数理解析研究所講究録
第 296 巻 1977 年 129-145

内包の外延への還元可能性について

静岡大学　工学部　中松和己
鈴木淳之

第0章

〔序〕　情報処理技術の応用分野を自然言語にも拡げるには、計算機構の研究に意味論的考察が必須であり、それ故様相諸概念の導入及びその数学的研究、処理技術の取り入れも必要となる．意味論は名指し理論の矛盾がわかりR.Carnapの内包－外延の体系として捉られ様相論理が重要視されてきた．しかしその応用面からは、内包的体系は外延的体系に比べ難解で複雑である．そこで本文ではBressan（文献〔1〕）によって整備された様相言語体系（ν種類の領域（domain）をもつ一般様相言語体系）における内包的体系と外延的体系の間の両方向の環元可能性について、体系の中で内包的同型なる概念を定義し、これを基に論じた．その結果この環元可能性は、ある意味において成り立つ．

第1章

文献〔1〕に基づきν種類の領域をもつ一般様相言語体系（以下ML^νと略す.）と一般外延言語体系（以下EL^νと略す.）を定義する．（記号の詳細については文献〔1〕参照のこと.）

論理式（well formed formula）を定義するためにタイプを導入する．

〔定義1〕　次の3条件によって帰納的に$\underline{\tau}$をML^νの項のタイプとして定義する.（略して$\underline{\tau} \in \mathcal{T}^\nu$と書く.）

(a)　$\underline{\tau}$が整数$1, 2, \cdots, \nu$の任意のものであるとき、$\underline{\tau} \in \mathcal{T}^\nu$

(b)　$\underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n \in \mathcal{T}^\nu$であって$\underline{\tau} = \langle \underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n, 0 \rangle$であるとき、$\underline{\tau} \in \mathcal{T}^\nu$.

(c)　$\underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n \in \mathcal{T}^\nu$であって$\underline{\tau} = \langle \underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n, \underline{\tau}_0$であるとき、$\underline{\tau} \in \mathcal{T}^\nu$.

ここで$\langle \underline{a}_1, \cdots \underline{a}_n \rangle$は$n$順序対を表わす．また0を文（sentence）のタイプを表わし$\langle \underline{\tau}_1, \cdots \underline{\tau}_n, 0 \rangle$は関係（relator）のタイプを表わす．また$\bar{\mathcal{T}}^\nu = \mathcal{T}^\nu \cup \{0\}$とおき省略形として$(\underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n) = \langle \underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n, 0 \rangle$、$(\underline{\tau}_1 \cdots, \underline{\tau}_n : \underline{\tau}_0) = \langle \underline{\tau}_1, \cdots, \underline{\tau}_n, \underline{\tau}_0 \rangle$を採用する．

〔定義2〕（ML^νの記号の定義）

$\sim$（否定），$\wedge$（論理積），$\forall$（全称記号），$\underline{N}$（様相記号），ι（記述記号），(（左かっこ），)（右かっこ），,（

カンマ)，$\underline{v}_{\underline{t}\underline{n}}$，$\underline{c}_{\underline{t}\underline{n}}$（タイプ$\underline{t}$の$\underline{n}$番目の変数と定数），（ここで$\underline{t} \in T^{\nu}$，$\underline{n} = 1, 2, \cdots$）.

〔定義3〕（EL^{ν}の記号の定義）

〔定義2〕より$\underline{N}$（様相記号）を除いたもの．

〔定義4〕（ML^{ν}のwffの定義）

タイプ$\underline{t} \in \bar{T}^{\nu}$（$\bar{T}^{\nu} = T^{\nu} \cup \{0\}$）のwffの集合$\mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$は条件$(f_1)$〜$(f_9)$によって帰納的に定義される．ここで$\underline{n}$は正整数である．

(f_1) $\underline{v}_{\underline{t}\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$，　$\underline{c}_{\underline{t}\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$　（$\underline{t} \in T^{\nu}$）．

(f_2) $\underline{t} \in T^{\nu}$，$\Delta_1, \Delta_2, \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$であり　Δが$\Delta_1 = \Delta_2$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_3) $\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}} \in T^{\nu}$，　$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_1}, \cdots, \Delta_{\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_{\underline{n}}}$，　$R \in \mathcal{E}^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots \underline{t}_{\underline{n}})}$，であり　Δが$\underline{R}(\Delta_1, \cdots, \Delta_n)$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_4) $\underline{t}, \underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}} \in T^{\nu}$，$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_1}, \cdots, \Delta_{\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_{\underline{n}}}$，$\Phi \in \mathcal{E}^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}} : \underline{t})}$であり　Δが$\Phi(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}})$のとき$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$．

(f_5) $\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$であり　Δが$\sim \Delta_1$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_6) $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$であり　Δが$\Delta_1 \wedge \Delta_2$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_7) $\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$であり　Δが$(\forall \underline{v}_{\underline{t}\underline{n}})\Delta_1$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_8) $\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$であり　Δが$\underline{N}\Delta_1$のとき　$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$．

(f_9) $\underline{t} \in T^{\nu}$，$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{0}$であり　Δが$(\iota \underline{v}_{\underline{t}\underline{n}})\Delta_1$のとき$\Delta \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}}$．

〔定義5〕（EL^{ν}のwffの定義）

〔定義4〕の(f_8)を除いたもの．

第2章

2.1 〔内包的言語の外延的言語への翻訳について〕

内包的言語（ML^{ν}）のセマンティックスを外延的言語（$EL^{\nu+1}$）（$\nu+1$種の領域（domain）をもつ外延的言語）で表現する．これはML^{ν}を$EL^{\nu+1}$に翻訳することを意味する．

2.2 〔Possible caseについて〕

ある外延的理論の充足可能な文の集合$\underline{K}$とする．$\gamma = \hat{\gamma}(\underline{K})$を$\underline{K}$のすべてのmatrix（タイプ0のwff）の成り立つcaseとする．このときγを possible case と言う

$\gamma = \hat{\gamma}(\underline{K})$，$\gamma' = \hat{\gamma}'(\underline{K}')$とするとき$\gamma'$が$\gamma$の proper subcase であるとは次の場合である．

(1)，$\underline{K}'$が$\underline{K}$の論理的帰結（logical consequence）である．

(2)，(1)の逆が成り立たない．

ここでγが proper subcase を全くもたないときγを elementary possible case と言い、充足可能な文の最大集合を論理的等値（L－等値）な文のクラスに分割し、その各クラスよりある文の集合をとり，その集合により特徴づけられるpossible case のクラスをΓとする．

2.3 〔$EL^{\nu+1}$の対象（object）（外延）とML^{ν}の内包〕

ML^{ν}の内包を$EL^{\nu+1}$の対象（外延）で表現することにより、内包的言語を外延的言語に翻訳できる．

$EL^{\nu+1}$の universe を$\underline{D}_1, \cdots, \underline{D}_{\nu+1}$とする．タイプ$\underline{t}$（$\underline{t} \in T^{\nu}$）の対象（外延）のクラス$\underline{O}^{\nu}_{\underline{t}}$を次のように帰納的に定義する．

(a)　$\underline{O}^{\nu}_{\underline{t}} = \underline{D}_{\underline{t}}$　（$\underline{t} = 1, \cdots, \nu$）

(b)　$\underline{O}^{\nu}(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)$は直積$\underline{O}^{\nu}_{\underline{t}_1} \times \cdots \times \underline{O}^{\nu}_{\underline{t}_n}$の巾集合

(c)　$\underline{O}^{\nu}(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)$は直積$\underline{O}^{\nu}_{\underline{t}_1} \times \cdots \times \underline{O}^{\nu}_{\underline{t}_n}$から$\underline{O}^{\nu}_{\underline{t}_0}$への関数のクラス

また$\underline{D}^{\nu+1}_{\underline{t}} = P$（possible case のクラス）とする．

上記の定義をもとにML^{ν}の内包を外延で表現するため疑似内包（quasi-intension）のクラス$\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}}$を定義する．
$\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}}$は possible case のクラス$P$より対象（外延）への写像（mapping）として定義される．従ってML^{ν}と$EL^{\nu+1}$の間ではタイプ変換が必要となる．タイプの変換をηとするとηは次のように定義される．

(1)　$0^{\eta} = (\nu+1)$

(2)　$\underline{r}^{\eta} = (\nu+1 : \underline{r})$　　$(\underline{r} = 1, \cdots, \nu)$

(3)　$(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)^{\eta} = (\underline{t}_1^{\eta}, \cdots, \underline{t}_n^{\eta}, \nu+1)$

(4)　$(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)^{\eta} = (\underline{t}_1^{\eta}, \cdots, \underline{t}_n^{\eta} : \underline{t}_0^{\eta})$

2.4　〔疑似内包のクラス$\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}}$の定義〕

$$\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}} = \underline{O}^{\nu+1}_{\underline{t}\eta} \quad (\underline{t} \in \underline{T}^{\nu})$$

2.5 [EL^{ν}, ML^{ν} の付値 (value assignment), モデル (model)]

付値, $V(v_{\underline{t}\underline{n}}) \in \underline{O}^{\nu}_{\underline{t}}$ (EL^{ν}), $\mathcal{V}(v_{\underline{t}\underline{n}}) \in \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}}$ (ML^{ν})

モデル, $\mathcal{M}(c_{\underline{t}\underline{n}}) \in \underline{O}^{\nu}_{\underline{t}}$ (EL^{ν}), $\mathcal{M}(c_{\underline{t}\underline{n}}) \in \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}}$ (ML^{ν})

2.6 [疑似内包の等値性について]

$\gamma \in \Gamma$ が成り立つとし $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ を各々タイプ $\underline{t}$ ($\underline{t} \in \underline{T}^{\nu}$) のQI（疑似内包）とするとき、case γ において $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ が等値であるのは次の条件のうち1つが成り立つときであり $\tilde{x} =^{\underline{t}}_{\gamma} \tilde{y}$ と書く.

(a) $\underline{t} = \underline{r}$ のとき、($\underline{r} = 1, \cdots, \nu$) $\tilde{x}(\gamma) = \tilde{y}(\gamma)$.
このとき $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ は Γ から $\underline{D}^{\nu}_{\underline{r}}$ への写像である.

(b) $\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)$ のとき
$(\lambda \xi_1, \cdots, \xi_n)\tilde{x}(\xi_1, \cdots, \xi_n, \gamma) = (\lambda \xi_1, \cdots, \xi_n)\tilde{y}(\xi_1, \cdots, \xi_n, \gamma)$
このとき $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ は $\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}_1} \times \cdots \times \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}} \times \Gamma$ の部分集合であり、$\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ の共通部分が $\underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}_1} \times \cdots \times \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}_n} \times \{\gamma\}$ と一致する.

(c) $\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)$ のとき. $\xi_1 \in \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}_1}, \cdots \xi_n \in \underline{QI}^{\nu}_{\underline{t}_n}$ なるすべての $\langle \xi_1, \cdots, \xi_n \rangle$ に対し、タイプ $\underline{t}_0$ のQI、$\tilde{x}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ と $\tilde{y}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ が等値である.

(d)　$\underline{t} = 0$ のとき，$\{\gamma\} \cap \tilde{\underline{x}} = \{\gamma\} \cap \tilde{\underline{y}}$.

このとき $\tilde{\underline{x}} \subseteq \Gamma$, $\tilde{\underline{y}} \subseteq \Gamma$ である．

2.7　〔内包の外延への翻訳規則〕

以上のことより内包を外延で表現し ML^{ν} を $EL^{\nu+1}$ で表現できる．内包の外延への翻訳規則を η とすると次のようになる．

〔Rule　η〕　（$ML^{\nu} \to \overline{EL}^{\nu+1}$（$EL^{\nu+1}$ の部分言語））

(T₁)　$\underline{v}_{\underline{t}n}, \underline{c}_{\underline{t}n} \;\longrightarrow\; \underline{v}_{\theta n}, \underline{c}_{\theta n}$,　（$\theta = \underline{t}^{\eta}$）

(T₂)　$\Delta_1 = \Delta_2 \;\longrightarrow\; (\Delta_1^{\eta}) \overset{\underline{t}_1}{\underset{K}{=}} (\Delta_2^{\eta})$

（$\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_1}$,　K は $\underline{v}_{\theta_2}$,　$\theta = \nu + 1$）.

(T₃)　$\underline{R}(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}) \to \underline{R}^{\eta}(\Delta_1^{\eta}, \cdots, \Delta_{\underline{n}}^{\eta}, K)$

（$\underline{R}(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}) \in \mathcal{E}^{\nu}_0$,　$\underline{R} \in \mathcal{E}^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)}$,　$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_1}, \cdots \Delta_{\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_n}$）

(T₄)　$\phi(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}) \to \phi^{\eta}(\Delta_1^{\eta}, \cdots, \Delta_{\underline{n}}^{\eta})$

（$\phi \in \mathcal{E}^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)}$,　$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_1}, \cdots, \Delta_{\underline{n}} \in \mathcal{E}^{\nu}_{\underline{t}_n}$,　$t_0 \neq 0$）

(T₅)　$\sim \Delta_1 \to \sim \Delta_1^{\eta}$　　　（$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_0$）

(T₆)　$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \to \Delta_1^{\eta} \wedge \Delta_2^{\eta}$　　　（$\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}^{\nu}_0$）

(T₇)　$(\forall \underline{x})\, \Delta_1 \to (\forall \underline{x}^{\eta})\, \Delta_1^{\eta}$

(T₈)　$\underline{N}\, \Delta_1 \to (\forall K)\, \Delta_1^{\eta}$　　　（$\Delta_1 \in \mathcal{E}^{\nu}_0$）

(T₉)　$(\iota \underline{x})\, \phi(\underline{x}) \;\to\; (\iota \underline{x}^{\eta})(\forall K)\{(\exists! \underline{y}^{\eta})\, \phi(\underline{y})^{\eta} \wedge (\forall \underline{y}^{\eta})$

$[\phi(\underline{y})^{\eta} \supset \underline{x}^{\eta} \overset{\underline{t}}{\underset{K}{=}} \underline{y}^{\eta}] \vee \sim (\exists! \underline{x}^{\eta})\, \phi(\underline{x})^{\eta} \wedge \underline{x}^{\eta}$

$\overset{\underline{t}}{\underset{K}{=}} a^{*}_{\underline{t}n}\}$

（ a^*は非存在対象を表わす.）

（この規則の記号の詳細については文献〔1〕№15参照）

第3章

（内包的構造に関する内包－外延の還元性）

内包的言語（様相言語）において2つの文を考えるとき、その論理的等値性（L－等値性（各文の内包が等値））と共にその内包的構造の等値性が問題になることがある.（例、信念文の解釈） よってここで文（閉じたmatrix）だけでなくML^{ν}のすべてのwff に対しその内包的同型（内包的構造の等値性）を外延的メタ言語で定義し、内包的同型の外延的言語への翻訳に対する考察を与える.

3.1 〔内包的同型の定義〕

Δ, Δ'をML^{ν}の任意のタイプ$\underline{t}(\in T^{\nu})$のwff とすると、$\Delta, \Delta'$が内包的同型（$Is^{(i)}(\Delta, \Delta')$）とは次の場合である.

(1) $Is^{(i)}(\underline{v}\underline{t_n}, \underline{v}'\underline{t_n}) \overset{D}{\equiv}$（すべての付値$\mathcal{V}$に対し $\mathcal{V}(\underline{v}\underline{t_n}) = \mathcal{V}(\underline{v}'\underline{t_n})$）

$Is^{(i)}(\underline{c}\underline{t_n}, \underline{c}'\underline{t_n}) \overset{D}{\equiv}$（すべてのモデル$\mathcal{M}$に対し $\mathcal{M}(\underline{c}\underline{t_n}) = \mathcal{M}(\underline{c}'\underline{t_n})$）

(2) $Is^{(i)}(\Delta_1 \wedge \Delta_2, \Delta_1' \wedge \Delta_2') \overset{D}{\equiv} Is^{(i)}(\Delta_1, \Delta_1') \wedge Is^{(i)}(\Delta_2, \Delta_2')$

$\vee\ I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_2') \wedge I_S^{(i)}(\Delta_2, \Delta_1')$

(3) $I_S^{(i)}(\Delta_1 = \Delta_2,\ \Delta_1' = \Delta_2') \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_1') \wedge I_S^{(i)}(\Delta_2, \Delta_2')\ \vee$
$I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_2')\ \ I_S^{(i)}(\Delta_1' = \Delta_2)$

(4) $I_S^{(i)}(\underline{R}(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}),\ \underline{R}'(\Delta_1', \cdots, \Delta_{\underline{n}}')) \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\underline{R}, \underline{R}') \bigwedge_{\underline{\ell}=1}^{n}$
$I_S^{(i)}(\Delta_{\underline{\ell}}, \Delta_{\underline{\ell}}')$

(5) $I_S^{(i)}(\Phi(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}),\ \Phi'(\Delta_1', \cdots, \Delta_{\underline{n}}')) \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\Phi, \Phi') \bigwedge_{\underline{\ell}=1}^{n}$
$I_S^{(i)}(\Delta_{\underline{\ell}}, \Delta_{\underline{\ell}}')$.

(6) $I_S^{(i)}((\forall \underline{v}_{\underline{tn}})\Delta_1, (\forall \underline{v}'_{\underline{tn}})\Delta_1') \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\underline{v}_{\underline{tn}}, \underline{v}'_{\underline{tn}}) \wedge I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_1')$

(7) $I_S^{(i)}(\underline{N}\Delta_1,\ \underline{N}\Delta_1') \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_1')$

(8) $I_S^{(i)}((\urcorner \underline{v}_{\underline{tn}})\Delta_1,\ (\urcorner \underline{v}'_{\underline{tn}})\Delta_1') \overset{D}{\equiv} I_S^{(i)}(\underline{v}_{\underline{tn}}, \underline{v}'_{\underline{tn}}) \wedge I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta_1')$

3.2　(3.1)の定義によりML^{ν}の互いに内包的同型なる2つのwff Δ, Δ'についてその外延的翻訳$\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta}$を考えると、これらの2つの$EL^{\nu+1}$のwffの間に外延的同型($I_S^{(e)}(\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta})$)〔外延的同型とは内包的同型の定義において(1)の$\mathcal{V}$を$\underline{V}$, $\mathcal{M}$を$\mathcal{M}$でおき変え、(8)を除去したもの〕の関係が成り立つ

〔証明〕

Δ, Δ'をML^{ν}の任意のwffとするとき、$I_S^{(i)}(\Delta, \Delta')$を仮定し、$I_S^{(e)}(\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta})$を示す．wff,外延的同型の定義にもとづく式の長さに関する帰納法による．

(1) $I_S^{(i)}(\underline{v}_{\underline{tn}},\ \underline{v}'_{\underline{tn}})$ ならば $\mathcal{V}(\underline{v}_{\underline{tn}}) = \mathcal{V}(\underline{v}'_{\underline{tn}})$

またRule$^\eta$及び付値の定義より$\mathbb{V}(\underline{v}_{\theta n}) = \mathbb{V}(\underline{v}'_{\theta n})$,

$\theta = \underline{t}^\eta$ よって $I_S^{(e)}(\underline{v}^\eta_{tn}) = I_S^{(e)}(\underline{v}'^\eta_{tn})$

同様にして、$I_S^{(i)}(\underline{C}_{tn}, \underline{C}'_{tn})$を仮定するとモデルの定義により$I_S^{(e)}(\underline{C}^\eta_{tn}, \underline{C}'^\eta_{tn})$なることがわかる.

(2) Δ, Δ'を各々$\Delta_1 = \Delta_2$, $\Delta'_1 = \Delta'_2$又は$\Delta_1 \wedge \Delta_2$, $\Delta'_1 \wedge \Delta'_2$とする.

$I_S^{(i)}(\Delta, \Delta')$を仮定すると内包的同型の定義より$I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta'_1) \wedge I_S^{(i)}(\Delta_2, \Delta'_2) \vee I_S^{(i)}(\Delta_1, \Delta'_2) \wedge I_S^{(i)}(\Delta'_1, \Delta_2)$

帰納法の仮定(1)より$I_S^{(i)}(\Delta_{\underline{l}}, \Delta'_{\underline{l}})$ ($\underline{l} = 1, 2$) ならば

$I_S^{(e)}(\Delta^\eta_{\underline{l}}, \Delta'^\eta_{\underline{l}})$であるからこのとき成り立つ.

(3) Δ, Δ'が$\underline{R}(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}})$, $\underline{R}'(\Delta'_1, \cdots, \Delta'_{\underline{n}})$なるとき、$\Delta^\eta, \Delta'^\eta$は$\underline{R}^\eta(\Delta^\eta_1, \cdots, \Delta^\eta_{\underline{n}}, K)$, $R'^\eta(\Delta'^\eta_1, \cdots, \Delta'^\eta_n, K)$.

帰納法の仮定より$I_S^{(e)}(\Delta^\eta_{\underline{l}}, \Delta'^\eta_{\underline{l}})$であり$I_S^{(e)}(\underline{R}^\eta, \underline{R}'^\eta)$であるから明らかに$I_S^{(e)}(\Delta, \Delta')$.

(4) Δ, Δ'が $\Phi(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}})$, $\Phi'(\Delta'_1, \cdots, \Delta'_{\underline{n}})$なるとき

(3)と同様に明らか

(5) Δ, Δ'が$\sim \Delta_1$, $\sim \Delta'_1$のとき帰納法の仮定より $I_S^{(e)}(\Delta^\eta_1, \Delta'^\eta_1)$であるから $I_S^{(e)}(\sim \Delta^\eta_1, \sim \Delta'^\eta_1)$

(6) Δ, Δ'が$(\forall \underline{v}_{tn})\Delta_1$, $(\forall \underline{v}'_{tn})\Delta'_1$のとき、帰納法の仮定より、$I_S^{(e)}(\Delta^\eta_1, \Delta'^\eta_1)$, $I_S^{(e)}(\underline{v}^\eta_{tn}, \underline{v}'^\eta_{tn})$であるから$I_S^{(e)}(\Delta^\eta, \Delta'^\eta)$

(7) Δ, Δ'が$\underline{N}\Delta_1$, $\underline{N}\Delta'_1$のとき $\Delta^\eta, \Delta'^\eta$は各々$(\forall K)\Delta^\eta_1$,

$(\forall K)\Delta_1'^{\eta}$ となる．故に明らかに $I_S^{(e)}(\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta})$．

(8) Δ, Δ' が $(\imath \underline{x})\phi(\underline{x})$ $(\imath \underline{x}'\phi'(\underline{x}'))$ のとき

$\Delta^{\eta}: (\imath \underline{x}^{\eta})(\forall K)\{(\exists! \underline{y}^{\eta})\phi(\underline{y})^{\eta} \wedge (\forall \underline{y}^{\eta})[\phi(\underline{y})^{\eta} \supset \underline{x}^{\eta} = \underset{K}{\overset{t}{e}} \underline{y}^{\eta}] \vee \sim(\exists! \underline{x}^{\eta})\phi(\underline{x})^{\eta} \wedge \underline{x}^{\eta} = \underset{K}{\overset{t}{e}} a^*_{tn}\}$

$\Delta'^{\eta}: (\imath \underline{x}'^{\eta})(\forall K)\{(\exists! \underline{y}'^{\eta})\phi'(\underline{y}')^{\eta} \wedge (\forall \underline{y}'^{\eta})[\phi'(\underline{y}')^{\eta} \supset \underline{x}'^{\eta} = \underset{K}{\overset{t}{e}} \underline{y}'^{\eta}] \vee \sim(\exists! \underline{x}'^{\eta})\phi'(\underline{x}')^{\eta} \wedge \underline{x}'^{\eta} = \underset{K}{\overset{t}{e}} a^*_{tn}\}$

（ここで $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x}', \underline{y}'$ は変数）

帰納法の仮定より　$I_S^{(e)}(\underline{x}^{\eta}, \underline{x}'^{\eta})$ であるから $I_S^{(e)}(\Delta_1, \Delta_1')$ を仮定すると $I_S^{(e)}((\imath \underline{x}^{\eta})\Delta_1, (\imath \underline{x}'^{\eta})\Delta_1')$ が成り立つ．

従って $\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta}$ を考えたとき $(\imath \underline{x}^{\eta})$ 以下の式を Δ_1 と考えると同様の事が成り立つ．

以上の事より ML^{ν} において ML^{ν} の wff Δ, Δ' が内包的同型であれば $EL^{\nu+1}$ の wff $\Delta^{\eta}, \Delta'^{\eta}$ が $EL^{\nu+1}$ において外延的同型となることがわかる．

〔証明終〕

さらに翻訳 η に対する逆変換 η' を考えると $\overline{EL}^{\nu+1}$ における外延的同型では η' によって ML^{ν} における内包的同型に翻訳される．$\overline{EL}^{\nu+1}$ は ML^{ν} を翻訳 η によって外延的言語に訳した言語であり $EL^{\nu+1}$ の部分言語であり，η' は $\overline{EL}^{\nu+1}$ から ML^{ν} への翻訳である．$EL^{\nu+1}$ と $\overline{EL}^{\nu+1}$ の本質的相異は領域 $\mathfrak{D}_{\nu+1}$ における変数が $\overline{EL}^{\nu+1}$ の場合は K（カッパ）のみであることである．

またηの逆変換η^{-1}については$\overline{EL}^{\nu+1}$に対して定義可能なのは明らかである.

第4章

（ML^ν, $EL^{\nu+1}$における一階述語計算について）

ML^ν, $EL^{\nu+1}$における一階述語計算体系を考えるとき、翻訳ηに対しML^νの一階述語計算LPC（ML^ν）の定理$\underline{P}$と$EL^{\nu+1}$の一階述語計算LPC（$\overline{EL}^{\nu+1}$）の定理$\underline{P}^\eta$が同値となる.

（証明の詳細については文献〔1〕N 30参照）

（公理）

(A1)　$(\underline{N})\,\underline{P} \supset \underline{P} \wedge \underline{P}$

(A2)　$(\underline{N})(\underline{P} \wedge \underline{q}) \supset \underline{P}$

(A3)　$(\underline{N})(\underline{P} \supset \underline{q}) \supset [\sim(\underline{P} \wedge \underline{q}) \supset \sim(\underline{r} \wedge \underline{q})]$

(A4)　$(\underline{N})(\forall \underline{x})(\underline{P} \supset \underline{q}) \supset [(\forall \underline{x})\,\underline{P} \supset (\forall \underline{x})\,\underline{q}]$

(A5)　$(\underline{N})\,\underline{P}_1 \supset (\forall \underline{x})\,\underline{P}_1$（$\underline{P}_1$で$\underline{x}$は自由でない.）

(A6)　$(\underline{N})(\forall \underline{x})\,\underline{\Phi}(\underline{x}, \underline{y}) \supset \underline{\Phi}(\underline{y}, \underline{y})$

(A7)　$(\underline{N})\,\underline{N}(\underline{P} \supset \underline{q}) \supset (\underline{N}\,\underline{P} \supset \underline{N}\,\underline{q})$

(A8)　$\underline{P}_1 \supset \underline{N}\,\underline{P}_1$（$\underline{P}_1$は modelly closed）

(A9)　$(\underline{N})\,\underline{N}\,\underline{P} \supset \underline{P}$

ここで$(\underline{N})$は全称記号又は様相記号の列を表わしており、その範囲はあとに続く式全体である.

LPC($EL^{\nu+1}$)の公理　：(A1) ～ (A6)

LPC($ML^{\nu+1}$)の公理　：(A1) ～ (A9)

(推論規則は modus ponens.)

第5章

5.1　〔外延的言語の内包的言語への翻訳について〕

ここで今度は$EL^{\nu+1}$のML^{ν}への翻訳を考える．このためには$EL^{\nu+1}$とML^{ν}のセマンティックスを内包的言語(様相言語)で表わす必要がある．この内包的言語としてML^{ν}をとる．つまりML^{ν}のセマンティックスを自分自身で表現することにもなる．

5.2　〔$EL^{\nu+1}$の対象(object)(外延)の絶対概念による表現〕

2.3においては各タイプの対象のクラスを$\underline{\Omega}^{\nu}_{t}$で表現したがここではこれを$ML^{\nu}$で絶対概念(文献〔3〕§17参照)のクラス$\Omega^{\nu+1}_{\underline{t}}$($\underline{t} \in \mathcal{T}^{\nu+1}$)によって表わす．(この絶対概念の存在については証明されている．(詳細については文献〔1〕N56参照))．ML^{ν}の中ではこの絶対概念はML^{ν}の変数によって表わされる．

(a)　$\underline{D}_1, \cdots, \underline{D}_{\nu}$ は各々 $\underline{v}_{(\underline{r})}$ ($r = 1, \cdots, \nu$)によって表わされる．

(b)　$\underline{D}_{\nu+1}$は$\underline{El}$なるタイプ((((1))))の変数によって表わされる．ここで$\underline{El}$は第2章2.2の elementary possible case

のクラスと考えられる．（$\underline{E\ell'}$の正確な定義、概念については文献〔1〕参照のこと.）

上記の(a)(b)により$EL^{\nu+1}$の領域を定義することにより$\Omega^{\nu+1}_{\underline{t}}$は$\Omega^{\nu}_{\underline{t}}$と同様に定義される．

(a) $\Omega^{\nu+1}_{\underline{t}} = \underline{D}_{\underline{t}}$ （$\underline{t} = 1, \cdots, \nu$）

(b) $\Omega^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)}$ は直積$\Omega^{\nu+1}_{\underline{t}_1} \times \cdots, \times \Omega^{\nu+1}_{\underline{t}_n}$の巾集合

(c) $\Omega^{\nu}_{(\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)}$ は直積$\Omega^{\nu+1}_{\underline{t}_1} \times \cdots \times \Omega^{\nu+1}_{\underline{t}_n}$から$\Omega^{\nu}_{\underline{t}_0}$への関数のクラス

(d) $\Omega^{\nu+1}_{\nu+1} = \underline{E\ell'}$

ここで$EL^{\nu+1}$のwffをML^{ν}のwffに翻訳するためにタイプの変換が必要となる．この変換を＊(star)とすると次のようになる．

(a) $\underline{t}^* = \underline{t}$ （$\underline{t} = 1, \cdots, \nu$）

$\underline{t}^* = (((1)))$ （$\underline{t} = \nu+1$）

(b) $\underline{t}^* = (\underline{t}^*_1, \cdots, \underline{t}^*_n)$ （$\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n)$）

(c) $\underline{t}^* = (\underline{t}^*_1, \cdots, \underline{t}^*_n : \underline{t}^*_0)$ （$\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_n : \underline{t}_0)$）

5.3 〔外延の内包への翻訳規則〕

第2章と逆にここでは$EL^{\nu+1}$をML^{ν}で表現する翻訳規則＊が定義できる．

〔Rule ＊〕（$EL^{\nu+1} \rightarrow ML^{\nu}$）（詳細については文献〔1〕N56参照）

(T$_1$*) $\underline{v}_{\underline{t}\underline{n}} \to \underline{v}_{\underline{t}4\underline{n}}$ （$\underline{t}^* = \underline{t}$ のとき）

$\underline{v}_{\underline{t}\underline{n}} \to \underline{v}_{\underline{t}4\underline{n}+2}$ （$\underline{t}^* \neq \underline{t}$ のとき）

(T$_2$*) $\underline{c}_{\underline{t}\underline{n}} \to \underline{c}_{\underline{t}4\underline{n}}$ （$\underline{t}^* = \underline{t}$ のとき）

$\underline{c}_{\underline{t}\underline{n}} \to \underline{c}_{\underline{t}4\underline{n}+2}$ （$\underline{t}^* \neq \underline{t}$ のとき）

(T$_3$*) $\Delta_1 = \Delta_2 \to \underline{N}(\Delta_1^* = \Delta_2)$

(T$_4$*) $\Delta_0(\Delta_1, \cdots, \Delta_{\underline{n}}) \to \Delta_0^*(\Delta_1^*, \cdots, \Delta_{\underline{n}}^*)$

（ここでΔ_0は（$\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}}$）又は（$\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}} : \underline{t}_0$）なるタイプをもつ$EL^{\nu+1}$の wff）

(T$_5$*) $\sim\Delta \to \sim\Delta^*$

(T$_6$*) $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \to \Delta_1^* \wedge \Delta_2^*$

（Δ, Δ_1, Δ_2は matrix）

(T$_7$*) $(\forall \underline{v}_{\underline{t}\underline{n}})\Delta_1 \to (\forall \underline{v}^*_{\underline{t}\underline{n}})(\underline{v}^*_{\underline{t}\underline{n}} \in \underline{v}^*_{(\underline{t})} \supset \Delta_1^*)$

(T$_8$*) $(\exists \underline{v}_{\underline{t}\underline{n}})\Delta_1 \to (\exists \underline{v}^*_{\underline{t}\underline{n}})(\underline{v}^*_{\underline{t}\underline{n}} \in \underline{v}^*_{(\underline{t})} \wedge \Delta_1^*)$

5.4 〔ML^νによるML^νの内包の定義〕

前述したようにここではML^νのセマンティックスをML^ν自身で表現しているので内包をML^νで定義する.

$\underline{I}_{\underline{t}}(\overline{\underline{y}}, \underline{y})$：タイプ$\underline{t}$の$\underline{y}$の内包が$\overline{\underline{y}}$であることを意味する. （$\underline{t} \in T^\nu$）

(a) $\underline{I}_{\underline{t}}(\overline{\underline{y}}, \underline{y}) \overset{D}{=} \overline{\underline{y}} \in \underline{v}^*_{(\underline{t}^\eta)} \wedge (\forall \underline{u})[\underline{N}(1'_{\underline{u}} \supset \overline{\underline{y}}(\underline{u}) = \underline{y})]$

（$\underline{t} = 1, \cdots, \nu$ のとき）

(b) $\underline{I}_{\underline{t}}(\overline{\underline{y}}, \underline{y}) \overset{D}{\equiv} (\forall \overline{\underline{x}}_1, \cdots, \overline{\underline{x}}_{\underline{n}}, \underline{u})\{\underline{N}(\overline{\underline{y}}(\overline{\underline{x}}_1, \cdots, \overline{\underline{x}}_{\underline{n}}, \underline{u})$

$\equiv (\exists \underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_{\underline{n}}) \wedge \Diamond [1'_{\underline{u}} \wedge \underline{y}(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_{\underline{n}}) \bigwedge_{\underline{i}=1}^{n} \underline{I}_{\underline{t}_{\underline{i}}}(\overline{\underline{x}}_{\underline{i}}, \underline{x}_{\underline{i}})]])\}$

($\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}})$ のとき)

(c) $\underline{I}_{\underline{t}}(\overline{\underline{y}}, \underline{y}) \overset{D}{\equiv} (\forall \overline{\underline{x}}_1, \cdots, \overline{\underline{x}}_{\underline{n}})\{\underline{N}(\overline{\underline{y}}(\overline{\underline{x}}_1, \cdots, \overline{\underline{x}}_{\underline{n}}) = (\neg \overline{\underline{x}}_0)$

$(\exists \underline{x}_0, \cdots, \underline{x}_{\underline{n}}) \wedge [\underline{N}(\underline{x}_0 = \underline{y}(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_{\underline{n}}) \bigwedge_{\underline{i}=1}^{n} \underline{I}_{\underline{t}_{\underline{i}}}(\overline{\underline{x}}_{\underline{i}}, \underline{x}_{\underline{i}})]$

($\underline{t} = (\underline{t}_1, \cdots, \underline{t}_{\underline{n}} : \underline{t}_0)$ のとき)

（ここで $1'_{\underline{u}}$ は "possible case γ が現実に起きる" ことを意味し、$\underline{u}$ は possible case γ を表わす変数である．詳細は文献〔1〕N59参照）

この $\underline{I}_{\underline{t}}(\overline{\underline{y}}, \underline{y})$ の定義より $\overline{\underline{y}}$ は $\underline{y}$ の L－確定的内包（文献〔2〕§22参照）であり外延（対象）でもある．またこの定義をもとに ML^{ν} をメタ言語として内包的同型を定義することもできる．しかしこのとき翻訳規則 $\eta, *$ を考察し、ML^{ν} の wff Δ について $\eta, *$ を順に適用した ML^{ν} の wff $\Delta^{\eta *}$ を考えると Δ と $\Delta^{\eta *}$ は内包的同型ではない．

（これは Rule η， Rule $*$ より明らか）．

〔参考文献〕

〔1〕 Aldo Bressan : General Interpreted Modal Calculus, Yale University Press. 1972.

〔2〕 R. Carnap : Meaning necessity, Chicago University Press. 1956.
（邦訳，永井成男他訳：「意味と必然性」，紀伊国屋書店. 1974）

〔3〕 R. Carnap : Introduction to Semantics, Harverd University Press. 1942.
（邦訳，遠藤弘訳：「意味論序説」，紀伊国屋書店 1975）