数理解析研究所講究録
第 295 巻 1977 年 46-59

二次形式のZeta函数と特殊函数

立教大 理 佐藤文広

§0. 二次形式の整数論において登場するZeta函数の函数等式が、超幾何函数・球函数の函数等式を根拠にしている例がいくつか知られている。例えば、Siegel [9] では、符号 $(n, m-n)$ の不定値二次形式のZeta函数の函数等式が、Gaussの超幾何函数 $F(s-\frac{n}{2}+1, 1-\frac{n}{2}, s-\frac{n}{2}; x)$ の函数等式に帰着されている。Shintani [8] では、二元二次形式の空間に付随する2変数のZeta函数が、二種類の形の函数等式を満足することが示されているが、その一方はLegendre函数の函数等式 $P_s = P_{-1-s}$ から導かれている。

この小論では、これらのZeta函数と特殊函数の間の関係の一般化を試みる。すなわち、いわば、$SL(n,\mathbb{R})/SO(p, n-p)$ の"Eisenstein級数"、"帯球函数"というべき、Dirichlet級数、特殊函数を定義し、その函数等式が本質的に一致することを示す。その根拠は、ある可約概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾の部分Fourier変換にある。上記の二例は、あ

る意味で、その特別な場合とみなせるのである。なお，鈴木利明氏の"変数係数二次形式のZeta函数"の研究と関連があり、示唆を受けたことに感謝したい。

§1. Eisenstein級数

mを自然数。$Y^{(m+1)} = {}^tY$ を、符号(p,q) $(p+q=m+1)$の実対称行列とする。$\mathcal{V} = M(m+1,m)\oplus M(m,m-1)\oplus\cdots\oplus M(2,1)$ とおく。

定義 $\mathcal{V}\ni X=(X_m,X_{m-1},\cdots,X_1)$ とYの組(Y,X)を（一般化された）descending chain と呼ぶ。

Descending chain (Y,X)について、対称行列の列が次のようにして得られる。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
Y_{m+1}=Y & \to & Y_m & \to & Y_{m-1} & \to & \cdots & \to & Y_2 & \to & Y_1 \\
 & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
 & & {}^tX_mYX_m & & {}^tX_{m-1}Y_mX_{m-1} & & & & {}^tX_2Y_3X_2 & & {}^tX_1Y_2X_1 \\
 & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
 & & Y[X_m] & & Y_m[X_{m-1}] & & & & Y_3[X_2] & & Y_2[X_1]
\end{array}
$$

ここで、Y_i は $i\times i$ 対称行列である。

A.Selbergは、$SL(n;\mathbb{Z})$のEisenstein級数を定義するために、正定値なYと $X\in\mathcal{V}_{\mathbb{Z}} = M(m+1,m;\mathbb{Z})\oplus\cdots\oplus M(2,1;\mathbb{Z})$ とからできるdescending chain (Y,X)を利用した（cf. [6], [7]）。我々は、[7]の示唆に従って、不定値なYに対してEisenstein級数の類似を構成する。以下、この節では、Yは有理係数と仮定する。

$$G(Y) = SO(Y) \times GL(m) \times \cdots \times GL(1)$$

$$G(Y)^+_{\mathbb{R}} = SO(Y)_{\mathbb{R}} \times GL(m)^+_{\mathbb{R}} \times \cdots \times GL(1)^+_{\mathbb{R}} \quad (GL(m)^+_{\mathbb{R}} \text{ は単位元連結成分})$$

$$G(Y)^+_{\mathbb{Z}} = SO(Y)_{\mathbb{Z}} \times SL(m)_{\mathbb{Z}} \times \cdots \times SL(2)_{\mathbb{Z}} \times \{1\}$$

とおく。線型空間 V に $G(Y)$ は、

$$\rho(g)X = (g_{m+1} X_m g_m^{-1}, \cdots, g_{i+1} X_i g_i^{-1}, \cdots, g_2 X_1 g_1^{-1}),$$

$$g = (g_{m+1}, g_m, \cdots, g_1) \in G(Y),$$

$$X = (X_m, X_{m-1}, \cdots, X_1) \in V$$

によって作用する。明らかに、$V_{\mathbb{Z}}$ は $G(Y)^+_{\mathbb{Z}}$-stable である。

$$S_Y = \bigcup_{i=1}^{m} \{X \in V \, ; \, \det Y_i = 0\}$$ とおく。

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+1}) \in \{\pm 1\}^{m+1}$ について、

$$\zeta^*_Y(\varepsilon \, ; s_1, \cdots, s_m) = \sum_X{}' \prod_{i=1}^{m} |\det Y_i|^{-s_i}$$

とおく。ただし、X に関する和は、$G(Y)^+_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{Z}} - S$ の完全代表系で、$\mathrm{sgn}(\det Y_i) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq m)$ を満足するもの全体を動く。Y の符号が (p, q) としたから、ε_i のうち p コが $+1$、q コが -1 のときのみ、$\zeta^*_Y(\varepsilon \, ; s_1, \cdots, s_m)$ は定義される。(このようなとき $\mathrm{sgn}\,\varepsilon = (p, q)$ と記すことにする)。

さて、$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(m+1)_{\mathbb{Z}} \right\}$,

$$E(Y, \varepsilon \, ; s) = \sum_U{}' \prod_{i=1}^{m} |d_i(Y[U])|^{-s_i}$$ とおく。

ここで、d_i は、行列 $Y[U] = {}^tUYU$ の i 次首座小行列式を表わ

し、Uに関する和は、両側剰余類 $SO(Y)_{\mathbb{Z}}\backslash SL(m+1)_{\mathbb{Z}}/\Gamma_\infty$ の完全代表系で $\mathrm{sgn}\, d_i(Y[U]) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i \ (1 \leq i \leq m)$ なるものを動くとする。
このとき、

$$\zeta_Y^*(\varepsilon; s_1, \ldots, s_m) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} \zeta(2(s_i + \cdots + s_j) - j + i)\, E(Y, \varepsilon; s) \quad。$$

すなわち、符号(p,q)の有理対称行列Yに対し$\binom{m+1}{p}$コのDirichlet級数が付随される。特に$(p,q) = (m+1, 0)$のとき、唯一つのDirichlet級数が得られ、$SL(m+1)_{\mathbb{Z}}$のEisenstein級数に一致する。

<u>定理1</u>

(i). $E(Y, \varepsilon; s)$、従って$\zeta_Y^*(\varepsilon; s_1, \ldots, s_m)$は、$\mathbb{C}^m$上の有理型函数に解析接続される。

(ii). $s_i = z_{i+1} - z_i + 1/2 \ (1 \leq i \leq m)$と変数変換し、

$$\tilde{E}(Y, \varepsilon; z) = \prod_{1 \leq j < i \leq m+1} \pi^{-(z_i - z_j + 1/2)} \Gamma(z_i - z_j + 1/2)\, |\det Y|^{-z_{m+1}} \zeta_Y^*(\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)$$

とおけば、函数等式

$$\tilde{E}(Y, \sigma\varepsilon; \sigma z) = \sum_{\mathrm{sgn}\,\eta = (p,q)} A^\sigma(\varepsilon, \eta; z)\, \tilde{E}(Y, \eta; z)$$

($\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$：$m+1$次対称群，$\sigma\varepsilon = (\varepsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \varepsilon_{\sigma(m+1)})$，$\sigma z = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(m+1)})$)
が成立つ。ここで$A^\sigma(\varepsilon, \eta; z)$は三角函数で表わされる。特に置換$\sigma_k = (k+1, 1, \ldots, k)$に対しては、

$$A^{\sigma_k}(\varepsilon, \eta : Z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{\cos\frac{\pi}{4}\left\{2(1+\varepsilon_i\eta_i)(z_{k+1}-z_i+1/2)+\varepsilon_i\left(\sum_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j-\sum_{j=i}^{k+1}\eta_j\right)\right\}}{\sin(z_{k+1}-z_i+1/2)\pi} & (\varepsilon_i=\eta_i,\ i=k+2,\cdots,m+1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

。

Y が正定値のとき、任意の σ_k に対して $A^{\sigma_k}(\varepsilon_+,\varepsilon_+ ; Z)\equiv 1$（$\varepsilon_+=(+1,\cdots,+1)$）であり、これから直ちに全ての $\sigma\in\mathfrak{S}_{m+1}$ について $\tilde{E}(Y,\varepsilon_+ ; \sigma Z)=\tilde{E}(Y,\varepsilon_+ ; Z)$ がでる。これが、元来の Eisenstein 級数の函数等式である。

$m=2$，$(p,q)=(1,2)$ のときの $A^{\sigma}(\varepsilon,\eta : Z)$ の表を次に掲げておく。このときは、符号の分布は、$\varepsilon=(+1,-1,-1)$，$\eta=(-1,+1,-1)$，$\kappa=(-1,-1,+1)$ の3つであり、行列

$$\begin{pmatrix} A^{\sigma}(\varepsilon,\varepsilon ; Z), & A^{\sigma}(\varepsilon,\eta : Z), & A^{\sigma}(\varepsilon,\kappa : Z) \\ A^{\sigma}(\eta,\varepsilon : Z) & A^{\sigma}(\eta,\eta : Z) & A^{\sigma}(\eta,\kappa : Z) \\ A^{\sigma}(\kappa,\varepsilon : Z) & A^{\sigma}(\kappa,\eta : Z) & A^{\sigma}(\kappa,\kappa : Z) \end{pmatrix}$$

は、次の通りである。但し、$\theta_1=(z_1-z_2)\pi$，$\theta_2=(z_2-z_3)\pi$，$\theta_3=(z_3-z_1)\pi$ とおいた。

σ	$A^{(\sigma)}(z)$
(3,2,1)	$\begin{bmatrix} -\tan\theta_1\tan\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_1 & \sec\theta_3 \\ -\tan\theta_3\sec\theta_1 & \tan\theta_1\tan\theta_2+\sec\theta_1\sec\theta_2\sec\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_2 \\ \sec\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_2 & -\tan\theta_2\tan\theta_3 \end{bmatrix}$

(3,1,2)	$\begin{bmatrix} -\tan\theta_3 & \sec\theta_2\sec\theta_3 & \tan\theta_2\sec\theta_3 \\ 0 & \tan\theta_2 & \sec\theta_2 \\ \sec\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_2 & -\tan\theta_2\tan\theta_3 \end{bmatrix}$
(2,3,1)	$\begin{bmatrix} -\tan\theta_1\tan\theta_3 & -\tan\theta_3\sec\theta_1 & \sec\theta_3 \\ \sec\theta_1 & \tan\theta_1 & 0 \\ \tan\theta_1\sec\theta_3 & \sec\theta_1\sec\theta_3 & -\tan\theta_3 \end{bmatrix}$
(2,1,3)	$\begin{bmatrix} \tan\theta_1 & \sec\theta_1 & 0 \\ \sec\theta_1 & \tan\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(1,3,2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tan\theta_2 & \sec\theta_2 \\ 0 & \sec\theta_2 & \tan\theta_2 \end{bmatrix}$
(1,2,3)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

§2. Descending chains の概均質ベクトル空間

$\zeta^*_Y(\varepsilon; s_1, \cdots, s_m)$は、可約概均質ベクトル空間に付随するZeta函数とみなすことができる。前節で定義した$(G(Y), \rho, V)$という三対は、$S_Y = \bigcup_{i=1}^{m} \{\det Y_i = 0\}$を特異点集合とする概均質ベクトル空間であり、$\det Y_i$は、指標$\det x_i^{-2}$に対応する相対不変式であることが容易に示される。$\zeta^*_Y$はこの空間のZeta函数である。函数等式の証明のためには、ρの"部分反傾表現"が必要となる。

$k = 1, \cdots, m$について、$M(k+1, k)$は自然にVの部分空間とみなせ、特にρの不変部分空間となっている。いま、$M(k+1, k)$

とその双対空間を $\langle x_k, x_k^* \rangle = \mathrm{tr}\, {}^t x_k x_k^*$ $(x_k, x_k^* \in M(k+1,k))$ によって同一視する。このとき $\mathfrak{X}(Y)$ の $\mathfrak{T}$ 上の表現 $\rho^{(k)}$:

$$\rho^{(k)}(g)X = (g_{m+1} x_m g_m^{-1}, \ldots, g_{k+2} x_{k+1} g_{k+1}^{-1}, {}^t g_{k+1}^{-1}\, {}^t x_k\, {}^t g_k, g_k x_{k-1} g_{k-1}^{-1}, \ldots, g_2 x_1 g_1^{-1})$$

は、$M(k+1,k)$ に関する部分反傾表現というべきものである。$k=0$ のとき、$\rho^{(0)}=\rho$ とおく。任意の $k=0,1,\ldots,m$ について、$(\mathfrak{X}(Y), \rho^{(k)}, \mathfrak{T})$ は概均質ベクトル空間となる。これらを、「descending chains の概均質ベクトル空間」と呼ぶ。Descending chain (Y, X) $(X \in \mathfrak{T})$ について、対称行列の列

$$\begin{array}{l} Y_{m+1}^{(k)} \to Y_m^{(k)} \to \cdots \to Y_2^{(k)} \to Y_1^{(k)} \\ \quad \| \\ \quad Y \end{array}$$

を

$$Y_i^{(k)} = \begin{cases} Y_{i+1}^{(k)}[x_i] & (i \neq k, k-1) \\ (Y_{i+1}^{(k)})^{-1}[x_i] & (i = k, k-1) \end{cases}$$

によって定義する $(k=0,1,\ldots,m)$。$k=0$ のときは、すでに導入した Y_i と一致する。$\mathfrak{T}$ 上の有理函数

$$P_i^{(k)}(Y:X) = \det Y_i^{(k)} \qquad (1 \le i \le m)$$

は、相対不変性

$$P_i^{(k)}(Y:\rho^{(k)}(g)X) = \chi_i^{(k)}(g)\, P_i^{(k)}(Y:X)$$

$$\chi_i^{(k)}(g) = \begin{cases} \det g_i^{-2} & (i \neq k) \\ \det g_i^{2} & (i = k) \end{cases}$$

を満足する。$(\mathfrak{X}(Y), \rho^{(k)}, \mathfrak{T})$ の特異点集合は、

$$S_1^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{m} \{ P_i^{(k)}(Y:X) = 0 \}$$

で与えられる。次に、$V_{\mathbb{R}} = M(m+1, m; \mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus M(2,1;\mathbb{R})$ の $\rho^{(k)}(G(Y)^+_{\mathbb{R}})$-同軌道を求める。

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+1}) \in \{\pm 1\}^{m+1}$ について

$$V^{(k)}(Y, \varepsilon) = \{ x \in V_{\mathbb{R}} \,;\, \mathrm{sgn}\, P_i^{(k)}(Y : x) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq m) \}$$

とおく。このとき、次が成立つ。

(1) $V^{(k)}(Y, \varepsilon) \neq \phi \iff \mathrm{sgn}\, \varepsilon = (p, q)$,

(2) $V^{(k)}(Y, \varepsilon)$ は $\rho^{(k)}(G(Y)^+_{\mathbb{R}})$-同軌道で

$$V_{\mathbb{R}} - S_Y^{(k)} = \bigcup_{\mathrm{sgn}\,\varepsilon = (p,q)} V^{(k)}(Y, \varepsilon),$$

さらに、$V^{(k)}(Y, \varepsilon)$ への $G(Y)^+_{\mathbb{R}}$ の作用は effective である。

$V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少函数 f に対し、

$$\Phi^{(k)}(Y, \varepsilon, f : s) = \int_{V^{(k)}(Y, \varepsilon)} \prod_{i=1}^{m} |P_i^{(k)}(Y : x)|^{s_i} f(x)\, \omega^{(k)}(Y : x)$$

$(s = (s_1, \cdots, s_m) \in \mathbb{C}^m)$ とおく。ここで、$\omega^{(k)}(Y : x)$ は $G(Y)^+_{\mathbb{R}}$-不変な $V^{(k)}(Y, \varepsilon)$ 上の測度で

$$\omega^{(k)}(Y : x) = \prod_{i \neq k, k+1} |P_i^{(k)}(Y : x)|^{-1} \cdot |P_k^{(k)}(Y : x)|^{-k} |P_{k+1}^{(k)}(Y : x)|^{-k-1} dx$$

によって正規化する。$G(Y)^+_{\mathbb{R}}$ 上の Haar 測度 dg は

$$dg = |\det Y|^{\frac{1}{2}\sigma \cdot m}\, \omega^{(k)}(Y : x) \qquad (x \in V^{(k)}(Y : \varepsilon)),$$

$\sigma = 1$ $(k \neq m)$, -1 $(k = m)$ と正規化することができる。以上の記号の下で、Eisenstein 級数 $E(Y, \varepsilon ; s)$ の積分表示が得られる。すなわち、

$$Z^{(k)}(Y, f ; s) = \int_{G(Y)^+_{\mathbb{R}}/G(Y)^+_{\mathbb{Z}}} \prod_{i=1}^{m} \chi_i^{(k)}(g)^{s_i} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}} - S_Y^{(k)}} f(\rho^{(k)}(g) x)\, dg$$

$$= |\det Y|^{\delta_{k,m} s_m + \frac{\sigma_m}{2}} Z(s') \sum_{\mathrm{sgn}\,\varepsilon = (p,q)} E(Y, \sigma_k \varepsilon; s') \Phi^{(k)}(Y, \varepsilon; f; s)$$ 。

ただし　$Z(s) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} \zeta(2(s_i + \cdots + s_j) - j + i)$

$s' = (s_k - s_1 - \cdots - s_{k-1}, s_1, \cdots, s_{k-1}, s_{k+1} - s_k, s_{k+2}, \cdots, s_m)$

$\sigma_k = (k+1, 1, \cdots, k)$

である。この積分は，領域

$$\left\{ s \in \mathbb{C}^m ;\ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_i) > c \quad (i \neq k, k+1) \\ \mathrm{Re}(s_k) > c \cdot (\mathrm{Re}(s_1) + \cdots + \mathrm{Re}(s_{k-1})) \\ \mathrm{Re}(s_{k+1}) > c(\mathrm{Re}(s_1) + \cdots + \mathrm{Re}(s_k) + 1) \end{array} \right\}$$

（c は十分大きい正数）で絶対収束する。

急減少函数 f の（$M(k+1, k; \mathbb{R})$ に関する）<u>部分Fourier変換</u> $F^{(k)} f$ は

$$F^{(k)} f(x) = \int_{M(k+1, k; \mathbb{R})} f(x_m, \cdots, x_{k+1}, x_k^*, x_{k-1}, \cdots, x_1) e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,{}^t x_k \cdot x_k^*} dx_k^*$$

によって定義される。Eisenstein級数の函数等式は，上記の積分表示に，Poissonの和公式

$$\sum_{x^* \in V_{\mathbb{Z}}} f(\rho^{(k)}(g) x^*) = \chi_{k+1}^{(k)}(g)^{\frac{k}{2}} \chi_k^{(k)}(g)^{\frac{k+1}{2}} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}} F^{(k)} f(\rho^{(0)}(g) x)$$

と，次の定理を適用して証明することができる（cf [5]）。

<u>定理2</u>　$\Phi^{(k)}(Y, \varepsilon, f; s)$ は $\mathbb{C}^m$ 上の有理型函数に解析接続され，次の函数等式を満たす。

$$\Phi^{(0)}(Y,\varepsilon,F^{(k)}f;s)=|\det Y|^{-\frac{m}{2}\cdot\delta_{k,m}}\prod_{i=1}^{k}\pi^{-(s_i+\cdots+s_k-\frac{k-i}{2})}\Gamma(s_i+\cdots+s_k-\tfrac{k-i}{2})$$

$$\sum_{\mathrm{sgn}\,\eta=(p,q)} a_k(\eta,\varepsilon;s)\,\Phi^{(k)}(Y,\eta,f;s^*)$$

ただし，$s^*=(s_1,\cdots,s_{k-1},\frac{k+1}{2}-s_k,s_{k+1}+k/2,s_{k+2},\cdots,s_m)$

$$a_k(\eta,\varepsilon;s)=\prod_{i=1}^{k}\sin(z_{k+1}-z_i+1/2)\pi\cdot A^{\sigma_k}(\eta,\varepsilon;z)$$

である。

§1, 2の詳細は，[4]を参照。

§3. 球函数

Yを符号$(p.q)$ $(p+q=m+1)$の$m+1$次実対称行列とする。コンパクト群$SO(m+1)$のHaar測度を$\int_{SO(m+1)}dk=1$と正規化しておく。$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{m+1})\in\{\pm1\}^{m+1}$に対し，

$$\varphi(Y,\varepsilon;s)=\int\prod_{i=1}^{m}|d_i(Y[k])|^{s_i-1}dk$$

とおく。ここで積分は

$$\{k\in SO(m+1)\ ;\ \mathrm{sgn}\,d_i(Y[k])=\varepsilon_1\cdots\varepsilon_i\quad(1\le i\le m+1)\}$$

上で行われる。以下，対称空間$X=SL(m+1;\mathbb{R})/SO(p.q)$を行列式$=(-1)^q$，符号$(p.q)$の$m+1$次実対称行列の空間と同一視し$Y$は$X$を動くものとする。このとき，$\varphi(Y,\varepsilon;s)$は，$s$に有理型に依存する$X$上の実解析函数であり，Oshima & Sekiguchi [2]の意味でのX上の$SO(m+1)$-不変帯球函数である。特にXがRiemann対称空間，すなわち$(p.q)=(m+1.0)$のとき，帯球函数のHarish-Chandra積分表示に他ならない。

__補題__　$SO(m+1)$-不変急減少函数 f について

$$\Phi^{(k)}(Y,\varepsilon,f;s)=\varphi(Y,\sigma_k\varepsilon;s')\,\Phi^{(k)}(E_{m+1},\varepsilon_+,f;s)$$

ここで　$s'=(s_k-s_1-\cdots-s_{k-1},\ s_1,\ \ldots,\ s_{k-1},\ s_{k+1}-s_k,\ s_{k+2},\ \ldots,\ s_m)$

E_{m+1}；単位行列

$\varepsilon_+=(+1,+1,\ldots,+1)$

である。

この補題によって、定理2を書き直すと、次を得る。

__定理3__.　$s_i=z_{i+1}-z_i+1/2$　$(1\leqq i\leqq m)$　と変数変換すると、任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_{m+1}$ に対して

$$\varphi(Y,\varepsilon;z)=\sum_{\operatorname{sgn}\eta=(p,q)}A^{\sigma}(\eta,\varepsilon;z)\,\varphi(Y,\sigma\eta;\sigma z)\quad.$$

これで、Eisenstein級数と球函数の函数等式の一致が、概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換の立場から示された。なお、定理3はSekiguchiによって一般のAffine対称空間に拡張された。

§4. Siegel の Zeta 函数と超幾何函数

Siegelは、[9]において一般の符号の二次形式のZeta函数の函数等式を、いわゆるRiemannの方法により次の超幾何函数の函数等式に帰着させた。

$$f_1(s,x)=\frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{m-n-1}{2})}{\Gamma(s-\frac{n}{2})}F(s-\frac{m-1}{2},1-\frac{n}{2},s-\frac{n}{2},-x)$$

$$f_2(s,x)=\frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})\Gamma(-\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(s-\frac{m-n+1}{2})}\cdot x^{\frac{m-1}{2}-s}F(s-\frac{m-1}{2},1-\frac{m-n+1}{2},s-\frac{m-n+1}{2},-x^{-1})$$

$$x^{\frac{n}{2}-1}\sin\pi s\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\left(\frac{m+1}{2}-s,x^{-1}\right)=\begin{pmatrix}\sin\pi(s-\frac{m-n+1}{2}) & \sin\frac{\pi n}{2}\\ \sin\pi\frac{m-n+1}{2} & \sin\pi(s-\frac{n}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}(s,x).$$

f_1, f_2は、§3で与えた球函数から

$$Y=Y(x)=\begin{pmatrix}x^{\frac{m-n+1}{m+1}}\cdot 1_n & \\ & -x^{-\frac{n}{m+1}}1_{m-n+1}\end{pmatrix}$$

$$f_i(s,x)=\sum_{\varepsilon_1=(-1)^{i-1}}\varphi(Y(x),\varepsilon;s,\overbrace{0,\cdots,0}^{m-1})\qquad(i=1,2)$$

として得られる。函数等式は、恒等式

$$\varphi(Y^{-1},\varepsilon,z)=\varphi(Y,\check{\varepsilon},\check{z})$$

$$\check{\varepsilon}=(\varepsilon_{m+1},\varepsilon_m,\cdots,\varepsilon_1)$$

$$\check{z}=(-z_{m+1},\cdots,-z_1)$$

と、$\sigma=(2,3,\cdots,m+1,1)$ に対応する定理3の函数等式を組合せて導かれる。一方、Siegel の Zeta函数と§1で定義したEisenstein級数の間の関係については、次が予想される。

<u>予想</u> Siegel の Zeta函数は、Eisenstein級数のpoleでのresidueとして得られる。

最後に、Shintani [8] の Chap 1. Lemma 1. (ii) は $n=1$ に対する定理3に他ならないこと、又、Chap 1. Theorem 1 は部分Fourier 変換を用いて証明でき、より詳しい結果が得られることに注意しておく。

< 参考文献 >

[1] Harish-Chandra, Automorphic forms on semi-simple Lie groups, Springer lect. notes, vol. 62, 1968

[2] T. Oshima & J. Sekiguchi, Affine symmetric space 上の調和解析, 数理研での諸講演, 1976〜

[3] F. Sato, $SL(n;\mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間, 数理研講究録 260, 59-106.

[4] F. Sato, Generalized Selberg's zeta functions and related Dirichlet series, preprint.

[5] M. Sato & T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. Math. 100 (1974), 131-170.

[6] A. Selberg, A new types of zeta functions connected with quadratic forms, Report of the Institute in the theory of numbers, Colorado, 1959, 207-210.

[7] A. Selberg, Discontinuous groups and harmonic

analysis, Proc. Int. Congr. of Math. Stockholm, 1962.

[8] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector spaces of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ of Tokyo, 22 (1975), 25-65.

[9] C.L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen II, Math. Zeit 44 (1939), 398-426.