数理解析研究所講究録
第 280 巻 1976 年 94-102

Exponential group の holomorphically induced representation について

東大 理　藤原英徳

1．我々がここで扱う問題を明らかにする事から始める．

<u>定義</u>．G をリー環 $\mathfrak{g}$ を有する単連結可解リー群とする．指数写像 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ が全射である時，G を <u>exponential group</u> という．

この節においては，G は常にリー環 $\mathfrak{g}$ を有する exponential group を表わすものとする．実ベクトル空間 V に対し，その dual を V^* で表わす．

<u>定義</u>．$f \in \mathfrak{g}^*$ とする．f における $\mathfrak{g}$ の <u>positive polarization</u> とは，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素部分リー環 $\mathfrak{h}$ で次の性質を持つものをいう．

1) $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_f)$　ここに $\mathfrak{g}_f = \{X \in \mathfrak{g} ; f([X, Y]) = 0 \quad \text{for all } Y \in \mathfrak{g}\}$.

2) $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素部分リー環である．

3) すべての $X \in \mathfrak{h}$ に対し，$if([X, \overline{X}]) \geqq 0$.

$f \in \mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{g}$ の positive polarization の集合を $P^+(f, \mathfrak{g})$ で

表わす。$\mathfrak{f} \in P^+(f, \mathfrak{g})$ に対し，$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{d}$ (resp. $\mathfrak{e}$) を $\mathfrak{d} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{e} = (\mathfrak{f} + \overline{\mathfrak{f}}) \cap \mathfrak{g}$) で定義し，$D = \exp \mathfrak{d}$ (resp. $E = \exp \mathfrak{e}$) とおく．この時 $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{d})$ は D の character（1次元ユニタリ表現）を与える．これから誘導されたEのユニタリ表現を $\hat{\rho}(f, \mathfrak{f}, E) = \operatorname{ind}_{D \uparrow E} \chi_f$ で，その表現空間を $\hat{\mathcal{H}}(f, \mathfrak{f}, E)$ で表わす．E上無限回微分可能な複素数値函数の空間 $C^\infty(E)$ を次の様にして右 $\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}$-加群と見なす．$\varphi \in C^\infty(E)$ と $Z = X + iY \in \mathfrak{e}_{\mathbb{C}}$ $(X, Y \in \mathfrak{e})$ に対し，

$$\varphi \cdot Z = \varphi \cdot X + i \varphi \cdot Y$$

とおく，ここに $\varphi \cdot X$ $(X \in \mathfrak{e})$ は

$$(\varphi \cdot X)(a) = \frac{d}{dt} \varphi(a \exp tX)\Big|_{t=0}, \quad a \in E$$

で定義される．

$\mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, E) = \hat{\mathcal{H}}(f, \mathfrak{f}, E) \cap \{\varphi \in C^\infty(E) ; \ \varphi \cdot X = -if(X)\varphi \ \text{ for all } X \in \mathfrak{f}\}$

とおくと，$\mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, E)$ は $\hat{\mathcal{H}}(f, \mathfrak{f}, E)$ の $\hat{\rho}(f, \mathfrak{f}, E)$ 不変な閉部分空間である (cf. [1])．Gのユニタリ表現

$$\rho(f, \mathfrak{f}, G) = \operatorname{ind}_{E \uparrow G} (\hat{\rho}(f, \mathfrak{f}, E) | \mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, E))$$

を $\mathfrak{f} \in P^+(f, \mathfrak{g})$ から構成された G の <u>*holomorphically induced representation*</u> と呼ぶ．$\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ の表現空間を $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, G)$ で表わす．この表現 $\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ に関し我々は以下の問題1～問題4を考えよう．

<u>問題1</u>．$\mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, G) \neq \{0\}$ なる為の $(f, \mathfrak{f})$ に対する条件は何か?

問題２．$\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ が既約になる為の $(f, \mathfrak{f})$ に対する条件は何か？

問題３．$\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ $(\neq 0)$ が既約な時、$\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ は $\mathfrak{f} \in P^{+}(f, \mathfrak{g})$ に依らないか？

問題４．$\rho(f, \mathfrak{f}, G)$ が可約な時その既約成分への分解はどうなるか？

２．$\mathfrak{g}$ を n 次元実可解リー環，$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\dim \mathfrak{g}_k = k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ なる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のイデアル列とする．この時各剰余空間 $\mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k-1}$ への $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の随伴表現により $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の一次形式 λ_k $(1 \leqq k \leqq n)$ が生じる．

定義．λ_k を $\mathfrak{g}$ に制限したものを $\mathfrak{g}$ の root と呼ぶ．

定義．可解リー環 $\mathfrak{g}$ は，その root λ_k がすべて

$$X \longmapsto \mu_k(X)(1 + i\alpha_k) \quad (X \in \mathfrak{g}), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \mu_k \in \mathfrak{g}^*$$

の形である時，exponential algebra と呼ばれる．

positive polarization の概念は Kähler algebra の概念と非常によく似ている．

定義．exponential algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 上の一次変換 j 及び $\mathfrak{g}$ 上の反対称双一次形式 ρ から成る組 $(\mathfrak{g}, j, \rho)$ が次の性質を持つ時、exponential Kähler algebra と呼ばれる．

1) $j^2 = -1$.

2) $[jX, jY] = j[jX, Y] + j[X, jY] + [X, Y]$.

3) $\rho(jX, jY) = \rho(X, Y)$.

4) $\rho(jX, X) > 0$ for $X \neq 0$.

5) $\rho([X, Y], Z) + \rho([Y, Z], X) + \rho([Z, X], Y) = 0$.

これらの性質に加えて，$\omega \in \mathfrak{g}^*$ で

$$\rho(X, Y) = \omega([X, Y]) \quad \text{for all } X, Y \in \mathfrak{g}$$

なるものが存在する時，$(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を exponential j-algebra と呼ぶ．我々はしばしば exponential algebra $\mathfrak{g}$ 自体を exponential Kähler algebra 又は exponential j-algebra と呼ぶ事にする．

リー環 $\mathfrak{g}$ が完全可解である時，即ち $\mathfrak{g}$ の root がすべて実である時，exponential Kähler algebra (resp. exponential j-algebra) $\mathfrak{g}$ は normal Kähler algebra (resp. normal j-algebra) と呼ばれる．我々はまず normal j-algebra に対する Pjateckiĭ-Šapiro の構造定理 (cf. [3]) を一般化して exponential j-algebra に対する構造定理を与える．

定理 1．$(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を exponential j-algebra とする．$\mathfrak{g}$ に内積 S を $S(X, Y) = \omega([jX, Y])$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で定義し，$\eta = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の S に関する直交補空間を $\mathfrak{a}$ で表わす．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な部分リー環で，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \eta$，又 $\mathfrak{a}$ の η 上への随伴表現は複素対角化可能である．$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対し $\eta^\alpha = \{X \in \eta ; [A, X] = \alpha(A)X \text{ for all } A \in \mathfrak{a}\}$ とおき，$j(\eta^\alpha) \subset \mathfrak{a}$ なる $\eta^\alpha \neq \{0\}$ の全体を $\{\eta^{\alpha_i}\}$，$1 \leq i \leq r$ とする．こ

の時、$\dim \mathfrak{n}^{\alpha_i}=1$ かつ $r=\dim \mathfrak{a}$ である。今 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ を適当に番号付けてやると $\mathfrak{n}^{\beta}\neq\{0\}$ なる $\beta\in\mathfrak{a}^*$ で $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 以外のものはすべて

$$\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k),\quad \frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k),\qquad 1\leqq k<m\leqq r,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_k,\qquad 1\leqq k\leqq r$$

（すべての形が生じるとは限らない）の形であり，$\mathfrak{n}$ は

$$\mathfrak{n}=\sum_{m>k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)}+\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}+\sum_{m\geqq k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$$

と分解される，ここに $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}=\sum_{k}\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ 更に $\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}$ で不変な部分空間でその複素化は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_c}\mathfrak{a}$ の $A\mapsto\frac{1}{2}\alpha_k(A)(1+i\beta_{k,p})$ $(A\in\mathfrak{a})$, $\beta_{k,p}\in\mathbb{R}$ の形の root に対応する root space の和である．$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{a}+\sum_{m>k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)}$，$\mathfrak{g}_1=\sum_{m\geqq k}\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$ とおくと，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}+\mathfrak{g}_1$，$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_k]\subset\mathfrak{g}_{i+k}$，$j(\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_k)})=\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_m+\alpha_k)}$ $(1\leqq k<m\leqq r)$，$j(\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k})=\tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ $(1\leqq k\leqq r)$ である．U_i を $\mathfrak{n}^{\alpha_i}$ の元 $(\neq 0)$ で $[jU_i,U_i]=U_i$ なるものとし、$s=\sum_{i=1}^{r}U_i$ とおく．この時 $\alpha_k(jU_i)=\delta_{k,i}$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_0=0$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_1=\mathrm{Id}$，$\mathrm{ad}\,js\,|\,\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ は半単純でその固有値の実部はすべて $\frac{1}{2}$．最後に $X\in\mathfrak{g}_0$ に対し $jX=[s,X]$ である．

次に Gindikin, Pjateckiĭ-Šapiro 及び Vinberg の normal Kähler algebra に対する基本定理 (cf. [2]) を exponential Kähler algebra に一般化してやる．

定理 2. exponential Kähler algebra $\mathfrak{g}$ は半直和

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{J}+\mathfrak{H}$$

に分解される，ここに $\mathfrak{J}$ は j 不変な可換イデアルであり、部分リー環 $\mathfrak{m}$ は exponential j-algebra である。

3．$\mathfrak{g}$ を有限次元実可解リー環，G をリー環 $\mathfrak{g}$ を有する単連結可解リー群とする時，G が exponential group である事と $\mathfrak{g}$ が exponential algebra である事は同値である事が知られている。この節及び後に続く節では G はリー環 $\mathfrak{g}$ を有する exponential group，$f \in \mathfrak{g}^*$，$\mathfrak{h} \in P^+(f, \mathfrak{g})$ とし，$\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$，$\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}$ とおく。更に $\mathfrak{k} = \mathfrak{d} \cap \ker f$ とおくと $\mathfrak{d}$ 及び $\mathfrak{k}$ は共に $\mathfrak{e}$ のイデアルである。$\hat{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}/\mathfrak{k}$，$\mathfrak{z} = \mathfrak{d}/\mathfrak{k}$ とし $\pi : \mathfrak{e} \to \hat{\mathfrak{e}}$ を自然な射影，$\hat{\mathfrak{h}} = \pi(\mathfrak{h})$，$f_0 = f|\mathfrak{e} \in \mathfrak{e}^*$ とする。更に $\tilde{f} \in (\hat{\mathfrak{e}})^*$ を $\tilde{f} \circ \pi = f_0$ なるものとする。

<u>定理3</u>．$\hat{\mathfrak{e}}$ は半直和

$$\hat{\mathfrak{e}} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{n}: \text{イデアル}, \quad \mathfrak{m}: \text{部分リー環}$$

と分解され，この分解は次の性質を持つ。$\mathfrak{h}_1 = \hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{h}_2 = \hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$，$\tilde{f}_1 = \tilde{f}|\mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$，$\tilde{f}_2 = \tilde{f}|\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}^*$ とおく。

a) $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{z}$ を center とする Heisenberg algebra で $\mathfrak{h}_1 \in P^+(\tilde{f}_1, \mathfrak{n})$.

b) $\mathfrak{h}_2 \in P^+(\tilde{f}_2, \mathfrak{m})$ で $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{m} = \{0\}$，$\mathfrak{h}_2 + \bar{\mathfrak{h}}_2 = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$．$\mathfrak{m}$ 上の一次変換 j を，$X \in \mathfrak{h}_2$ に対し $jX = -iX$，$X \in \bar{\mathfrak{h}}_2$ に対し $jX = iX$ で定義してやると $(\mathfrak{m}, j, -\tilde{f}_2)$ は exponential j-algebra である。更に $\tilde{f}_1([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) = 0$.

4. 定理3で導入される $\mathfrak{m}$ に定理1を適用してやり定理1の記号をそのまま用いる事にする。$\mathcal{L}_i = \sum_{j>i} \mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_i)}$, $\mathcal{L}_i' = \sum_{i>j} \mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)}$, $p_i = \dim \mathcal{L}_i'$, $q_i = \dim \mathcal{L}_i$, $r_i = \dim \tilde{\mathfrak{n}}^{\frac{1}{2}\alpha_i}$ とおき、更に $f_i = \hat{f}_2(U_i)$ とする $(1 \leqq i \leqq r)$. 次に $W = \ker \tilde{f}_1 \subset \mathfrak{n}$ とすると W は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{m}$ で不変であり $\mathrm{ad}_{W_{\mathbb{C}}}\mathfrak{a}$ は対角化可能で $W_{\mathbb{C}}$ は root space $(W_{\mathbb{C}})^{\beta'}$ に分解される。この時任意の root β' は $\beta' = 0$ 又は $\beta'(A) = \pm\frac{1}{2}\alpha_k(A)(1 + i\beta'_{k,l})$ $(A \in \mathfrak{a})$, $\beta'_{k,l} \in \mathbb{R}$ の形である。$\tilde{W}_{\mathbb{C}}^{\frac{\alpha_k}{2}} = \sum_{\substack{\beta' = \frac{1}{2}(1+i\beta'_{k,l})\alpha_k \\ l}} (W_{\mathbb{C}})^{\beta'}$ とおき $\tilde{W}^{\frac{\alpha_k}{2}} = \tilde{W}_{\mathbb{C}}^{\frac{\alpha_k}{2}} \cap W$, $t_k = \dim \tilde{W}^{\frac{\alpha_k}{2}}$ とする $(1 \leqq k \leqq r)$. Rossi - Vergne [4] の方法を少し修正して我々は次の定理を得る。

<u>定理4</u>. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{f}, G) \neq \{0\}$ となるのは

$$-2f_i - \left(p_i + 1 + \tfrac{1}{2}(q_i + r_i + t_i)\right) > 0 \ , \quad 1 \leqq i \leqq r$$

なる時かつその時に限る。

この定理における不等式は最後の項 t_i を除いて Rossi - Vergne の結果と一致する。

5. G は $\mathfrak{g}^*$ に coadjoint 表現で作用し orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ を生じる。$f \in \mathfrak{g}^*$ を通る orbit を $O(f)$ で表わす。各 orbit $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ に Kirillov - Bernat の意味で対応する G の既約ユニタリ表現の同値類の代表元を $\rho(\Omega)$ で表わす。$D = \exp \mathfrak{d}$, $\mathfrak{k}^{\perp} = \{l \in \mathfrak{g}^* ; l | \mathfrak{k} = 0\}$ とおく。

定義. $D.f = f + \mathfrak{e}^{\perp}$ なる時 $\mathfrak{h}$ は Pukanszky condition をみたすという.

定理 5. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$ とする. $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ が既約であるのは $\mathfrak{h}$ が Pukanszky condition をみたす時かつその時に限る. 更にこの時 $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \hat{\rho}(O(f))$, 特に $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ は $\mathfrak{h}$ に依らない.

6. orbit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ で $\mathcal{O} \cap (f + \mathfrak{e}^{\perp})$ が $f + \mathfrak{e}^{\perp}$ の空でない開集合となるものの集合を $U(f, \mathfrak{h})$ で表わし, orbit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ に対し $\mathcal{O} \cap (f + \mathfrak{e}^{\perp})$ の連結成分の数を $c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h})$ で表わす. 次の定理は real polarization に対する Vergne [5] の結果を一般化するものである.

定理 6. $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G) \neq \{0\}$ とする.

a) $U(f, \mathfrak{h})$ は有限集合である.

b) $\mathcal{O} \in U(f, \mathfrak{h})$ に対し $c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h}) < +\infty$.

c) $\rho(f, \mathfrak{h}, G) = \sum_{\mathcal{O} \in U(f, \mathfrak{h})} c(\mathcal{O}, f, \mathfrak{h}) \hat{\rho}(\mathcal{O})$.

References

[1] L. Auslander and B. Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math., 14 (1971), 255-354.

[2] G. Gindikin, I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and E. E. Vinberg, Geometry of homogeneous bounded domains, C. I. M. E., 3 (1967), 3-87.

[3] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro, "Geometry of classical domains and theory of automorphic functions," Gordon and Breach, New York, 1969.

[4] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, J. Func. Anal., 13 (1973), 324-389.

[5] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Éc. Norm. Sup., 3 (1970), 353-384.