数理解析研究所講究録
第271巻 1976年 77-84

A new family in the stable homotopy groups of spheres

広大 理　岡 七郎

球面の k 次元安定ホモトピー群を G_k であらわす。p は素数 ≥ 5 とし，$q=2(p-1)$ とする。

G_* の p-成分には，戸田[8]-Adams[1]の α-列 $\{\alpha_r \in G_{rq-1}\}$，Smith[6]-戸田[9]の β-列 $\{\beta_r \in G_{(rp+r-1)q-2}\}$ という2つの無限列の存在が知られており，$(p^2+1)q-4$ 次元以下ではこれらの元の結合（合成）しかあらわれない（[7], [2]）。次元が $(p^2+p)q-2$ から $(2p^2+1)q-6$ までの間も殆んど同様で新たに $\beta_1^r\varepsilon'$，$\beta_1^r\pi_i$ $(1\leq i\leq p-3)$ なる元が加わる（cf. [2]）。ここに ε'，π_i の次元は $(p^2+1)q-3$，$(p^2+(i+2)p+i+1)q-5$ であり、位数はともに p、Toda bracket によって、$\varepsilon'=\{\beta_1^p,\alpha_1,\alpha_1\}$，$\pi_i=\{\beta_1\beta_{p+i},\alpha_1,\alpha_1\}$ と書かれる。π_i の定義されるための条件 $\alpha_1\beta_1\beta_{p+i}=0$ は最近の[5]において証明された。

上記の中間の $(p^2+1)q-3$ から $(p^2+p)q-3$ までの次元には，ε'，$\varepsilon_i \in G_{(p^2+i)q-2}$ $(1\leq i\leq p-1)$，$\varphi \in G_{(p^2+p)q-3}$ なる元があら

われる。ε_i は位数 p で $\varepsilon_i = \{\varepsilon_{i-1}, p, \alpha_1\}$ で定義され，$\alpha_1\varepsilon_{p-2} = 0$ なる関係が知られる。φ は位数 p^2 で，$\varphi \in \{\varepsilon_{p-2}, \alpha_1, \alpha_1\}$，$p\varphi = \alpha_1\varepsilon_{p-1}$ を満たす [2]。また，ε_{p-1} は Smith の β_p と（整数（$\not\equiv 0 \mod p$）倍をのぞいて）一致する。本論の目的はこの族 $\{\varepsilon_i\}$ の拡張を考えることである。

定理 A　次の条件をみたす $\rho_{t,r} \in G_*$，$t \geqq 1$，$1 \leqq r \leqq p-1$，が存在する：$\deg \rho_{t,r} = (tp^2 + (t-1)p + r)q - 2$，order of $\rho_{t,r} = p$，$\rho_{1,r} = \varepsilon_r$，$\rho_{t,p-1} = \beta_{tp}$，$\rho_{t,r} \in \{\rho_{t,r-1}, p, \alpha_1\}$。

定理 A′　さらに $t = sp$ のとき，次の条件をみたす $\rho'_{sp,r} \in G_*$，$s \geqq 1$，$1 \leqq r \leqq 2p-2$，が存在する：$\deg \rho'_{sp,r} = (sp^3 + sp^2 - 2p + r + 1)q - 2$，order of $\rho'_{sp,r} = p$，$\rho'_{sp,r} = \rho_{sp,r-p+1}$ for $r \geqq p$，$\rho'_{sp,r} \in \{\rho'_{sp,r-1}, p, \alpha_1\}$。

定理Aは以下に述べるのと殆んど同じ方法で最近 Smith も得ている。彼の場合，$\rho_{t,r}$ の構成が少し弱い形なので，定理Aの最後の条件及び定理A′に対応する結果は出ていないようである。また、これらに関連した $\mathrm{Ext}^{2,*}_{BP^*(BP)}(BP^*, BP^*)$ についての Zahler の最近の研究がある。

§1 元の構成。 有限CW複体 (spectrum) X, Y について $\{X, Y\}_t = \mathrm{Dir}\lim_N [S^{N+t}X, S^N Y]$, 特に $\mathcal{A}_t(X) = \{X, X\}_t$ と記す。直和 $\mathcal{A}_*(X) = \sum_t \mathcal{A}_t(X)$ は写像の結合から導かれる積により graded ring になる。特に X が Z_p-space (or -spectrum) [9], すなわち $1_X \in \mathcal{A}_0(X)$ の位数が p, の時 $\mathcal{A}_*(X)$ は体 Z_p 上の vector 空間になる。

$M = S^0 \cup_p e^1$ (stable complex) とし、$S^0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} S^1$ を cofibering とする。$\mathcal{A}_q(M) = Z_p$ であり、この生成元 α は $\mathcal{P}^1$ で detect される [10]。この時、α-列 $\{\alpha_r\}$ は $\alpha_r = \pi\alpha^r i$ で定義される。α^r の mapping cone を $X(r) = M \cup_{\alpha^r} CS^{rq}M$ とする。$M \xrightarrow{j_r} X(r) \xrightarrow{k_r} S^{rq+1}M$ を cofibering とし、$i_r = j_r i : S^0 \to X(r)$, $l_r = \pi k_r : X(r) \to S^{rq+2}$ とする。特に、$X(1)$ は Smith 戸田の $V(1)$ に一致し, $\beta \in \mathcal{A}_{(p+1)q}(X(1))$ をその mapping cone が $V(2)$ であるものとする [9] (Smith [6] は β の代りに $\tilde{\Psi}$ という記号を使っている)。この時 β-列 $\{\beta_r\}$ は $\beta_r = l_1\beta^r i_1$ で定義される。又, $\beta_{(r)} = k_1\beta^r j_1 \in \mathcal{A}_*(M)$ とする。$\beta_r = \pi\beta_{(r)} i$ である。

$\mathcal{A}_*(M)$ についての [3] の結果からただちに次を得る。

<u>命題1</u> 次の条件をみたす $\varepsilon \in \mathcal{A}_*(M)$ が存在する : (i) ε は indecomposable, (ii) $\deg \varepsilon = (p^2+1)q - 1$, (iii) $\beta_{(p)} = \varepsilon\alpha^{p-2} = \alpha^{p-2}\varepsilon$, (iv) $\varepsilon\alpha^{p-1} = \alpha^{p-1}\varepsilon = 0$, $\{\alpha^{p-1}, \varepsilon, \alpha^{p-1}\} \ni 0$, (v) $\varepsilon_r = \pi\varepsilon\alpha^{r-1} i$.

さて，$A: S^q X(r) \to X(r+1)$ を $Aj_r = j_{r+1}\alpha$，$k_r = k_{r+1}A$ となる自然に定義された map とする。次の結果は命題1を $\mathcal{A}_*(X(r))$ で解釈したものである。証明は [4] を参照されたい。

<u>定理2</u>　次の条件を満たす $R(r) \in \mathcal{A}_{(p^2+p)q}(X(r))$，$1 \leqq r \leqq p-1$，が存在する：$R(1) = \beta^p$，$AR(r-1) = R(r)A$，$k_r R(r) j_r = \varepsilon\alpha^{p-1-r}$。

なお，命題1の(i)から，かかる $R(p)$ は存在しないことがわかる。

<u>定義3</u>　$\rho_{t,r} = l_{p-r} R(p-r)^t i_{p-r}$.

あきらかに，この元 $\rho_{t,r}$ は定理Aの条件を，order of $\rho_{t,r} = p$ のところを $p\rho_{t,r} = 0$ におきかえて，すべて満たす。従って，残るは $\rho_{t,r} \neq 0$ の証明である。

戸田 [9] は，$\mathcal{A}_*(X(1))$ において，β と $\beta\delta_1 - \delta_1\beta$ ($\delta_1 = j_1 k_1 \in \mathcal{A}_{-q-1}(X(1))$) が commute する，ことを証明したが，その analogy で，$\mathcal{A}_*(X(p-1))$ において $R(p-1)$ と $R(p-1)\Delta - \Delta R(p-1)$ ($\Delta = j_{p-1}k_{p-1} \in \mathcal{A}_{-(p-1)q-1}(X(p-1))$) が commute する，ことが証明できる。このことから $R(p-1)^p\Delta = \Delta R(p-1)^p$ なる関係式を得る。さらに，$S^{-1}X(s) \xrightarrow{j_r k_s} S^{sq}X(r) \xrightarrow{A^s} X(r+s)$ なる cofibering の存在に注意すれば，次の結果を得る。

<u>定理4</u>　次の条件を満たす $R'(r) \in \mathcal{A}_{(p^3+p^2)q}(X(r))$，$1 \leqq r \leqq 2p-2$，が存在する：$R'(r) = R(r)^p$ for $1 \leqq r \leqq p-1$，$AR'(r-1) = R'(r)A$.

<u>定義5</u>　$\rho'_{sp,r} = l_{2p-r-1} R'(2p-r-1)^s i_{2p-r-1}$.

これより，定理A′は，$f'_{sp,r} \neq 0$ をのぞいて，ただちに証明される。

命題1の元εはuniqueではない。戸田[9]のoperation θ を用いて，さらに条件 $\theta(\varepsilon)=0$ を追加しても，εは Z_p だけの自由度がある。このようなεを1つ固定して，定理2の $R(r)$ に条件 $\theta(R(r))=0$ を追加すれば $R(r)$ はuniqueである。さらにεを上記の自由度 Z_p 内で動かせば，$R(r)$ $(r \neq p-2)$ は動かず，$R(p-1)$ は Z_p だけ動く。しかし，定義3の元 $f_{t,r}$ はε（従って $R(p-1)$）のとり方によらず一定であることがわかる。

§2. Smith's method. Mの(reduced) complex bordism module $\tilde{U}_*(M)$ は U_*-moduleとして $(U_*/pU_*)\mu$, $\mu \in \tilde{U}_0(M)$, に等しい。$[P] \in U_{2p-2}$ をMilnor manifoldで代表される元とすると $\alpha_* : \tilde{U}_*(S^q M) \to \tilde{U}_*(M)$ は $\alpha_*(S^q\mu) = [P]\mu$ で決まる[6]。したがって，$\tilde{U}_*(X(r)) = (U_*/(p,[P]^r))\cdot\xi(r)$, $\deg \xi(r) = 0$, を得る。但し，$(p,[P]^r)$ は p と $[P]^r$ で生成される U_* のidealをあらわす。$Y(r)$ を $X(r)$ の $rq+1$ skeletonとすると，$U_*(Y(r)) = (U_*/(p,[P]^r))\cdot\eta(r) + U_*\cdot\tau(r)$ （直和），$\deg \eta(r) = 0$, $\deg \tau(r) = rq+1$, を得る。$Y(1)$ は[6]の $V(1/2)$ のことであり，これに関するMU-Hurewicz準同型についてのSmith[6]の研究のanalogyとして次の結果を得る。

命題6　MU-Hurewicz 準同型 $h : \pi_*(Y(r)) \to U_*(Y(r))$ の像は次の元に限る：$x[P]^j\eta(r)$ ($x \in Z_p$, $0 \leqq j < r$), $y\tau(r)$ ($y \in Z$).

cofibering $Y(r) \to X(r) \xrightarrow{l_r} S^{rq+2}$ の $\pi_*(\ )$ と $U_*(\ )$ に関する exact sequences を h でつなぎ，命題6から次の結果を得る。

命題7　$\varphi \in \mathcal{A}_{2k}(X(r))$ が $\varphi_*\xi(r) \notin (p, [P])\xi(r)$ を満たせば $\varphi_t = l_r \varphi^t i_r \in G_{2kt-rq-2}$ は non zero で位数は p。

次の結果は Smith による。

命題8　$\beta \in \mathcal{A}_{(p+1)q}(X(1))$ は $\beta_*(S^{(p+1)q}\xi(1)) = [V]\xi(1)$ で決められる。ここに $[V]$ は $2p^2-2$ 次元の Milnor manifold で代表される U_* の生成元。

命題7と8からただちに，β-列 $\{\beta_r\}$ について $\beta_r \neq 0$ が従う。定理2の元 A が $A_*(S^q\xi(r)) = [P]\xi(r+1)$ を満たすことと命題8から

命題9　$R(r)_*(S^{(p^2+p)q}\xi(r)) \equiv [V]^p\xi(r) \mod U_*[P]\xi(r)$;

$R'(r)_*(S^{(p^3+p^2)q}\xi(r)) \equiv [V]^{p^2}\xi(r) \mod U_*[P]\xi(r)$.

命題7と9より，$\rho_{t,r} \neq 0$, $\rho'_{sp,r} \neq 0$ が従い，はじめに述べた定理A, A′の証明が完了する。

以上の結果についてのくわしい証明，及びこれに関連した $\mathcal{A}_*(M)$ での結果については [4] を参照されたい。

References

[1] J. F. Adams, On the groups J(X) - IV, Topology 5 (1966), 21-71.

[2] S. Oka, On the stable homotopy groups of spheres I, II, Hiroshima Math. J. 1(1971), 305-337; 2(1972), 99-161.

[3] S. Oka, On the stable homotopy ring of Moore spaces, to appear in Hiroshima Math. J. 4 (1974).

[4] S. Oka, A new family in the stable homotopy groups of spheres, to appear in Hiroshima Math. J. 5 (1975).

[5] S. Oka and H. Toda, Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres, to appear in Hiroshima Math. J. 5 (1975).

[6] L. Smith, On realizing complex bordism modules. Applications to the stable homotopy of spheres, Amer. J. Math. 92 (1970), 793-856.

[7] H. Toda, p-Primary components of homotopy groups IV. Compositions and toric constructions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 32(1959), 288-332.

[8] H. Toda, On unstable homotopy of spheres and classical

groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 46 (1960), 1102-1165.

[9] H. Toda, Algebra of stable homotopy of Z_p-spaces and applications, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 197-251.

[10] N. Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14 (1963), 45-67.