

p 進 L 関数の積分表示

北大 理 森田 康夫

1. 問題

N を自然数とし, $\chi \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ より \mathbb{C}^\times への準同型とする。この時 $(n, N) \neq 1$ なる整数 n に対して $\chi(n) = 0$ とおくことにより

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

なる map ができる。このようなものを Dirichlet の character と呼ぶ。

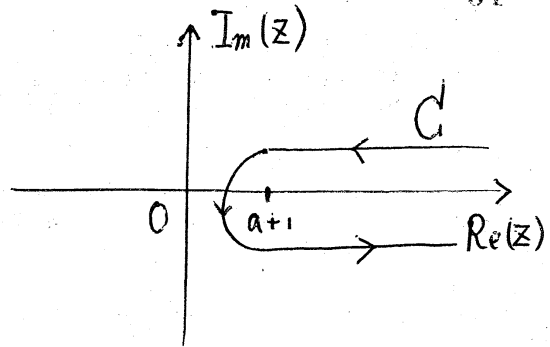
さてこのような χ に対して

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_\chi(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(z+n)^2}$$

とおく。また $\operatorname{Re}(s) > 1$, $-1 < a < +\infty$ に対し

$$L(s; a, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(n+a)^s}$$

とおく。この時 C を右
図のような曲線とすると



$$(\omega-1) L(\omega, a, \gamma)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{\gamma}(-z+a+1) \right\} z^{-\omega+1} dz$$

が成り立つ。ただし $|\arg(z)| \leq \pi$ とする。

以下この積分表示にあたるものの p 進体上での類似物をつくる。

2 結果

p を奇素数とし、 \mathbb{Q}_p を p 進体、 $|\cdot|_p$ を p 進付値で $|p|_p = p^{-1}$ とみたすものとする。これを $|\cdot|_p$ を延長した付値で完備な代数的閉体とする。 $|\cdot|_p$ でこの延長された付値もあらわす。

$$\mathbb{Z}_p^{\times} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1\}$$

とおく。これは \mathbb{Q}_p^{\times} の subgroup であり

$$\mathbb{Z}_p^{\times} = \left(\text{1 の } p-1 \text{ 乗根全体の作る群} \right) \times \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-1|_p \leq |p|_p \right\}$$

と直積に分解される。 $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して

$$\omega(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^n}$$

とおく。これは上の直積の第一成分への射影を与える。とくに ω は modulo p で定義された Dirichlet character を与える。

次に ω を

$$\left\{ z \in k \mid \exists x \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ s.t. } |z-x|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p \right\}$$

の上へ $\omega(z) = \omega(x)$ とおき拡張しておく。

また

$$z = \omega(z) \langle z \rangle$$

とおき $\langle \rangle$ を定義しておく。そこで $A_1 \in k$, $A_2 \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し、 $A = (A_1, A_2)$ とおき

$$z^A = \omega(z)^{A_2} \langle z \rangle^{A_1}$$

$$\langle z \rangle^{A_1} = \exp(A_1 \log \langle z \rangle)$$

とおく。これは $\omega(z) = \zeta$ とおく時 A_1 と $z - \zeta$ の関数として

$$|A_1|_p |z - \zeta|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

で収束する巾級数で与えられる。

χ は modulo f で定義された Dirichlet character であるとする。このとき

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{z+n}$$

とおく。また $a \in \mathbb{Z}$ $|a|_p \leq |p|_p$ をみたす k の元とするとき

$$(s-1) L_p(s; a, \chi) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{\langle a+n \rangle^{s-1}}$$

とおく。この時

① $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1)$ は $\mathbb{P}^1(k) \setminus \mathbb{Z}_p^\times$ 上で収束し、この上の analytic function を与える。とくに

$$\left\{ z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z - \zeta|_p > |p|_p \text{ for } \zeta \text{ s.t. } \zeta^{p-1} = 1 \right\}$$

上では、

$$\sum_{\substack{y \\ y^{p-1}=1}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(y)} (z-\zeta)^n \right\}$$

の形で与えられる。

なることがわかっている。したがって

の時 $|\Delta_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\alpha}(-z+a+1) \right\} z^{-\Delta+1}$$

は 各 1 の $p-1$ 乗根 ζ につき

$$|p|_p < |z-\zeta|_p < |\Delta_1^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p, |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる円環上で $z-\zeta$ の Laurent 級数に展開される。そこで その $(z-\zeta)^{-1}$ の係数として

$\text{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} [\quad]$ を定義する。この時

定理

$$(\Delta_1 - 1) L_p(\Delta_1, a, \alpha \omega^{1-\Delta_2})$$

$$= - \sum_{\zeta^{p-1}=1} \text{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\alpha}(-z+a+1) \right\} z^{-\Delta+1} \right]$$

が成り立つ。とくに左辺は $|\Delta_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$ において収束する $\Delta_1 - 1$ の巾級数であらえられる。

3 準備

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^n \quad (a_n \in k)$$

が $|z-\zeta|_p = r$ の時収束するとする。この時

$$\text{Max}_{-\infty < n < +\infty} (|a_n|_p r^n) = \text{Max}_{|z-\zeta|=r} |f(z)|_p$$

が成り立つ。とくに $f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(m)} (z-\zeta)^n$

が $\{|z-\zeta|_p = r\}$ 上で一様収束すれば, $a_n^{(m)}$ も $m \rightarrow \infty$ の時収束する。

(2) $f(z)$ と (1) の通りとし, $|\zeta-\zeta'|_p < r$ なる点 ζ' を取り

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-\zeta')^n \quad (b_n \in k)$$

とおく。この時

$$a_{-1} = b_{-1}$$

が成り立つ。

4. 証明

$r \in |k|_p$ の元で

$$|p|_p < r < |A_i^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p, |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる数を取る。この時 3 の (1) より

$$-\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \substack{p-1 \\ \alpha}}} \operatorname{Res}_{|z-\beta|_p \leq |p|_p} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\alpha}(-z+a+1) \right\} z^{-\Delta+1} \right]$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi(n) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \substack{p-1 \\ \alpha}}} \operatorname{Res}_{|z-\beta|_p \leq |p|_p} \left[\frac{-1}{-z+a+n} z^{-\Delta+1} \right]$$

が成り立つ。ところで $|a|_p \leq |p|_p$ であるから 3 の (2) より

$$\operatorname{Res}_{|z-\beta|_p \leq |p|_p} \left[\frac{-1}{-z+a+n} z^{-\Delta+1} \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } \omega(n) \neq \} \\ (a+n)^{-\Delta+1} & \text{if } \omega(n) = \} \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$(a+n)^{-\Delta+1} = \omega(n)^{-\Delta_2+1} \langle a+n \rangle^{-\Delta_1+1}$$

だから

定理の右辺

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi \omega^{-\Delta_2+1}(n) \frac{1}{\langle a+n \rangle^{\Delta_1-1}}$$

?

$$= (\Delta_i - 1) L_p(\Delta_i; a, q\omega^{1-\Delta_i})$$

となる。

5 応用

$(\frac{d}{dz})^2 \log \Gamma_{p,q}(-z+a+1)$ の $z=0$ および $z=\infty$ での展開が定理を使って計算できる。結果と書くと

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,q}(-z+a+1)$$

$$= \sum_{m \geq 2} (m-1) L_p(m; a, q\omega^{1-m}) z^{m-2}$$

$$= - \sum_{m \leq 1} (m-1) L_p(m; a, q\omega^{1-m}) z^{m-2}$$

となる。