数理解析研究所講究録
第 278 巻 1976 年 73-81

Lorentz 代数と C^* 代数

九大理 富田 稔

Lorentz 代数は Hilbert 空間の上の C^* 代数の概念の自然な拡張になっているが，その構造を議論する場合，まず出発点として解決しなければならないのは不定内積に関する自己共役作用のスペクトル解析を作用素環の立場から行うことであろう。

Hilbert 空間 H の不定内積とは $H \times H$ の Hermitean sequilinear form φ で

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leqq 1} |\varphi(x, y)|$$

をみたすものをいう。不定内積 φ をもつ Hilbert 空間 H を (H, φ) であらわす。a を H で稠密に定義された作用素とすれば a に対する (H, φ) での共役作用素 a^φ が定義される。

特に H の通常の内積 $(x, y) \to (x|y)$ を $*$

であらわすことにする。

不定内積 φ は $(H,*)$ 上の unitary Hermitian 作用素 φ を用いて

$$\varphi(x,y)=(\varphi x|y)=(x|\varphi y)$$

の形にあらわすことが出来るが，φ は $(H,*)$ の射影 φ^+，φ^- を用いて更に

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^-, \quad 1=\varphi^++\varphi^-$$

の形に表現される。(H,φ) 作用素 a の共役作用素 a^φ は次の形になる。

$$a^\varphi=\varphi a^*\varphi .$$

また H 上の線形作用素の作る Banach algebra をいくつか定義しておこう。連続線形作用素 a に対してその作用素 norm $\|a\|$ 以外に $1\leqq p\leqq+\infty$ に対して定義される norm $|a|_p$ を考えよう。

いま $(H,*)$ の作用素 $K\geqq0$ の trace を $\mathrm{tr}\,K$ であらわすとき，任意の連続作用素 a に対して

$$|a|_p=(\mathrm{tr}\,(a^*a)^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}},$$
$$|a|_\infty=\lim_{p\to\infty}|a|_p .$$

とおく。Banach 代数 $L_p(H)$ は $|a|_p<\infty$ となる作用素全体に norm $|a|_p$ を入れたものであり，$L_p(H)$ の共役空間を $L_p^*(H)$ であらわす。$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ で q を定めれば

$$L_p^*(H)=L_q(H) \quad (1<p\leqq+\infty),$$

$$L^*(H)= H \text{の全作用素環}$$

となる。

以下空間 (H,φ) で φ の値域の次元 n が有限である場合を考える。a を (H,φ) の自己共役作用素とする。a の resolvent（即ち scalar λ に対して $(a-\lambda)^{-1}$ が H 上で連続になるもの）全体を含む Banach 空間 $L^*(H)$ の最小の閉線集合をあらわせば $L(a)$ は (H,φ) の Lorentz 代数である。

補題 1. (H,φ) の作用素 a が自己共役になるのは φa が $(H,*)$ で自己共役になるときで，そのときに限る。

実際 $a=a^\varphi$ と $\varphi a=(\varphi a)^*$ は同一条件であるから。

特に (H,φ) の連続な Hermite 作用素 a に対

しては $\frac{1}{2}(a-a^*)$ が有限次元作用素となり a に対する Lipschitz-Schwartz 形 spectre 分解表現が出来る。しかし一般の自己共役な a に対しては $\frac{1}{2}(a-a^*)$ は必ずしも連続作用素に拡張出来ない。

補題 2.　(H, φ) の部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して、φ が $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ 上で 0 になれば $\mathfrak{M}$ の次元は $\leqq n$ である。

証明. $\mathfrak{M}$ の閉包への $(H, *)$ の射影を e とすれば条件から

$$e\varphi e = 0, \quad e = 2e\varphi e$$

が出て補題が成立つ。

定理 1.　(H, φ) の自己共役作用素 a の spectrum $S(a)$ は：(i) 実軸について対称である。(ii) $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ である $S(a)$ の要素は有限個でその固有空間全部の次元の和は $\leqq n$ である。(iii) λ と $\bar{\lambda}$ の固有空間への次元は等しい。

証明 (i) は明らか。(ii), (iii) を示す。

補題 3.　λ を $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ である a の spectre とするとき、λ に対する固有ベクトル x（$x \neq 0$ で $ax = \lambda x$ をみたす x）が存在することを示そう。

実際

$$a - \lambda = \varphi(\varphi a - \lambda)(1 - z\lambda(\varphi a - \lambda)^{-1}\varphi^{-})$$

$(\varphi a - \lambda)^{-1}$ はH上で連続であるから, $1 - z\lambda(\varphi a - \lambda)^{-1}\varphi^{-}$ は単射でなくなり補題3が成立する。

補題4. λ, μ が a の spectre で固有 Vector x, y をもつとし, $\lambda \neq \bar{\mu}$ とすれば

$$\varphi(x, y) = 0 .$$

実際

$$\varphi(a, x) = \varphi(x, ay)$$

より

$$(\lambda - \bar{\mu})\varphi(x, y) = 0$$

が出るからである.

補題4より, もし $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ となる spectre λ が n 個以上あれば矛盾が出ることがわかる。実際この各 λ に対する固有ベクトルを一つづつとって, それから張られる線形空間を $\mathfrak{M}$ とすれば $\mathfrak{M}$ の次元は $\geq n$ でしかも $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ 上で φ が 0 になるからである. $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ となる spectre λ は $S(a)$ の孤立点だから射影 $e_\lambda \in L(a)$ を

$$e_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-z|=\delta}|a-z|^{-1}dz$$

で定義することが出来る。但しδは十分小さな正数である。このとき e_λ の値域が λ に対する一般固有空間になっており，

$$e_\lambda^\varphi = e_{\bar\lambda}$$

が成立する。これから λ と $\bar\lambda$ の一般固有空間の次元は等しい。$Re\,\lambda > 0$ となる e_λ 全体の和 e はやはり $L(a)$ に属する射影で，e^φ が $Re\,\lambda < 0$ となる e_λ 全体の和に等しい。従って

$$ee^\varphi = e^\varphi e = 0$$

となり e の値域 $\mathfrak{M}$ に対して，φ は $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ 上で 0 になる。故に $\mathfrak{M}$ の次元は ≦1 で，定理1が証明される。以下 $L(a)$ の構造を議論するために $L^*(H)\times L^*(H)$ の要素 $a=(\pi(a),\delta(a))$ および $b=(\pi(b),\delta(b))$ の積 $a\circ b$ と a^* を

$$a\circ b = (\pi(a)\pi(b),\ \pi(a)\delta(b)+\delta(a)\pi(b)+\delta(a)\delta(b))$$
$$a^* = (\pi(a)^*,\ \pi(a)^*-\pi(a)^\varphi+\delta(a)^\varphi)$$

で定義しよう。直ちにわかることは

補題5. $1\leqq p\leqq +\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とすれば
$L^*(H)\times L_p(H)$ および $L^*(H)\times L_p^*(H)$

は上の積に関して Banach $*$-代数である。

さて今一度 (H, φ) の自己共役作用素 a を考える。$S(a) \cup S(\varphi a) \cup \{\infty\}$ 上に特異点をもたない有理関数全体を $Q(a)$ とすれば

$$r \to (r(\varphi a), r(a) - r(\varphi a))$$

は $Q(a)$ から $L^*(H) \times L_p(H)$ の中への $*$-準同形写像である。その像を含む最小の Banach 代数を $L_p(a)$ であらわす。この像は $L^*(H) \times L_g^*(H)$ に含まれているのでその中での弱*-閉な最小の Banach 代数を $L_g^*(a)$ であらわす。このとき明らかに

補題 6.

$$\pi : L_p(a) \to L(\varphi a)$$

および

$$\pi + \delta : L_p(a) \to L(a)$$

は $L_p(a)$ の $*$-準同形写像で、その像は $L(\varphi a)$ および $L(a)$ の中で稠密である。問題は $L(\varphi a)$ から $L(a)$ への写像 $(\pi+\delta)(x) \to \pi(x)$ および $L(\varphi a)$ から $L_p(H)$ への写像 $(\pi+\delta)(x) \to \delta(x)$ の性質を調べることである。

補題 7. $S(\varphi a)-S(a)$ は高々原点および無限遠点にのみ集積点をもつ $S(\varphi a)$ の孤立点からなる可算集合でその点 λ に対する固有空間の次元は $\geqq n$ である。

実際 λ_0 を $S(\varphi a)-S(a)$ の点とすれば $(\varphi a-\lambda_0\varphi)^{-1}$ は連続な Hermite 作用素となり

$$\varphi a-\lambda = (\varphi a-\lambda_0\varphi)((1+(\lambda_0-\lambda)(\varphi a-\lambda_0\varphi)^{-1})\varphi^{+} + (1-(\lambda_0+\lambda)(\varphi a-\lambda_0\varphi)^{-1})\varphi^{-})$$

の形にあらわされる。$1+(\lambda_0-\lambda)(\varphi a-\lambda_0\varphi)^{-1}$ は λ が λ_0 近傍に入るとき可逆であり $(1-(\lambda_0+\lambda)(\varphi a-\lambda_0\varphi)^{-1})\varphi^{-}$ は φ^{-} の値域上で $\lambda=\lambda_0$ では単射でないがある $\delta>0$ に対して $0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$ で単射になる。従って $S(\varphi a)-S(a)$ の各点は孤立点でその点 λ における φa の固有空間への射影を e とすれば $(\varphi a)e=\lambda e$. これから

$$e = 2\lambda(\varphi a-\lambda\varphi)^{-1}\varphi^{-}e$$

とあらわされ e の値域の次元は $\leqq n$ となる。

$S(\varphi a)-S(a)$ の各点の固有空間の直和への $(H,*)$ での射影を e とすれば $eL(\varphi a)$ が $\pi+\delta$ の $L_p(a)$ での Kernel N を π によって $L_p(\varphi a)$ にうつした像の閉包に

等しい。　従って

$$(\pi+\delta)(X) \longrightarrow (1-e)\pi(X)$$

は $L(a)$ から $(1-e)L(\varphi a)$ への closable な写像になり，更に

$$\|(\pi+\delta)(X)\| \geqq \|(1-e)\pi(X)\|$$

が証明される。

なお，以下の議論を省略するが次の定理が成立する。

定理　a が (H,φ) における自己共役作用素ならば次の形にかける。

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

但し，

$$a_i a_j = 0\ ,\quad a_2 = a_1^{\varphi},$$

a_3 は (H,φ) で自己共役な位相的巾ゼロ作用素で a_4 は (H,φ) で自己共役で実軸上に spectrum があり $L(a_4)$ が準単純な作用素である。