数理解析研究所講究録
第 295 巻 1977 年 88-91

超局所混合問題の適切性について

東大理　　片岡清臣

この小論では、一般の回折現象のモデルとなる混合問題を解析する為に、筆者が考えているプログラムを紹介したい。

問題は

$$\begin{cases} Pu = (D_1^2 - (x_1 - D_3/D_2)A(x, D'))u = 0 & x_1 > 0 \\ Bu|_{x_1=+0} = Q_1(x', D')\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0} + Q_2(x', D')u|_{x_1=+0} = 0 & \end{cases}$$

但し考えている場所は $M = R^n$, $N = \{x \in R^n \mid x_1 = 0\}$,

$M_+ = \{x \in R^n \mid x_1 > 0\}$ とするとき、$S^*_{M_+}X \ni (0; +i dx_2)$ の近傍である。A は $(0; +i dx_2)$ の近傍で定義された D_1 を含まない 2 階の擬微分作用素で、$\sigma(A)|_{iS^*M}$ は負の実数値をとるとする。また、Q_1, Q_2 は $(x_2, \ldots, x_n)$ についての擬微分作用素である。

この問題の適切性は後回しにして次の予想をたてる。

<u>予想 1</u>　$Pu = 0$ $(x_1 > 0)$ の超局所解 u がもし $x_1 > 0$ でマイクロ関数として 0 ならば、u の境界値の特異スペクトルは

$\{(x', i\eta') \mid \xi_2 \leqq 0\}$ の近傍で消える。

これはいわば、P の実解析解の境界値の特異スペクトルは（境界条件無しでも）境界面上のいわゆる回折を起こす場所の近傍では消えるだろうという事を意味している。この予想は実解析解の超局所的一意性を云っているにすぎないが、一般の場合の一意性をいう為にはどうしても必要である。

$\boxed{\text{注意}}$ 超局所的一意性は、P 以外の場合は、例え Dirichlet 条件を満たす実解析解に限っても成立しない事がある。実際

$$\begin{cases} Qu = (D_1^2 - D_2^2 + D_3^2)\, u = 0 & x_1 > 0 \\ u(+0, x') = 0. \end{cases}$$

の実解析解で、その Neumann data が analytic でないものが簡単に作れる。従って予想 1 はかなり本質的なものである。

次に一般の場合の存在と一意性をいうには、境界値問題のパラメトリックスを構成する必要がある。すなわち x_2 を時間と見たとき、

$$\begin{cases} P u_\pm = 0 & x_1 > 0 \\ B u_\pm = \delta(x' - y') \end{cases}$$

の解 $u_\pm$ であって、$\left(\frac{\partial u_+}{\partial x_1}(+0, x'), u_+(+0, x')\right)$ は $\{(x', i\eta') \mid x'_2 < y'_2\}$ で 0、$\left(\frac{\partial u_-}{\partial x_1}(+0, x'), u_-(+0, x')\right)$ は $\{(x', i\eta') \mid x'_2 > y'_2\}$ で 0

しかも，$u_+(x')$（$u_-(x')$）は境界から過去に向かう（未来に向かう）陪特性帯上に特異性は無いとする。

これを解くのに，まず最も基本的な Bu が Dirichlet data の場合を考える。その時には，もし $Pu_\pm=0$ を一階の方程式に帰着できるならば，（つまり $u_\pm$ が $(D_1-a_\pm(x, D'))u_\pm=0$ 型の方程式を満たす。）上は単にそれについての Cauchy 問題になるので割合扱い易い。従って問題は $u_\pm$ が満たすべき一階の方程式をみつける事である。

実際 $A(x, D')=D_2^2$ の場合についてみると，$x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2}\neq 0$ の所では，

$$P= D_1^2-(x_1-\frac{D_3}{D_2})D_2^2=(D_1\pm\sqrt{x_1-\frac{D_3}{D_2}}D_2\pm\cdots)(D_1\mp\sqrt{x_1-\frac{D_3}{D_2}}D_2\mp\cdots)$$

と分解されるので例えば

$$a_\pm(x', D')=\mp(\sqrt{x_1-\frac{D_3}{D_2}}D_2+\cdots)$$

ととれば良さそうである。しかしこのような作用素は $x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2}=0$ の近傍では，各項は何とか意味付けできるのではあるが，全体としては発散級数となってしまう。

ところがこの場合は $u_\pm$ は簡単に計算でき（$\eta_3>0, \eta_2>0$ では

$$\hat{u}_\pm=A(e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\eta_2^{\frac{2}{3}}(x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2}))/A(e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\eta_2^{\frac{2}{3}}(-\frac{\eta_3}{\eta_2}))$$

（但し $A(z)$ は Airy 関数）

となる。

よって.

$$D_1\hat{u}_\pm = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}\eta_2^{\frac{2}{3}}\,\frac{A'\left(e^{\pm\frac{\pi}{3}i}(x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2})\eta_2^{\frac{2}{3}}\right)}{A\left(e^{\pm\frac{\pi}{3}i}(x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2})\eta_2^{\frac{2}{3}}\right)}\,\hat{u}_\pm$$

$\frac{A'(z)}{A(z)} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$ 但し $\{a_n\}$ は $A(z)$ の零点で すべて負の実数である事が知られているので.

$$0>a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots\to-\infty \qquad |a_n| \sim O(n^{\frac{2}{3}})$$

$$\therefore\ D_1\hat{u}_\pm = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}\eta_2^{\frac{2}{3}}\left(\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\pm\frac{\pi}{3}i}\eta_2^{\frac{2}{3}}(x_1-\frac{\eta_3}{\eta_2})-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)\right)\hat{u}_\pm$$

従って $u_\pm$ は.

$$a_\pm(x,D') = (\pm D_2)^{\frac{2}{3}}\left(\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(\pm D_2)^{\frac{2}{3}}(x_1-\frac{D_3}{D_2})-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)\right)$$

とおくと

$$(D_1-a_\pm(x,D'))u_\pm = 0$$ を満たす.

確かに $a_\pm$ は作用素として各項も、また和も意味を持っている。しかも $a_\pm$ が求まれば Neumann data は $a_\pm(+0,x',D')u(+0,x')$ によって直ちに求める事ができるので、境界値のスペクトルもすぐ評価できる。従って一般の P に対しても上のような部分分数和を使って $a_\pm$ を求める事ができれば問題はほぼ解決する。