> 473
32	<u>0.49936394</u> 8193	<u>0.49936339</u> 32769	<u>0.50298744</u> 63	<u>0.49939422</u> 255	<u>0.49936380</u> 4097	<u>0.49936381</u> 8193	<u>0.49936576</u> 193	<u>0.49936382</u> 721
33	<u>0.11213955</u> 2049	<u>0.11213955</u> 2049	<u>0.11214746</u> 255	<u>0.11214746</u> 255	<u>0.11213954</u> 2049	<u>0.11213957</u> 8193	<u>0.11249715</u> 705	<u>0.11213958</u> 34581
34	<u>0.83867632</u> 257	<u>0.83867624</u> 2049	<u>0.83867490</u> 63	<u>0.83867490</u> 63	<u>0.83867621</u> 257	<u>0.83867626</u> 513	<u>0.83867621</u> 153	<u>0.83867633</u> 445
35	<u>-0.99970882</u> 32769		<u>-0.99970047</u> 63	<u>-0.99972445</u> 127			<u>-1.0000023</u> 233	<u>-1.0000000</u> 657

NO.	CADRE		AIND		NO.	CADRE		AIND	
	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}		10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}
1	1.7182819 9 (1)	1.7182819 17 (1)	1.7182819 21	1.7182819 21	19	0.69999886 101 (1)	0.70000002 238 (1)	0.69999716 525	0.70000003 819
2	1.0000000 25 (1)	1.0000000 58 (1)	1.0000000 21	1.0000000 21	20	0.47942828 17 (1)	0.47942824 50 (1)	0.47942825 21	0.47942825 21
3	1.0471974 41 (1)	1.0471975 106 (1)	1.0471976 21	1.0471976 21	21	1.5822330 33 (1)	1.5822330 98 (1)	1.5822330 21	1.5822330 21
4	0.69314721 17 (1)	0.69314720 17 (1)	0.69314720 21	0.69314720 21	22	0.40000001 145 (5)	0.40000000 306 (5)	0.40000001 21	0.40000001 105
5	0.78537854 9 (1)	0.78537819 17 (1)	0.78537819 21	0.78537819 21	23	1.9999998 65 (2)	2.00000001 306 (2)	1.99999944 1071	1.9999999 1659
6	0.27468076 33 (1)	0.27468016 65 (1)	0.27468015 21	0.27468016 63	24	0.86697300 17 (1)	0.86697300 50 (1)	0.86697300 21	0.86697300 21
7	1.1436673 41 (1)	1.1436673 65 (1)	1.1436673 21	1.1436673 21	25	0.37788549 9 (1)	0.37788549 26 (1)	0.37788549 21	0.37788549 21
8	0.14711307 49 (1)	0.14711277 89 (1)	0.14711277 21	0.14711277 105	26	1.1547007 300 (1)	1.1547007 821 (1)	1.1547007 315	1.1547007 483
9	2.2907047 49 (1)	2.2907046 114 (1)	2.2907041 315	2.2907046 483	27	0.77750464 9 (1)	0.77750444 18 (1)	0.77750464 21	0.77750464 21
10	1.8963359 105 (1)	1.8963357 161 (1)	1.8963358 231	1.8963358 231	28	0.0090786372 1073 (1)	0.0090786521 3250 (1)	0.0090786295 651	0.0090786558 1281
11	2.4670705 161 (1)	2.4670703 225 (1)	2.4670711 357	2.4670702 609	29	0.50000027 84 (1)	0.50000022 249 (3)	0.50000022 231	0.50000022 231
12	1.4604471 273 (1)	1.4604471 642 (1)	1.4604476 273	1.4604472 651	30	1.5643972 17 (1)	1.5643965 50 (1)	1.5643965 21	1.5643965 21
13	0.71919398 73 (1)	0.71919385 145 (1)	0.71919383 147	0.71919383 147	31	1.00000001 107 (3)	1.00000000 259 (3)	1.00000001 189	1.00000001 189
14	0.76382029 170 (1)	0.76382037 443 (1)	0.76382032 231	0.76382037 273	32	0.49936383 193 (1)	0.49936382 482 (1)	0.49936381 315	0.49936380 357
15	0.6666667 149 (5)	0.6666667 197 (5)	0.66666687 147	0.66666664 315	33	0.11213957 1096 (1)	0.11213956 2605 (1)	0.11200699 357	0.11213957 693
16	2.4674011 516 (1)	2.4674010 1544 (1)	2.4674010 315	2.4674011 1071	34	0.83867625 137 (1)	0.83867633 378 (1)	0.83867629 147	0.83867629 147
17	1.2974426 66 (2)	1.2974426 132 (2)	1.2974426 63	1.2974426 63	35	-1.0000000 265 (5)	-0.99999997 578 (5)	-0.999999832 399	-0.99999997 693
18	0.60227822 257 (5)	0.60227826 546 (5)	0.60227903 231	0.60227819 483					

表 4

NO. 36	α	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AIND
10^{-5}	1	2.2142975 65	2.2142967 31	2.2142967 33	2.2142923 41	2.2142977 47 (1)	2.2142974 63
	2	2.6516355 129	2.6516374 63	2.6516354 65	2.6516324 65	2.6516356 130 (1)	2.6516353 63
	3	2.8928829 257	2.8928841 127	2.8928828 129	2.8928863 97	2.8928830 243 (1)	2.8928826 147
	4	3.0167555 513	3.0168274 255	3.0167552 257	3.0167649 121	3.0167552 412 (1)	3.0167550 231
	5	3.0791136 1025	3.0791800 255	3.0791131 513	3.0791471 153	3.0791131 613 (1)	3.0791129 315
	6	3.1103456 2049	3.1103616 511	3.1103453 1025	3.1103688 185	3.1103453 846 (1)	3.1103451 399
	7	3.1259681 4097	3.1260661 1023	3.1259680 2047	3.1260028 209	3.1259680 1135 (1)	3.1259679 483
	8	3.1337802 8193		3.1337803 4097	3.1338149 245	3.1337803 1440 (1)	3.1337801 567
	9	3.1376861 16385		3.1376865 8193	3.1377236 277	3.1376866 1797 (1)	3.1376864 651
	10	3.1396359 32769		3.1396396 16385	3.1396750 329	3.1396397 2190 (1)	3.1396395 735
	11			3.1406162 32769	3.1406519 369	3.1406163 2631 (1)	3.1406161 819
	12			3.1411044 65537	3.1411390 437	3.1411046 3108 (1)	3.1411043 903
	13			3.1413485 131073	3.1413831 505	3.1413487 3617 (1)	3.1413485 987
	14				3.1415045 693	3.1414708 4162 (1)	3.1414706 1071
	15				3.1415655 819	3.1415318 4739 (1)	3.1415316 1155
	16				3.1415956 909	3.1415623 5344 (1)	3.1415621 1239
	17				3.1416108 1041	3.1415776 5997 (1)	3.1415774 1323
	18				3.1416182 1153	3.1415852 6678 (1)	3.1415850 1407

表 5

NO. 36	α	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AIND
10^{-5}	19				$\frac{3.1416219}{1261}$	$\frac{3.1415890}{7407 (1)}$	$\frac{3.1415888}{1491}$
	20				$\frac{3.1416237}{1409}$	$\frac{3.1415910}{8168 (1)}$	$\frac{3.1415907}{1575}$
	21				$\frac{3.1416247}{1493}$	$\frac{3.1415919}{8961 (1)}$	$\frac{3.1415917}{1659}$
	22				$\frac{3.1416251}{1561}$	$\frac{3.1415924}{9786 (1)}$	$\frac{3.1415921}{1743}$
	23				$\frac{3.1416253}{1565}$	$\frac{3.1415926}{10643 (1)}$	$\frac{3.1415924}{1827}$
	24				$\frac{3.1416254}{1505}$	$\frac{3.1415927}{11532 (1)}$	$\frac{3.1415925}{1911}$
	25				$\frac{3.1416255}{1385}$	$\frac{3.1415928}{12453 (1)}$	$\frac{3.1415926}{1995}$
	26				$\frac{3.1416259}{1301}$	$\frac{3.1415932}{13374 (1)}$	$\frac{3.1415926}{2079}$
	27				$\frac{3.1416259}{1233}$	$\frac{3.1415934}{14319 (1)}$	$\frac{1.5708066}{1113}$
	28				$\frac{3.1416174}{1133}$	$\frac{3.1415937}{15268 (1)}$	$\frac{1.026 \times 10^{-4}}{63}$
	29				$\frac{3.1377345}{1101}$	$\frac{3.1415942}{16265 (1)}$	$\frac{0.513 \times 10^{-5}}{63}$
	30				$\frac{3.0626995}{981}$	$\frac{1.342 \times 10^9}{16570 (5)}$	$\frac{0.256 \times 10^{-5}}{63}$
	31				$\frac{2.9703569}{893}$	$\frac{2.684 \times 10^9}{16879 (5)}$	$\frac{0.128 \times 10^{-5}}{63}$

表 6

NO. 37	α	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AIND
10 ⁻⁵	2.0	0.33333334 5	0.33333332 7	0.33333334 5	0.33333334 9	0.33333334 9 (1)	0.33333333 21
	1.9	0.34482767 33	0.34482756 15	0.34482776 33	0.34482808 13	0.34482831 26 (1)	0.34482759 21
	1.8	0.35714311 33	0.35714278 15	0.35714331 33	0.35714386 17	0.35714459 43 (1)	0.35714286 21
	1.7	0.37037088 33	0.37037021 15	0.37037051 65	0.37037205 17	0.37037095 76 (1)	0.37037037 21
	1.6	0.38461555 65	0.38461506 15	0.38461564 65	0.38461663 21	0.38461640 109 (1)	0.38461538 21
	1.5	0.40000027 65	0.39999949 15	0.40000043 65	0.40000151 21	0.40000001 254 (5)	0.40000000 21
	1.4	0.41666711 65	0.41666592 15	0.41666733 65	0.41666842 21	0.41666669 399 (5)	0.41666666 21
	1.3	0.43478325 65	0.43478163 15	0.43478355 65	0.43478454 21	0.43478262 544 (5)	0.43478252 21
	1.2	0.45454626 65	0.45454431 15	0.45454661 65	0.45454738 21	0.45454547 685 (5)	0.45454543 21
	1.1	0.47619124 65	0.47618952 15	0.47619151 65	0.47619197 21	0.47619046 826 (5)	0.47619045 21
	1.0	0.49999999 3	0.49999997 7	0.49999999 5	0.49999999 9	0.49999999 835 (5)	0.49999999 21
	0.9	0.52631509 129	0.52631836 15	0.52631488 129	0.52631422 25	0.52631578 776 (5)	0.52631585 21
	0.8	0.55555476 257	0.55555664 15	0.55555459 257	0.55555423 37	0.55555551 1121 (5)	0.55555563 63
	0.7	0.58823290 257	0.58823405 15	0.58823438 513	0.58823328 45	0.58823526 1266 (5)	0.58823554 63
	0.6	0.62499781 513	0.62503780 15	0.62499738 513	0.62499724 53	0.62499794 1415 (5)	0.62500021 105
	0.5	0.66666454 1025	0.66673611 15	0.66666418 1025	0.66666321 69	0.66666663 1564 (5)	0.66666685 147
	0.4	0.71428333 2049	0.71430247 31	0.71428309 2049	0.71428172 85	0.71428563 1713 (5)	0.71428621 147
	0.3	0.76922804 4097	0.76926042 31	0.76922771 4097	0.76922658 117	0.76923069 1866 (5)	0.76923123 189

表 7

NO. 37	α	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AZND
10^{-5}	0.2	<u>0.83332968</u> 8193	<u>0.83337891</u> 31	<u>0.83332931</u> 8193	<u>0.83332948</u> 121	<u>0.83333324</u> 2019 (5)	<u>0.83333437</u> 189
	0.1	<u>0.90908551</u> 16385	<u>0.90914278</u> 31	<u>0.90908496</u> 16385	<u>0.90908834</u> 121	<u>0.90909086</u> 2268 (5)	<u>0.90909165</u> 231
	0.0	<u>0.99999069</u> 32969	<u>0.99999996</u> 7	<u>0.99999492</u> 65537	<u>1.00000000</u> 121	<u>0.99999611</u> 2371 (3)	<u>0.99999991</u> 21
	-0.1		<u>1.1108435</u> 31	<u>1.1111006</u> 131073	<u>1.1111158</u> 165	<u>1.1111110</u> 2452 (2)	<u>1.1111096</u> 357
	-0.2		<u>1.2496004</u> 63		<u>1.2500103</u> 257	<u>1.2499999</u> 2525 (2)	<u>1.2499978</u> 483
	-0.3		<u>1.4270042</u> 63		<u>1.4285730</u> 361	<u>1.4285717</u> 2590 (2)	<u>1.4285690</u> 651
	-0.4		<u>1.6642640</u> 127		<u>1.6666673</u> 493	<u>1.6666664</u> 2655 (2)	<u>1.6666625</u> 819
	-0.5		<u>1.9906741</u> 127		<u>1.9999775</u> 653	<u>1.9999783</u> 2720 (2)	<u>1.9999941</u> 1071
	-0.6		<u>2.4794320</u> 255		<u>2.4996840</u> 909	<u>2.4999995</u> 2785 (2)	<u>2.4999916</u> 1449
	-0.7		<u>3.2390314</u> 255		<u>3.3292741</u> 1301	<u>3.3333337</u> 2850 (2)	<u>3.3333209</u> 2079
	-0.8		<u>4.6425214</u> 511		<u>4.9426436</u> 3637	<u>4.9999896</u> 3043 (2)	<u>4.9999766</u> 3297
	-0.9		<u>7.6432568</u> 1023		<u>8.9265046</u> 6337	<u>9.0423925</u> 3532 (5)	<u>9.9987729</u> 6699

表 8

NO. 38	α	ROMBRG	CHBZNT	SIMP	ADSEMP	CADRE	AIND
10^{-5}	1	1.0000000 17	0.99999996 7	1.0000000 5	1.0000000 17	1.0000000 26 (1)	1.0000000 21
	2	1.0000000 33	1.0000000 15	1.0000000 9	1.0000000 9	1.0000000 69 (1)	0.99999999 21
	3	1.0000000 17	1.0000000 15	1.0000000 5	1.0000000 57	1.0000000 119 (1)	1.0000000 21
	4	1.0000000 65	0.999999967 31	1.0000000 17	1.0000000 17	1.0000000 197 (1)	1.0000000 21
	5	1.0000000 17	0.99999993 7	0.99999996 5	1.0000000 105	1.0000000 263 (1)	1.0000000 21
	6	0.99999999 33	0.999999979 31	1.0000000 9	1.0000000 9	1.0000000 394 (1)	0.99999999 21
	7	1.0000000 17	1.0000000 7	1.0000000 5	1.0000000 125	1.0000001 508 (1)	1.0000000 21
	8	1.0000000 129	0.999999945 31	2.0000000 5	1.0000000 33	1.0000000 656 (1)	1.0000000 63
	9	1.0000000 17	1.0000001 7	1.0000001 5	1.0000005 193	1.0000001 786 (1)	0.99999999 21
	10	0.99999999 33	0.9999999854 31	0.99999999 9	1.0000000 9	1.0000000 917 (1)	0.99999999 63
	11	1.0000001 17	0.999999970 31	1.0000001 5	1.0000000 225	1.0000001 1063 (1)	1.0000000 21
	12	0.99999999 65	1.6193223 7	1.0000000 17	1.0000000 17	1.0000000 1211 (1)	1.0000000 63
	13	1.0000000 17	0.999999949 31	0.999999994 5	1.0000001 241	1.0000001 1393 (1)	1.0000001 21
	14	1.0000000 33	0.98467828 15	1.0000000 9	1.0000000 9	1.0000001 1552 (1)	1.0000000 63
	15	1.0000001 17	0.999999973 63	0.999999991 5	1.0000000 249	1.0000000 1714 (1)	0.99999997 21
	16	1.0000000 257	0.999999985 63	2.0000000 5	1.0000001 65	1.0000000 1975 (1)	1.0000001 147
	17	0.99999999 17	0.999999999 15	1.0000002 5	1.0000000 353	1.0000000 2233 (1)	0.99999999 21
	18	1.0000000 33	0.999999939 63	0.999999993 9	0.999999993 8	1.0000001 2492 (1)	0.99999996 63

表 9

No. 38	α	ROMBRG	CHBZNT	SZMP	ADSZMP	CADRE	AZND
10^{-5}	19	0.9999999 17	1.0000000 7	1.0000002 5	0.99999975 401	1.0000000 2750 (1)	1.0000000 21
	20	0.9999999 65	1.0000002 63	1.0000000 17	1.0000000 17	1.0000000 3012 (1)	1.0000000 147
	21	0.99999991 17	1.0000001 7	0.99999981 5	0.99999991 437	1.0000001 3286 (1)	0.99999994 21
	22	1.0000000 33	0.99999920 63	1.0000001 9	1.0000001 9	1.0000000 3745 (1)	1.0000000 63
	23	0.99999997 17	0.99999981 15	0.99999967 5	1.0000002 469	1.0000001 4027 (1)	0.99999999 21
	24	1.0000000 129	1.0000004 63	2.0000000 5	1.0000000 33	1.0000001 4356 (1)	1.0000000 147
	25	0.9999999 17	0.99999982 15	1.0000003 5	1.0000000 489	1.0000001 4646 (1)	1.0000001 21
	26	0.9999999 33	0.99014443 31	1.0000001 9	1.0000001 9	1.0000000 4937 (1)	1.0000000 63
	27	0.99999987 17	0.99999970 15	1.0000001 5	1.0000002 485	0.99999997 5243 (1)	0.99999978 21
	28	0.9999999 65	1.0718976 7	1.0000002 17	1.0000001 17	1.0000000 5553 (1)	1.0000000 147
	29	1.0000000 17	1.0000001 15	0.99999985 5	1.0000002 493	1.0000001 5859 (1)	1.0000002 21
	30	0.99999984 33	0.47026818 7	1.0000001 9	1.0000001 9	1.0000001 6150 (1)	0.99999977 63
	31	0.99999975 17	0.99999967 31	0.99999976 5	0.99999975 17	1.0000000 6664 (1)	1.0000000 21
	32	2.0000000 17	0.99999967 63	2.0000000 5	2.0000000 17	1.0000000 7166 (1)	1.0000001 215
	33	1.0000003 17	1.0000004 7	1.0000004 5	1.0000004 17	1.0000000 7680 (1)	0.99999984 21
	34	1.0000001 33	1.0000004 63	0.99999981 9	0.99999981 9	1.0000000 8195 (1)	0.99999999 63
	35	1.0000001 17	1.0000000 15	1.0000002 5	0.99999984 669	1.0000000 8709 (1)	0.99999999 21
	36	0.99999997 65	1.0000000 63	0.99999990 17	0.99999990 17	1.0000001 9227 (1)	1.0000000 147

表 10

NO. 38	α	ROMBRG	CHBINT	SIMP	ADSIMP	CADRE	AIND
10 ⁻⁵	37	<u>1.00000003</u> 17	<u>0.99999994</u> 15	<u>0.99999985</u> 5	<u>1.00000001</u> 733	<u>1.00000000</u> 9741 (1)	<u>0.99999999</u> 21
	38	<u>1.00000001</u> 33	<u>0.86863112</u> 15	<u>1.00000001</u> 9	<u>1.00000001</u> 9	<u>1.00000000</u> 10256 (1)	<u>0.99999999</u> 63
	39	<u>0.99999993</u> 17	<u>0.99999992</u> 7	<u>0.99999961</u> 5	<u>0.99999996</u> 867	<u>1.00000001</u> 10770 (1)	<u>1.00000001</u> 21
	40	<u>1.00000000</u> 129	<u>1.5994682</u> 7	<u>2.00000000</u> 5	<u>1.00000000</u> 33	<u>1.00000000</u> 11244 (1)	<u>0.99999999</u> 315
	41	<u>1.00000001</u> 17	<u>0.99999985</u> 63	<u>1.00000003</u> 5	<u>1.00000000</u> 881	<u>1.00000003</u> 11249 (1)	<u>1.00000001</u> 21
	42	<u>1.00000001</u> 33	<u>0.70272060</u> 7	<u>0.99999994</u> 9	<u>0.99999994</u> 9	<u>1.00000001</u> 11780 (1)	<u>0.99999988</u> 63
	43	<u>0.99999996</u> 17	<u>0.99999981</u> 15	<u>1.00000001</u> 5	<u>1.00000001</u> 857	<u>1.00000000</u> 12310 (1)	<u>0.99999997</u> 21
	44	<u>0.99999997</u> 65	<u>1.3907828</u> 31	<u>0.99999985</u> 17	<u>0.99999987</u> 17	<u>1.00000000</u> 13172 (1)	<u>1.00000000</u> 147
	45	<u>0.99999993</u> 17	<u>0.99999975</u> 7	<u>0.99999984</u> 5	<u>1.00000000</u> 925	<u>1.00000000</u> 13702 (1)	<u>1.00000001</u> 21
	46	<u>1.00000001</u> 33	<u>1.0741293</u> 31	<u>1.00000004</u> 9	<u>1.00000004</u> 9	<u>1.00000000</u> 14241 (1)	<u>0.99999994</u> 63
	47	<u>1.00000001</u> 17	<u>1.00000001</u> 7	<u>0.99999993</u> 5	<u>1.00000000</u> 957	<u>1.00000001</u> 14771 (1)	<u>0.99999991</u> 21
	48	<u>1.00000000</u> 257	<u>0.66767472</u> 31	<u>2.00000000</u> 5	<u>1.00000000</u> 65	<u>1.00000001</u> 15463 (1)	<u>1.00000001</u> 315
	49	<u>0.99999981</u> 17	<u>1.00000001</u> 7	<u>1.00000005</u> 5	<u>1.00000001</u> 969	<u>0.99999999</u> 15993 (1)	<u>1.00000000</u> 21
	50	<u>1.00000002</u> 33	<u>0.86456192</u> 31	<u>0.99999963</u> 9	<u>0.99999963</u> 9	<u>1.00000001</u> 16540 (1)	<u>0.99999996</u> 63
	51	<u>1.00000000</u> 17	<u>0.99999921</u> 7	<u>1.00000001</u> 5	<u>1.00000001</u> 961	<u>1.00000000</u> 17086 (1)	<u>0.99999988</u> 21
	52	<u>1.00000000</u> 65	<u>1.1943620</u> 31	<u>0.99999991</u> 17	<u>0.99999991</u> 17	<u>1.00000000</u> 17636 (1)	<u>1.00000000</u> 147
	53	<u>1.00000001</u> 17	<u>1.00000004</u> 7	<u>0.99999988</u> 5	<u>0.99999997</u> 965	<u>1.00000001</u> 18213 (1)	<u>1.00000002</u> 21
	54	<u>1.00000000</u> 33	<u>1.0240379</u> 7	<u>0.99999982</u> 9	<u>0.99999984</u> 9	<u>1.00000000</u> 18776 (1)	<u>1.00000001</u> 63

3. 多次元の場合

多重積分

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (21)$$

についても自動積分を考えることができる。作成したプログラムは次の5つである。

- (1) ROMBGN (n -dimensional Romberg Integration)
- (2) SIMPN (n -dimensional Simpson Integration)
- (3) ADINTN

積分区間を1辺長の超立方体とし, corner method を用いる。これは

$$I_{2h} = h^n [(\text{corner pointの関数値の和}) + 2^{n+1} (\text{中心における関数値})] / 3 \quad (22)$$

と表わされる。この超立方体の各辺を2等分して 2^n 個の超立方体に分け, 各々の超立方体に同じ corner method を適用する。各超立方体における計算値の和を I_h とし

$$|I_{2h} - I_h| \leq \varepsilon \quad (23)$$

をらば終了。そうでなければ各超立方体を別々に取り扱い, 同じことをくり返す。

(4) ADSMPN

ADINTN と同様であるが, corner method のかわりに Simpson 積分法を用いる.

(5) PROD

$$I = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{L_0}^{U_0} dx_1 \int_{L_1(x_1)}^{U_1(x_1)} dx_2 \cdots \int_{L_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{U_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1 \quad (24)$$

として 1 変数の積分公式を利用する方法である. 積分法としては adaptive Simpson を使用した.

簡単な例として次の積分を計算した. 結果を表 11 に示す.

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dx dy}{2b - \cos x - \cos y} \quad (25)$$

表 11

	ROMBQN	SIMPQN	ADINTN	ADSMPN	PROD
$\frac{1}{b} = 0.7$	$\frac{4.0599306}{81}$	$\frac{4.0588932}{1089}$	$\frac{4.0588933}{941}$	$\frac{4.0588930}{1305}$	$\frac{4.0588878}{641}$
$\frac{1}{b} = 0.8$	$\frac{5.0147424}{1089}$	$\frac{5.0147430}{1089}$	$\frac{5.0147426}{1389}$	$\frac{5.0147326}{2073}$	$\frac{5.0147392}{1013}$
$\frac{1}{b} = 0.9$	$\frac{6.4480859}{1089}$	$\frac{6.4481008}{1089}$	$\frac{6.4481006}{2701}$	$\frac{6.4481004}{3289}$	$\frac{6.4480851}{1409}$
$\frac{1}{b} = 0.99$	$\frac{10.439739}{4225}$	$\frac{10.439620}{16641}$	$\frac{10.439621}{11437}$	$\frac{10.439370}{1493785}$	$\frac{10.439616}{6077}$

許容誤差 として $\varepsilon = 10^{-5}$ を用いた.

参考文献

- 1) 清野: 自動積分法について, 京都大学計算センター月報, vol. 9, no. 11-12 (1974), p. 15.
- 2) J. R. Rice: A metalgorithm for adaptive quadrature, JACM, vol. 22, no. 1 (1975), p. 61.
- 3) J. N. Lyness: Notes on the adaptive Simpson quadrature routine, JACM, vol. 16, no. 3 (1969), p. 483.
- 4) C. de Boor: CADRE: an algorithm for numerical quadrature, in Mathematical Software, J. R. Rice, ed., Academic Press (1971), p. 417.
- 5) R. Piessens: An algorithm for automatic integration, Angewandte Informatik, (1973), Heft 9, p. 379.