数理解析研究所講究録
第278巻 1976年 1-10

Simplicial system について

東北大 教養 武元英夫

Choquet の理論の概説と、これの operator algebra への応用について話を進める。Choquet の理論については多くの準備を必要とするが、ここでは operator algebra への応用も二、三の話だけにとどまることになると思われる。ここでの内容は次の論文を主としている。

Dang-Ngoc-Nghiem : On the integral representation of states on a C^*-algebra, Commun. math. Phys. 40('75)

D. Ruelle : Statistical Mechanics, New York, Benjamin, 1969.

Choquet の理論に関すること.

X : locally convex space, E : X の compact convex subset

$C_R(E)$: E 上の real valued continuous functions 全体の set

μ : E 上の probability measure (ie. μ : non-negative regular Borel measure on E, $\mu(E)=1$)

$s \in E$ が μ に represented であるとは，すべての $f \in E_r^*$ に対して，$f(s) = \int_E f(\varphi)\,d\mu(\varphi)$ が成立することである。

このとき，"s は μ の barycenter" or "s は μ の resultant である" といわれ，$s = r(\mu)$ とかかれる。

上の話は C^*-algebra に対応して考えると次のようになる。

$\mathfrak{A}$: C^*-algebra with the identity 1,

$\mathfrak{A}^*$; $\mathfrak{A}$ の dual space, $\mathfrak{A}_h^*$: $\mathfrak{A}^*$ の self-adjoint part,

E ; $\mathfrak{A}$ の states 全体の set,

そのとき，$\mathfrak{A} \ni a \to \hat{a} \in C(E)$: $\hat{a}(s) = s(a)$ とおく。$s \in E$ に対して，$(\pi_s, \mathfrak{H}_s, \xi_s)$ を s による canonical representation とする。$\mathfrak{B}$ を $\pi_s(\mathfrak{A})'$ の abelian subalgebra とすると，E 上の probability measure μ が存在して，

$$s(a) = \int_E \hat{a}(\varphi)\,d\mu(\varphi) \qquad \text{for } {}^\forall a \in \mathfrak{A}$$

が成立する。

この時，operator algebra の reduction theory の研究において，μ の support が $\mathrm{ex}E$（E の extreme points 全体の

set, ie. $\mathfrak{A}$ の pure states 全体の set) に含まれるかということが問題となる。

話を前に戻そう。$s \in E$ に対して、δ_s を s の dirac measure とすると、当然、$s = r(\delta_s)$ となっている。ここで、問題となることは、$s \in E$ に対して、$r(\mu) = s$, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathrm{ex}E$ となる μ が存在するか、更に、存在したら、それはどういう場合に一意に定まるかということである。

上の問題に対して、Choquet-Bishop-de Leew は non-negative measure の set にある種の order を導入することによって、それらの議論を展開している。その時、上の二番目の問題と E が simplex であるということが対応し、この simplex ということが、operator algebra の dynamical system (A, G) の simplicial system ということに応用されている。

まず、Choquet の理論に関する主な事柄を述べる。

C : E 上の Continuous convex functions 全体の set.

A : E 上の Continuous affine functions 全体の set.

⇨

$C-C=\{f-g:\ f, g\in C\}$ は $C_R(E)$ で、usual order で lattice になっている。しかも、E の points を separate することから、$C-C$ は $C_R(E)$ で dense である。

μ, ν : E 上の non-negative measure,

$\mu > \nu \overset{def.}{\iff} \mu(f) \geq \nu(f)$ for $^\forall f\in C$.

これは、convex function の性質を考えると、$\mu > \nu$ になることは、μ の support の方が ν の support よりも、exteme points の set, ex E によっていることがわかる。すると、上の order に関して、maximal element が存在している。

<u>定理</u>。 λ : E 上の non-negative measure,

$\Rightarrow\ ^\exists\mu$: maximal measure, $\mu > \lambda$.

maximal measure の存在がわかったのであるが、それでは、その maximal measure がどこに support されているかということについて次の結果が知られている。

<u>定義</u> $f\in C_R(E)$, $s\in E$ に対して、

$$\bar{f}(s)=\inf\{h(s):\ h\in A,\ h\geq f\}$$

でもって、関数 $\bar{f}$ を定める。

そのとき，$\bar{f}$ は concave (ie. $-\bar{f}$ は convex), upper semi-continuous となる。特に，f が concave のときは $f=\bar{f}$ が成立する。

<u>補題</u>. (1) $\mathrm{ex}E = \bigcap_{f\in C} \{ s\in E : \bar{f}(s) = f(s) \}$

(2) μ : maximal measure on $E \rightleftarrows \mu(f) = \mu(\bar{f})$ for $^\forall f \in C$

上の補題から，μ が maximal measure のときは，μ の support が $\mathrm{ex}E$ に concentrate していることがわかる。(ie. D : Baire set, $D \cap \mathrm{ex}E = \phi \Rightarrow \mu(D) = 0$)。それで，$\mathrm{ex}E$ がどういう集合であるかということによって，$\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathrm{ex}E$ ということが調べられる。ie. $\mathrm{ex}E$ の measurability すらわからない。E が metrizable のときは $\mathrm{ex}E$ が G_δ-set となる。これは C^*-algebra $\mathfrak{A}$ が separable のとき，E が metrizable になることがわかっているので，operator algebra への応用をもつ。

<u>定理</u>。X : locally convex space,

E : metrizable compact convex set of X

$\Rightarrow \mathrm{ex}E : G_\delta$ - set.

maximal measure の uniqueness のために、simplex の notation を導入する。

E : convex cone P の base というとき、E に order $s \geqq t \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} s-t \in P$ を導入する。そのとき、我々は次の事を考える。

P として、$\tilde{E} = \{\alpha s : \alpha \geqq 0,\ s \in E\}$ とすると、E は $\tilde{E}$ の base になっている。これから、

<u>定義</u>. E : simplex $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{E} - \tilde{E}$: lattice

そのとき、次の事が言える。

<u>定理</u>. 次は同値である。

(1) E が simplex である。

(2) 各 $s \in E$ に対して、$\exists_1 \mu$: maximal measure, $r(\mu) = s$.

<u>Dynamical system への二、三の応用について.</u>

ここでは、Choquet の理論による maximal measure, simplex についての dynamical system への二、三の応用について述

べる。

$\mathfrak{A}$: C^*-algebra with the identity

G : group of automorphisms of $\mathfrak{A}$.

τ : $G \ni g \to \tau_g \in \mathrm{Aut}^* \mathfrak{A}$.

$I = \{ \varphi \in E : \varphi(\tau_g a) = \varphi(a),\ g \in G,\ a \in \mathfrak{A} \}$

i.e. I は $\mathfrak{A}$ 上の G-invariant states の set である。

$s \in I$, $(\pi_s, \mathfrak{H}_s, \xi_s)$: canonical representation induced by s

U^s : canonical representation of τ_g

such that $U_g^s \xi_s = \xi_s$, $U_g^s \pi_s(a) U_g^{s-1} = \pi_s(\tau_g a)$

今後、U_g^s を U_g, ξ_s を ξ とかいていく。$\mathcal{R}_s = \{ \pi_s(\mathfrak{A}), U_G \}''$ とおく。そのとき、$\mathcal{R}_s'$ は U_G - invariant な $\pi_s(\mathfrak{A})'$ の元からなる von Neumann algebra となっている。

$s \in E$ に対して、$\mathcal{B}$ (G に無関係) を $\pi_s(\mathfrak{A})'$ の任意の abelian von Neumann subalgebra とすると、

$\exists \nu_{\mathcal{B}}^s$: E 上の probability measure,

$\exists \Lambda$: $\mathcal{B} \to L^\infty(E, \nu_{\mathcal{B}}^s)$, $*$-isomorphism

$\ni$ $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{A}$ に対して、

$$(e\pi_s(a_1)e \cdots e\pi_s(a_n)e\xi_s | \xi_s) = \int_E \hat{a}_1(\varphi) \cdots \hat{a}_n(\varphi) d\nu_{\mathcal{B}}^s(\varphi)$$

$$(\Lambda^{-1}(f)\xi_s \mid \xi_s) = \int_E f(\varphi)\, d\nu_{\mathcal{B}}^s(\varphi) \quad \text{for } {}^\forall f \in C(E)$$

が成立している。ここで、e は $\mathfrak{H}_s$ から $[\mathcal{B}\xi_s]$ への projection $e_{[\mathcal{B}\xi_s]}$ を表わしている。

ここで、$\nu_{\mathcal{B}}^s$ を $\mathcal{B}$-measure of s と呼ぶ。以上の事から、次の事柄を準備しておく。

1。 $s \in E$, $\Omega(s) = \{\mu : \text{probability measure on } E,\ r(\mu) = s\}$

$$\Omega^I(s) = \{\mu \in \Omega(s) : \operatorname{supp}(\mu) \subset I\}$$

このとき、$s \in I$, $\mathcal{B}$: abelian von Neumann subalgebra of $\pi_s(\mathfrak{A})'$ に対して、次が言えている。

$$(\nu_{\mathcal{B}} \in \Omega^I(s)) \rightleftarrows (\operatorname{supp}(\nu_B) \subset I) \rightleftarrows (\mathcal{B} \subset \mathcal{R}_s')$$

2。 $\mathcal{B}$: abelian von Neumann subalgebra of $\pi_s(\mathfrak{A})'$

$\{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{B}^+$: $\sum_{j=1}^n b_j = 1$, $\alpha_j = \langle b_j \xi \mid \xi \rangle$, $s_j(a) = \frac{1}{\alpha_j}(\pi_s(a)\xi \mid b_j \xi)$

のとき、$\mu_{\{b_j\}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{s_j}$ を discrete $\mathcal{B}$-measure という。

$\Rightarrow \exists \{\mu_\alpha\}$: discrete $\mathcal{B}$-measure, $\mu_\alpha \to \nu_{\mathcal{B}}$ (weakly)

3。 $\delta_s \prec \mu$ for ${}^\forall\mu$ such that $r(\mu) = s$.

定理。

(a) $s \in E$, $\pi_s(\mathfrak{A})'$: abelian, ν : $\pi_s(\mathfrak{A})'$-measure of s.

$\Rightarrow$ ν : maximal measure in $\Omega(s)$

(β) $s \in I$, $\mathcal{B}$: abelian von Neumann algebra in $\mathcal{R}_s'$,

$\nu_{\mathcal{B}}^s$: $\mathcal{B}$ - measure of s

$\Rightarrow$

1) $\nu_{\mathcal{B}}^s$: maximal in $\Omega^I(s)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$: maximal abelian in $\mathcal{R}_s'$

2) $\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} : \text{maximal abelian in } \mathcal{R}_s', \\ D : I \text{ の Baire set}, \ D \cap \mathrm{ex}\, I = \phi\end{array}\right\} \Rightarrow \nu_{\mathcal{B}}^s(D) = 0.$

$s \in I$, $P_s : \mathfrak{H}_s \to \mathcal{X}_s = \{\eta \in \mathfrak{H}_s : \Pi_g^s \eta = \eta \text{ for } {}^\forall g \in G\}$ への projection.
そのとき、各 $s \in I$ に対して、$P_s \pi_s(\mathfrak{A}) P_s$ が abelian になる場合、system $(\mathfrak{A}, G)$ は G - abelian であるといわれる。

I の extreme point s は ergodic state であるといわれるが、その ergodic state に対して、次のような事が考えられる。$s \in I$ に対して、

(i) S : ergodic, (ii) $\pi_s(\mathfrak{A}) \cup \Pi_G^s$: irreducible, (iii) P_s : 一次元

なる性質を考えると、(i) ⇐ (ii) ⇐ (iii) が成立は簡単な計算で示される。しかも、system $(\mathfrak{A}, G)$ が G - abelian のときは、(i) ⇒ (iii) も成立することがわかる。

Choquet の意味で、I が simplex になるとき、system $(\mathfrak{A}, G)$

は simplicial system であるという。すると、

<u>定理</u>. 次の２つの条件は同値である。

(1) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G})$: simplicial system

(2) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G})$: $\mathfrak{G}$ - abelian

前に述べたことと、定理より、$(\mathfrak{A}, \mathfrak{G})$ が simplicial のとき、ergodic ということと、(iii) が同値である。しかも、system $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G})$ に separability の条件を考えると、それの逆も成立する。 <u>以上</u>。