数理解析研究所講究録
第 296 巻 1977 年 45-52

シンプル・マルチヘッドオートマタに関する2，3の性質

広島大・工学部　井上克司
中村昭
阿江忠

最近，Ibarraらは，マルチヘッドオートマタ（MHA）の制限されたタイプであるシンプルマルチヘッドオートマタ(SPMHA)を導入し，それらによって受理される言語の2，3の性質を調べている。[1]〜[3]　特に，[3]では，種々の決定問題の可解性を示す有用な手段として，SPMHAが用いられ得ることを示している。本稿では，SPMHAの言語受理能力が，

(1)　用いられるヘッドの個数

(2)　動作の決定性と非決定性

に依存していかに異なってくるかを議論する。ヘッドの個数が'1'増せば，真に能力が強まること，非決定性は決定性より強力であることなどを示す。

1. 準備

(1方向)マルチヘッド有限オートマトンの定義については，文献〔4〕,〔5〕を参照されたい。次の記法を用いる.

k-HFA … kヘッド1方向有限オートマトン

k個のヘッドのうちただ1つのみ(このヘッドを読取りヘッドとよぶ)がテープ上の記号を識別でき，残りのヘッド(これらのヘッドを計数ヘッドとよぶ)は，左境界記号(¢)，右境界記号($)以外はテープ上の記号を識別することのできないようなk-HFAは，シンプル(simple)であるとよばれる.〔1〕～〔3〕‡ また，任意の2つのヘッドが同一のコマを読んでいるか否かを検知することのできるようなk-HFAは，検知形(sensing)であるとよばれる.〔1〕〔6〕 シンプル，検知形であることを表わすのにそれぞれ頭に'SP','SN'を付ける．すなわち，

SPk-HFA … シンプルk-HFA,

SNk-HFA … 検知形k-HFA,

SNSPk-HFA … 検知形シンプルk-HFA。

また，動作が決定性，非決定性であることを表わすのにそれぞれ頭に'D','N'を付ける．たとえば，

DSNSPk-HFA … 決定性SNSPk-HFA．

例えば，DSNSPk-HFAによって受理されるすべてのテープの集合のクラスを$\mathcal{L}$(DSNSPk-HFA)と記す.

---

‡ 更に詳しい定義については，文献〔2〕を参照されたい.

2 結果

最近，各$X \in \{D, N\}$，各$k \geq 1$に対し，$\mathcal{L}(Xk\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(X(k+1)\text{-HFA})$，$\mathcal{L}(XSNk\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(XSN(k+1)\text{-HFA})$であることが示された.[7] まず，決定性（検知形）シンプルマルチヘッド有限オートマタに対しても同様な事実が成り立つことを示そう。

補題2.1 Lを正規言語，L'を$DSNSPk$-HFAで受理される言語とし，Lの語の中に現われる記号集合とL'の語の中に現われる記号集合が共通の要素を含まないとする。このとき，$L \cdot L'$は$DSNSPk$-HFAで受理される。　　　　　　　　（証明略）

補題2.2 各$k \geq 1$に対し，$T_k = \{0^{m_1}10^{m_2}1 \cdots 10^{m_k}20^{m}b^{s} \mid$ 各i $(1 \leq i \leq k)$に対し$m_i \geq 1$，あるj $(1 \leq j \leq k)$に対し$m = m_j$，かつ$b \notin \{0,1,2\}$で$s \geq 1\}$とする。このとき，(1) $T_k \in \mathcal{L}(DSP(k+1)\text{-HFA})$，(2) $T_k \notin \mathcal{L}(DSNSPk\text{-HFA})$.

証明　(1)：　T_kは，次の動作を行なう$DSP(k+1)$-HFA Mで受理される。Mの読取りヘッドをR，計数ヘッドを$H_1, \cdots, H_k$とする。入力として，$¢0^{m_1}10^{m_2}1 \cdots 10^{m_k}20^{m}b^{s}\$$が与えられたとする。Mは，Rが$¢, 1, 2, b$を読むときはRと各H_i $(1 \leq i \leq k)$を同時に右に1コマ動かす．また，各i $(1 \leq i \leq k)$に対し，Rが0^{m_i}を読む間は，H_iのみ0^{m_i}の最初の'0'上にとどめたまま，Rと$H_1, \cdots, H_{i-1}, H_{i+1}, \cdots, H_k$を同時に右に動かす．$R$が$0^{m}$を読む間は，$R$を1コマ右に動かすごとに各

H_i $(1 \leqq i \leqq k)$ を同時に右に2コマ動かす。このようにヘッドを動かすとき，$H_1, \cdots, H_k$ のうちの少なくともひとつがRと同時に\$にぶつかれば，入力を受理する。（Rが 0^m の最初の'0'上にあるときには，各 i $(1 \leqq i \leqq k)$ に対し，H_i はRより m_i コマ左に位置していることに注意されたい。）

(2)：　(2)を証明するためには，補題2.1より，次の言語 T_k' がいかなるDSNSPk-HFAによっても受理されないことを示せばよい。$T_k' = \{a\}^* \cdot T_k$，ここで $a \notin \{0, 1, 2, \$\}$。

いま，T_k' を受理するDSNSPk-HFA Mが存在するとし，Mの状態の個数を g とする。各 $n \geqq 1$ に対し，V^n を次の集合とする。

$$V^n = \{a^i 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_k} 2 0^m \$^s \mid i \geqq 0, \forall j (1 \leqq j \leqq k)[1 \leqq m_j \leqq n], i + \sum_{j=1}^{k} m_j = nk, m \geqq 1, s \geqq 1, かつ\ m + s = n+1\}.$$

（V^n の要素はすべて $(k+1)(n+1)$ の長さを持つことに注意）。

V^n の中の2つの語

$$w = a^i 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_k} 2 0^m \$^s,$$

$$w' = a^{i'} 0^{m_1'} 1 0^{m_2'} 1 \cdots 1 0^{m_k'} 2 0^{m'} \$^{s'}$$

は，$(m_1', m_2', \cdots, m_k')$ が $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ の置換(permutation)であるとき，$w E w'$ と書かれる。関係'E'は同値関係であり，この同値関係のもとで V^n の語を類別したときの同値類の総数は

$$P_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k}$$

個であり，このP_n個の同値類を$C_1, C_2, \cdots, C_{P_n}$と記す。ところで，Mの読取りヘッドRが$\nabla^n$の中の語の記号'2'を読むときのMのconfiguration（Mの状態とMの$k-1$個の計数ヘッドのテープ上での位置情報の対を，Mのconfigurationとよぶ）の総数は，高々，$t_n = g \cdot ((k+1)(n+1)+2)^{k-1}$個である．明らかに，十分大きな$n$に対し，$P_n > t_n$であり，このような$n$に対しては，記号'2'を読むときのMのconfigurationが同一となるような2つの語$v \in C_i$，$v' \in C_j$ $(i \neq j)$が存在する．v，v'は，一般性を失なうことなく次のように選ぶことができる。

- $v = a^{i_1} 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_r} 1 \cdots\cdots 1 0^{m_k} 2 0^{m_r} b^s$,
- $v' = a^{i'_1} 0^{m'_1} 1 0^{m'_2} 1 \cdots 1 0^{m'_r} 1 \cdots\cdots 1 0^{m'_k} 2 0^{m_r} b^s$,
- すべてのi $(1 \leqq i \leqq k)$に対し，$m'_i \neq m_r$。

明らかに，$v \in T'_k$であり，従って$v' \in T'_k$でなければならない。これは矛盾である．これで(2)の証明は終る。 ■

定義より明らかに，$\mathcal{L}(\text{DSP}k\text{-HFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DSNSP}k\text{-HFA})$であることに注意すれば，補題2.2より，次の定理が得られる。

<u>定理 2.1</u>　各$k \geqq 1$に対し，(1) $\mathcal{L}(\text{DSP}k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{DSP}(k+1)\text{-HFA})$，(2) $\mathcal{L}(\text{DSNSP}k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{DSNSP}(k+1)\text{-HFA})$.

<u>〔問1〕</u>　非決定性に対して，定理2.1と同様な事実が成り立つか？

次に，1方向（検知形）シンプルマルチヘッド有限オートマタでは

，非決定性は決定性より強力であることを示す。

補題2.3　$T_\infty = \{ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_k} 2 0^m b^s \mid k \geq 1$, 各$i$($1 \leq i \leq k$)に対し$m_i \geq 1$, ある$j$に対し$m = m_j$ ($1 \leq j \leq k$), かつ$s \geq 1$で$b \notin \{0, 1, 2\} \}$とする。このとき，(1) $T_\infty \in \mathcal{L}$(NSP2-HFA)，(2) $T_\infty \notin \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}$(DSNSP$k$-HFA)。

証明　(1)：　T_∞は，次の動作を行なうNSP2-HFA Mによって受理される。Mの読取りヘッドをR，計数ヘッドをHとする。入力として，$¢ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_k} 2 0^m b^s \$$ が与えられたとする。Mは，Rが$¢, 1, 2, b$を読む時はRとHを同時に右に1コマ動かす。Mは，非決定的にi ($1 \leq i \leq k$)を選択して，まずRとHを0^{m_i}の最初の'0'上に動かす。次に，Rが0^{m_i}を読む間は，Hをそのまま動かさないでRのみ右に動かす。

Rが0^mを読む間は，Rを1コマ右に動かす毎に，Hを2コマ右に動かす。このようにヘッドを動かすとき，RとHとが同時に\$にぶつかれば，入力を受理する（Rが0^mの最初の'0'上にある時は，HはRよりm_iコマ左に位置している）。

(2)：　ある$k \geq 1$に対し，$T_\infty \in \mathcal{L}$(DSNSPk-HFA)とし，T_∞を受理するDSNSPk-HFAをMとする。また，U_{k+1}を次の集合とする。

$$U_{k+1} = \{ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_k} 2 0^{m_{k+1}} b^s \mid \text{各} i (1 \leq i \leq k+1) \text{に対し} m_i \geq 1, s \geq 1, b \notin \{0, 1, 2\} \}。$$

次の動作を行なうDSNSPk-HFA M′を考える。入力$¢ x \$$が

与えられたとき，M'は，Mの動作を模倣してxがT_∞の要素であるか否かを調べると同時に，xがU_{k+1}の要素であるか否かを確認し（この確認は，ヘッドの個数を増加させることなく行なうことが可能である），xがT_∞とU_{k+1}の両方の要素であることが確かめられたときのみ，xを受理する。明らかに，M'は$T_\infty \cap U_{k+1}$を受理する。一方，$T_\infty \cap U_{k+1} = T_k$（$T_k$の定義については，補題2.2参照）であり，結局$M'$は$T_k$を受理することになる。これは補題2.2（2）と矛盾する。 ∎

補題2.3より，次の定理を得る。

定理 2.2　各$k \geq 2$に対し，

(1) $\mathcal{L}(DSPk\text{-}HFA) \subsetneq \mathcal{L}(NSPk\text{-}HFA)$，

(2) $\mathcal{L}(DSNSPk\text{-}HFA) \subsetneq \mathcal{L}(NSNSPk\text{-}HFA)$，また

(3) $\bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(DSPk\text{-}HFA) \subsetneq \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(NSPk\text{-}HFA)$，

(4) $\bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(DSNSPk\text{-}HFA) \subsetneq \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(NSNSPk\text{-}HFA)$。

〔注 1〕　1方向（検知形）マルチヘッド有限オートマタに対しても，定理2.2と同様な事実が成り立つことが文献〔7〕で示されている。

謝辞　　日ごろ，御指導，御助言いただく名大工学部の本多波雄教授，福村晃夫教授，稲垣康善助教授，山大工学部の高浪五男教授，広大工学部の吉田典可教授に感謝する。

文　献

〔1〕 O.H. Ibarra : 'A note of semilinear sets and bounded-reversal multihead pushdown automata', Information processing letters 3, 1, (July 1974), P.25.

〔2〕 O.H. Ibarra et.al. : 'Finite automata with multiplication', Theoretical Computer Science 2 (1976) P.271.

〔3〕 O.H. Ibarra et.al : 'A useful device for showing the solvability of some decision problems', JCSS 13 (1976), P.153.

〔4〕 A.L. Rosenberg : 'On multi-head finite automata', IBM J. Res. Develop. (1966), P.388.

〔5〕 I.H. Sudborough : 'On tape-bounded complexity classes and multihead finite automata', JCSS 10 (1975), P.62.

〔6〕 井上，中村 : 「検知形マルチヘッドオートマタに関する2,3の性質」，信学論(D)，掲載予定.

〔7〕 A.C. Yao et.al : 'K+1 Heads are better than K', IEEE, Proceedings of 17-th International Symposium on Foundations of Computer Science, P.67 (1976).