数理解析研究所講究録
第271巻 1976年 34-44

連結と余連結なCWスペクトラム

阪市大 理　吉村 善一

CWスペクトラムと射のホモトピー類からなる圏を $\mathcal{C}_R$ とし、この圏の中で話を進める。

1節　Postnikov 分解

1.1. CWスペクトラム E に対し、$n+1$ 余連結なCWスペクトラム F と射 $f: E \to F$ が与えられ、$f_*: \pi_i(E) \cong \pi_i(F)$ $(i \leq n)$ が満たされるとき、対 (F, f) を E の n+1余連結Postnikovコファイバーとよび、$(E(-\infty, n], j_n)$ で表わす。　又、n 連結なCWスペクトラム G と射 $g: G \to E$ が与えられ、$g_*: \pi_i(G) \cong \pi_i(E)$ $(i > n)$ が満たされるとき、対 (G, g) を E の n連結Postnikovファイバーとよび、$(E(n, \infty), i_n)$ で表わす。　E に $n+2$ 次元以上の胞体を接着して $n+1$ 次元以上のホモトピー群を消したCWスペクトラムを $E_{n,\infty}$ とし、その包含を $\iota_n: E \subset E_{n,\infty}$ と

すると，

(1.1) 対 $(E_{n,\infty},\ \iota_n)$ は E の $n+1$ 余連結 Postnikov コファイバーになる。

一方，ι_n を含むコファイバー列 $E'_{n,\infty} \xrightarrow{\kappa_n} E \subset E_{n,\infty}$ を考えると，

(1.2) 対 $(E'_{n,\infty},\ \kappa_n)$ は E の n 連結 Postnikov ファイバーになる。

しかも $(E_{n,\infty}/E)^{n+1} = \{*\}$ となるから

<u>命題 1.1</u>　CW スペクトラム E が n 連結ならば，E とホモトピー同値でその n 切片が基点からなる CW スペクトラム G が存在する。

<u>補題 1.2</u>　i) X は n 連結で E は $n+1$ 余連結，又は ii) X は高々 n 次元で E は n 連結とする。そのとき $\{X, E\} = \{0\}$ となる。

[証明] i) 命題 1.1 より $X^n = \{*\}$ と仮定してよいので，k についての帰納法により $\{X^{n+k}, E\} = 0$ $(k \geqq 0)$ を得る。そこで Milnor の完全列

$$0 \to \varprojlim{}^1 \{X^{n+k}, \Sigma^{-1}E\} \to \{X, E\} \to \varprojlim \{X^{n+k}, E\} \to 0$$

を用いると，$\{X, E\} = \{0\}$ となる。

ii) X は $X_0 = \{*\}$, $X_{k+1}/X_k = \bigvee_{\alpha} \Sigma^{d_m}$ $(d_m \leq n)$, $X = \cup X_k$ なる位数フィルトレーション $\{X_k\}$ をもつ。従って Milnor の

完全列をそれに適用すると、$\{X, E\} = \{0\}$ を得る。」

<u>定理 1.3</u> (Araki [1], Dold [3])

"Postnikov ファイバー, コファイバーの普遍性"

i) $n+1$ 余連結な CW スペクトラム F と射 $f: E \to F$ に対し $f = f_n \cdot j_n$ なる唯一つの射 $f_n: E(-\infty, n] \to F$ が存在する.

ii) n 連結な CW スペクトラム G と射 $g: G \to E$ に対し $g = i_n \cdot g_n$ なる唯一つの射 $g_n: G \to E(n, \infty)$ が存在する。

[証明] (1.1) と (1.2) により 対 $(E(-\infty, n], j_n)$ と 対 $(E(n, \infty), i_n)$ が存在する。 そこで次の完全列

$$\{\Sigma E(n,\infty), F\} \to \{E(-\infty, n], F\} \xrightarrow{j_n^*} \{E, F\} \to \{E(n,\infty), F\}$$

$$\{G, \Sigma^{-1}E(-\infty, n]\} \to \{G, E(n,\infty)\} \xrightarrow{i_{n*}} \{G, E\} \to \{G, E(-\infty, n]\}$$

を考えると、補題 1-2 i) より j_n^* と i_{n*} は共に同型になる。従って f, g に対し f_n, g_n がそれぞれ唯一つ定まる。」

<u>補題 1.4</u> $m < n$ とすると, ホモトピー同値射

$$(E(m,\infty))(-\infty, n] \to (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

が存在して、次の図式は可換になる:

$$\begin{array}{ccccc} & \swarrow & E(m,\infty) & \to & (E(m,\infty))(-\infty, n] \\ E & & & & \downarrow \\ & \searrow & E(-\infty, n] & \leftarrow & (E(-\infty, n])(m, \infty) \end{array}.$$

上の補題の結果, $m < n$ に対し

$$E(m, n] = (E(m, \infty))(-\infty, n] = (E(-\infty, n])(m, \infty)$$

と定義してよい。 特に $E(n-1, n] = E[n]$ と略す。

<u>1.2.</u> $\varphi : E\wedge\mathfrak{F}\to\mathfrak{G}$ をCWスペクトラムのペアリングとする。 $E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F}(n,\infty)$ は n 連結だから、定理1.3 ii) と補題1.2 i) を用いると次の図式

(1.3)
$$
\begin{tikzcd}
E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F}(n,\infty) \arrow[r] \arrow[dd, "\varphi(n,\infty)"'] & E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F} \arrow[r] \arrow[d] & E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F}(-\infty,n] \arrow[dd, "\varphi(-\infty,n]"] \\
 & E\wedge\mathfrak{F} \arrow[d] & \\
\mathfrak{G}(n,\infty) \arrow[r] & \mathfrak{G} \arrow[r] & \mathfrak{G}(-\infty,n]
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\varphi(n,\infty)$ と $\varphi(-\infty,n]$ が唯一つ存在する。
更に (1.3) と補題1.2 i) を用いると次の図式

(1.4)
$$
\begin{tikzcd}
E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F}(n,\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(n,\infty)"'] & E[0,\infty)\wedge\mathfrak{F}[n] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi[n]"] & E[0]\wedge\mathfrak{F}[n] \arrow[dl, "\bar{\varphi}[n]"] \\
\mathfrak{G}(n,\infty) \arrow[r] & \mathfrak{G}[n] &
\end{tikzcd}
$$

を可換にする射 $\varphi[n]$ と $\bar{\varphi}[n]$ が唯一つ定まる。

<u>命題1.5</u> i) E を（結合性又は可換性をみたす）1をもつ環CWスペクトラムとする。$1/1$ のとき

a) $E[0,\infty)$, $E[0]$ は共に $1/1$ の様なCWスペクトラムで、$i : E[0,\infty)\to E$ と $j' : E[0,\infty)\to E[0]$ は1をもつ環としての射になる。

b) $E(-\infty,0]$ は（結合性をみたす）$E[0,\infty)$ 加群CWスペクトラムで、$j : E\to E(-\infty,0]$ と $i' : E[0]\to E(-\infty,0]$ は $E[0,\infty)$ 加群としての射になる。

ii) $f : E\to\mathfrak{F}$ を1をもつ環CWスペクトラムの射とする。

そのとき，$f[0,\infty): E[0,\infty) \to F[0,\infty)$ と $f[0]: E[0] \to F[0]$ は共にその様な射になる。

iii) 次の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd}
 & E[0] \arrow[dr] & \\
E[0,\infty) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, bend left] & E(-\infty,0] \arrow[d] \\
F[0,\infty) \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[r] & F(-\infty,0] \\
 & F[0] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

.

K, MU をそれぞれ BUスペクトラム，複素Thomスペクトラムとし，$\mu_c: MU \to K$ を Thom写像とする。K と MU は共に結合性と可換性をみたす1をもつ環CWスペクトラムで，μ_c は1をもつ環としての射になる。連結BUスペクトラム $K[0,\infty)$ と余連結BUスペクトラム $K(-\infty,0]$ をそれぞれ k, $\bar{k}$ で表わし，命題1.5を適用すると

<u>定理1.6</u> i) k は結合性と可換性をみたす1をもつ環CWスペクトラムで，$\bar{k}$ は結合性をみたす k 加群CWスペクトラムになる。

ii) Thom写像 μ_c によって射 $\xi: MU \to k$ が唯一つ定まり，次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
MU \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "\mu_c"'] \arrow[d, "\mu"'] & K \arrow[d, "\bar{\lambda}"] & H \arrow[dl, "\bar{\eta}"] \\
H \arrow[r, "\bar{\eta}"'] & \bar{k} &
\end{tikzcd}$$

しかも μ_c, ξ, λ, μ, η は1をもつ環としての射で, $\bar{\lambda}$, $\bar{\eta}$ は k 加群としての射である。

なお, 1をもつ環 k と k 加群 $\bar{k}$ との関係として

命題 1.7 次の列は完全列である:

$$0 \longrightarrow k_*(X) \underset{\pi_*(k)}{\otimes} \pi_*(\bar{k}) \longrightarrow \bar{k}_*(X) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\pi_*(k)}(k_*(X), \pi_*(\bar{k})) \rightarrow 0.$$

2節 普遍係数列

2.1. CWスペクトラム E とアーベル群 I に対し, $\mathrm{Hom}(E_*(\ ), I)$ はCWスペクトラム上のコホモロジー理論になる。従って, Brownの表現可能定理によりCWスペクトラム $\hat{E}(I)$ が唯一つ存在して, 同型 $\tau_I : \hat{E}(I)^*(X) \cong \mathrm{Hom}(E_*(X), I)$ が得られる。今 $0 \rightarrow A \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} J \rightarrow 0$ をアーベル群 A の単射的分解とすると, 準同型 φ より射 $\hat{E}(\varphi) : \hat{E}(I) \rightarrow \hat{E}(J)$ が唯一つ定まる。その写像錐を $\Sigma\hat{E}(A)$ とおくと, 完全列

(2.1) $\quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}(E_{*-1}(X), A) \rightarrow \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{\tau_A} \mathrm{Hom}(E_*(X), A) \rightarrow 0$

が成り立ち, しかも $\hat{E}(A)$ は A の単射的分解によらないで一意に定まる。特に

(2.2) $\quad \hat{H}(A) = HA \quad , \quad \hat{K}(A) = KA$ [4].

補題 2.1 $\quad \hat{E}(A) = F(E, \hat{S}(A))$ 射CWスペクトラム.

[証明] I を単射的アーベル群とすると, 同型

$$\hat{E}(I)^*(X) \cong \mathrm{Hom}(E_*(X), I) \cong \hat{S}(I)^*(X \wedge E) \cong F(E, \hat{S}(I))^*(X)$$

が得られるので、ホモトピー同値射 $t_I : \hat{E}(I) \to F(E, \hat{S}(I))$ が存在する。従って A の単射的分解 $0 \to A \to I \to J \to 0$ に対し、次の図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\hat{E}(A) & \to & \hat{E}(I) & \to & \hat{E}(J) & \to & \Sigma\hat{E}(A) \\
{\scriptstyle t_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_I} & & \downarrow{\scriptstyle t_J} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma t_A} \\
F(E, \hat{S}(A)) & \to & F(E, \hat{S}(I)) & \to & F(E, \hat{S}(J)) & \to & F(E, \Sigma\hat{S}(J))
\end{array}$$

を可換にするホモトピー同値射 $t_A : \hat{E}(A) \to F(E, \hat{S}(A))$ が存在する。□

$e_E(A) : \hat{E}(A) \wedge E \to \hat{S}(A)$ を評価射とするとき、射 $\varepsilon_E(A) : E \to F(\hat{E}(A), \hat{S}(A))$ を $e_E(A) = e_{\hat{E}(A)}(A)_*(1_{\hat{E}(A)} \wedge \varepsilon_E(A))$ によって定義する。以後、整数環 $\mathbb{Z}$ に対し $\hat{E}(\mathbb{Z})$, $e_E(\mathbb{Z})$, $\varepsilon_E(\mathbb{Z})$ をそれぞれ $\hat{E}$, e_E, ε_E と略す。

<u>定理2.2</u> i) 関手 $F(\ , \hat{S}(A)) : \mathcal{C}_h \to \mathcal{C}_h$ は反変完全関手である。

ii) 全ての k に対し $\pi_k(E)$ は有限生成と仮定する。そのとき

a) $\varepsilon_E : E \longrightarrow F(\hat{E}, \hat{S})$ はホモトピー同値射であり、

b) $F(\ , \hat{S}) : \{X, E\} \longrightarrow \{\hat{E}, \hat{X}\}$ は同型になる。

準同型 $\kappa_A : \hat{E}(A)^*(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A)))$ を $\kappa_A(f) = f_*$ によって定義すると

<u>命題2.3</u> A が有限生成アーベル群ならば、次の列

$$0 \to \mathrm{Ext}(E_{*-1}(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \to \hat{E}(A)^*(X) \xrightarrow{\kappa_A} \mathrm{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(A))) \to 0$$

は完全列になる。

［証明］ I が単射的アーベル群として有限生成のとき，次の三角形

$$\begin{tikzcd} \hat{E}(I)^*(X) \arrow[r, "\kappa_I"] \arrow[dr, "\tau_I"'] & \mathrm{Hom}(E_*(X), \pi_0(\hat{S}(I))) \arrow[d, "\rho_I"] \\ & \mathrm{Hom}(E_*(X), I) \end{tikzcd}$$

を可換にする自然な同型 ρ_I が存在することを示せば十分である。今 $\alpha_I = \tau_I(1_{\hat{S}(I)}) \in \mathrm{Hom}(\pi_0(\hat{S}(I)), I)$ とおくと，上の同型 τ_I は $\tau_I = \alpha_{I*} \cdot \kappa_I$ を満たす。明らかに $\pi_0(\hat{S}(I)) \cong I$ だから，その同型を T と表わすと $\alpha_I \cdot S_{I*} = T$ となる射 $S_I : \hat{S}(I) \to \hat{S}(I)$ が存在する。しかも I に対する仮定の下 α_I は同型となるので，同型 ρ_I として α_{I*} を取ればよい。□

1.2. $\varphi : E \wedge F \to G$ を CW スペクトラムのペアリングとすると，次の図式

$$\begin{tikzcd} \hat{G}(A) \wedge E \wedge F \arrow[r, "1\wedge\varphi"] \arrow[d, "\bar{\varphi}(A)\wedge 1"'] & \hat{G}(A) \wedge G \arrow[d, "e_G(A)"] \\ \hat{F}(A) \wedge F \arrow[r, "e_F(A)"'] & \hat{S}(A) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

を可換にする射 $\bar{\varphi}(A) : \hat{G}(A) \wedge E \to \hat{F}(A)$ が唯一つ定まる。更に，$e_{E\wedge F}(A) = e_F(A)_*(e_{E,F}(A) \wedge 1_F)$ によって与えられる評価射 $e_{E,F}(A) : \widehat{E \wedge F}(A) \wedge E \to \hat{F}(A)$ を用いると

(2.4) $\bar{\varphi}(A) : \hat{G}(A)\wedge E \xrightarrow{\hat{\varphi}(A)\wedge 1} \widehat{E\wedge F}(A)\wedge E \xrightarrow{e_{E,F}(A)} \hat{F}(A)$.

定理 2.2 ii) と (2.4) により

<u>命題 2.4</u>　E は 1 をもつ環CWスペクトラムとする。

i) F が(結合性をみたす)左E加群CWスペクトラムならば、$\hat{F}(A)$ は(結合性をみたす)右E加群CWスペクトラムになる。

ii) $f : F \to G$ が左E加群としての射ならば、$\hat{f}(A) : \hat{G}(A) \to \hat{F}(A)$ は右E加群としての射になる。

ペアリング $\varphi : F\wedge E \to G$ により $E^*(Y)\otimes Hom(G_*(Y), A) \to Hom(F_*(X\wedge Y), A)$ が導かれ、$\bar{\varphi}(A) : E\wedge \hat{G}(A) \to \hat{F}(A)$ により $E^*(X)\otimes \hat{G}(A)^*(Y) \to \hat{F}(A)^*(X\wedge Y)$ が導かれる。

<u>定理 2.5</u>　E は 1 をもつ環CWスペクトラム、F は右E加群CWスペクトラムとし、A は有限生成アーベル群とする。そのとき $E^*(\ )$ 加群としての完全列

$$0 \to Ext(F_{*-1}(X), A) \to \hat{F}(A)^*(X) \xrightarrow{K_A} Hom(F_*(X), A) \to 0$$

が存在する。

[証明] I を単射的アーベル群とすると、(2.3) により

$$\begin{array}{ccc} E^*(X)\otimes \hat{F}(I)^*(Y) & \xrightarrow{1\otimes K_I} & E^*(X)\otimes Hom(F_*(Y), \pi_0 \hat{S}(I)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{F}(I)^*(X\wedge Y) & \xrightarrow[K_I]{} & Hom(F_*(X\wedge Y), \pi_0 \hat{S}(I)) \end{array}$$

が可換になる。従って命題 2.3 の完全列は $E^*(\ )$ 加群としてのそれになる。□

<u>命題 2.6</u>　ホモトピー同値射 $KA \to \hat{S}(A)$ は次の図式

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & KA \arrow[r, "\bar{\lambda}"] \arrow[d] & \bar{k}A \arrow[d] \\
\hat{k}(A) \arrow[r, "\hat{\lambda}(A)"'] & \hat{K}(A) \arrow[r, "\hat{\bar{\lambda}}(A)"'] & \hat{\bar{k}}(A)
\end{tikzcd}$$

を可換にするホモトピー同値写像 $kA \longrightarrow \hat{k}(A)$, $\bar{k}A \to \hat{\bar{k}}(A)$ を導く。

定理1.6 iii), 2.2 i) と命題2.6により次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\bar{\lambda}"] & & \hat{K} \arrow[dr, "\hat{\bar{\lambda}}"] \arrow[drr, "\hat{\mu}_c"] & & \\
MU \arrow[urr, "\mu_c"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[drr, "\mu"'] & k \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & & \bar{k} \arrow[rr, "\simeq"] & & \hat{\bar{k}} \arrow[r, "\hat{\xi}"] & \widehat{MU} \\
 & & H \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[ur, "\bar{\eta}"] & & \hat{H} \arrow[ur, "\hat{\bar{\eta}}"] \arrow[urr, "\hat{\mu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

が得られるので，命題2.4を用いて定理1.6 iii) の図式を拡張すると

定理2.7 次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "\bar{\lambda}"] \arrow[drr, "\hat{\mu}_c"] & & \\
MU \arrow[urr, "\mu_c"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[drr, "\mu"'] & k \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\eta"] & & \bar{k} \arrow[r, "\hat{\xi}"] & \widehat{MU} \\
 & & H \arrow[ur, "\bar{\eta}"] \arrow[urr, "\hat{\mu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

において，i) μ_c, ξ, λ, μ, η は1をもつ環としての射で，ii) $\bar{\lambda}$, $\bar{\eta}$ は k 加群としての射，又 iii) $\hat{\mu}_c$, $\hat{\xi}$, $\hat{\mu}$ は MU 加群としての射である。

$\mu : MU \longrightarrow H$ は Baas [2] によれば

(2.5) $\qquad MU \to \cdots \to MU\langle n\rangle \to \cdots \to H$

と分解され，かつ $MU\langle n\rangle_*(\ )$ は結合性をみたす $MU_*(\ )$ 加群になる。従って $\varphi_n : MU_*(X) \otimes MU\langle n\rangle_*(Y) \to MU\langle n\rangle_*(X \wedge Y)$

を導くペアリング $\varphi\langle n\rangle : MU \wedge MU\langle n\rangle \to MU\langle n\rangle$ が存在するが、$MU\langle n\rangle^0(MU\wedge MU\langle n\rangle)$ のハウスドルフ性によりペアリング $\varphi\langle n\rangle$ は唯一つ定まる。 命題2.4を用いると

定理2.8 i) $MU\langle n\rangle$, $\widehat{MU\langle n\rangle}(A)$ は共に結合性をみたす MU 加群CWスペクトラムである。

ii) $MU \to \cdots \to MU\langle n\rangle \to \cdots \to H \to \cdots \to \widehat{MU\langle n\rangle} \to \cdots \to \widehat{MU}$ は MU 加群としての射からなる列である。

定理2.5を適用すると

系2.9 A が有限生成アーベル群ならば、$\kappa_A : \pi_*(\widehat{MU\langle n\rangle}(A)) \to \mathrm{Hom}(\pi_{-*}(MU\langle n\rangle), A)$ は $\pi_*(MU)$ 加群として同型になる。

参考文献

[1] S. Araki: 一般コホモロジー, 紀伊国屋書店 (予刊)

[2] N. A. Baas: On bordism theory of manifold with singularities, Aarhus Univ. (1969/70).

[3] A. Dold: On general cohomology, Aarhus Univ. (1968).

[4] Z. Yosimura: Universal coefficient sequences for cohomology theories of CW-spectra, Osaka J. Math. (投稿中)