

S^3 -判定のアルゴリズム

東工大 情報科学科 落合豊行

第一章 Volodin のアルゴリズム (A) について.

この章において我々は [2] の紹介をする。[2] において主張されていることは次のことにある。

Assertion “任意に与えられた Heegaard 分解 (a net) が S^3 を与えるための必要十分条件は、アルゴリズム (A) の Input として、その Heegaard 分解 (a net) を投入したとき、Output として Standard な S^3 の Heegaard 分解 (a net) が得られることである”

<定義 1> 三次元閉多様体 M^3 の Heegaard 分解 $M^3 = H_1(n) \cup_{\alpha_n} H_2(n)$ とは、

(1) $\alpha_n: V_n \rightarrow V_n$ (V_n は genus n のリーマン面) を V_n から V_n の上への微分同相とする。

(2) $H_1(n), H_2(n)$ を三次元ユークリッド空間 R^3 に標準的に embed される genus n の Solid torus の二つの copy とす

る。 $\partial H_1(n) = \partial H_2(n) = V_n$

(3) $M = H_1(n) \cup_{\partial n} H_2(n)$ は $H_1(n)$ と $H_2(n)$ の境界を微分同相 α_n で張り合わせた空間とする。

次に前に定義された Heegaard 分解に対応して morse function を定義し、Heegaard 分解の meridian 系を定める。我々はまず $H_1(n), H_2(n)$ の上に morse function $f_1(n), f_2(n)$ を定める。

(1) $f_1(n)$ は n 個の index 1 の critical point と、1 個の index 0 の critical point をもつ。

(2) $f_2(n)$ は n 個の index 2 の critical point と、1 個の index 3 の critical point をもつ。

(3) $f_1(n)|_{\partial H_1(n)} = \text{const} = f_2(n)|_{\partial H_2(n)}$

$H_1(n)$ と $H_2(n)$ は微分同相 α_n で張り合わされているので、

$f_1(n), f_2(n)$ より (3) を利用して、 M^3 の morse function

$f(n)$ を定義できる。我々はここで、 $M^3 = H_1(n) \cup_{\alpha_n} H_2(n)$ から

index 0 と index 3 の critical point を、それらを含む小さい

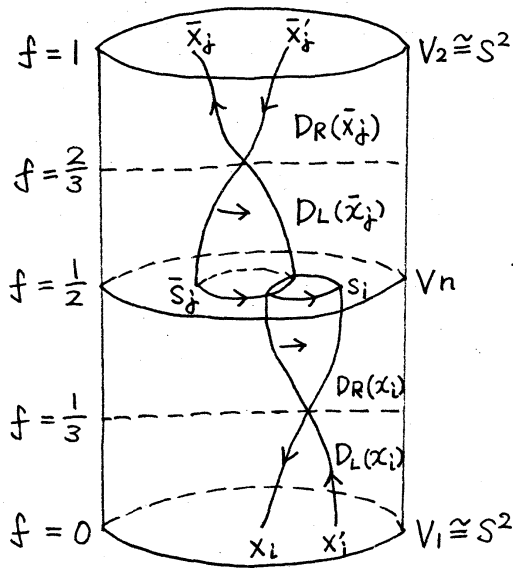
3-cell を除くことにより取り除く。そうすることによ

り、 S^2 の cobordism (N, V_1, V_2) ($V_i \cong S^2$ $i = 1, 2$) と

そこにおける morse function f で、 $2n$ 個の index 1 と index 2

critical points を持つものが作れる。

今、morse function f の index 1 の critical points を x_1, \dots, x_n



index 2 の critical points $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ とする。

$D_L(x_i)$; x_i の left-hand disk

* $D_L(\bar{x}_j)$; \bar{x}_j の left-hand disk

* $D_R(x_i)$; x_i の right-hand disk

$D_R(\bar{x}_j)$; \bar{x}_j の right-hand disk

$S_R(x_i) = S_i$; x_i の right-hand disk の境界.

$S_L(\bar{x}_j) = \bar{S}_j$; \bar{x}_j の left-hand disk の境界.

$S_L(x_i) = X_i \cup X'_i$; x_i の left-hand sphere.

$S_R(\bar{x}_j) = \bar{X}_j \cup \bar{X}'_j$; \bar{x}_j の right-hand sphere.

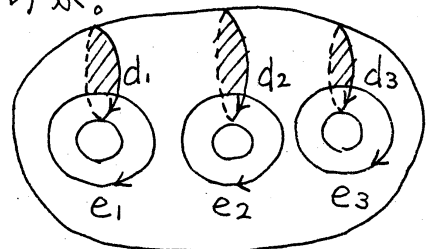
* の disk の集合を Heegaard 分解の meridian 系と呼ぶ。

我々は Morse function f により与えられる V_n の上の図形 S_i, \bar{S}_j を Heegaard 分解の net $C(f)$ と呼ぶ。net $C(f)$ は全て oriented であるとする。 M^3 は orientable であるので、この orientation を与えることは可能である。この orientation を持った net のことを oriented net と呼ぶ。

<定義 2> $D_R(x_i) = d_i$

$\partial D_L(\bar{x}_j) = \bar{S}_j = e_j$ とし右図を

Standard net と呼ぶ。



Standard net は S^3 (三次元球面) を与える。

<定義3> 三次元球面を与える net を spherical と呼ぶ。

次に1つの net (β) が V_n に与えられているものとする。
そのとき (β) は V_n をいくつかの domain U_β の集合に分ける。

<定義4> domain $U_i \in U_\beta$ は distinguished であるとは、

(1) U_i の境界上に $\{S_i, \bar{S}_i\}$ の中の一つの circle に含まれる二つの辺 a_1, a_2 があり、しかも a_1, a_2 の方向が U_i の周の方向と一致する (a_1, a_2 のことを distinguished edge と呼ぶ)

<定義5> distinguished domain U_i において a_1 の内点と a_2 の内点を結ぶ線分を wave τ と呼ぶ。

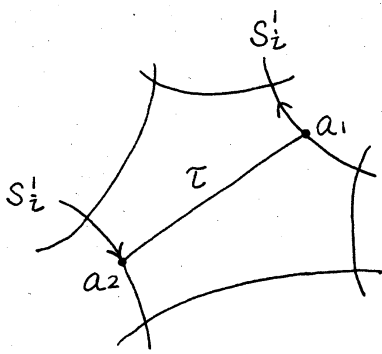
<定義6> “アルゴリズム (A)”

(1) entrance; oriented net (β_1) がアルゴリズム (A) の Input として投入される。

(2) Search for a wave; net (β_1) において distinguished domain U_i と edge a_1, a_2 を探す。今、どんな distinguished domain も存在しないとき、アルゴリズム (A) の output は net (β_1) であり、Input, Output 共に同じ net である。

次に U_i があれば、 a_1 と a_2 の間に wave τ をとる。

(3) net の reduction; a_1, a_2 は S_i^{\pm} 中に含まれているものとする。そのとき、 S_i^{\pm} は τ の両端点によって二つの部分、



\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 に分かれる。そのとき、 \tilde{S}_2 を τ におきかえることにより、 S_i^1 にかわる新しい circle $S_i^2 = \tilde{S}_1 \cup \tau$ ができる。(S_i^1 が index 1 なら $H_1(n)$ で、index 2 なら $H_2(n)$ にそれぞれ 2-disk がはれる

ことが示される) 従って S_i^1 に残余の circle $\{S_k, \bar{S}_j\} - S_i^1$ を加えて新しい net (β_2) を作れる。この新しい net (β_2) が真の net であり、しかも net (β_1) が与える多様体と同相な三次元多様体を与えることが示される。(Theorem 4.3.1 in [2])

(4) Passing to the next stage ; net (β_2) を (β_1) とし、

(1) にもどる。

この論文の始めにおいて述べられた主張、その十分性は Theorem 4.3.1 で証明されるが、その必要性については、まだ証明に成功していない。($n=2$ については必要性が最近、本間教授によって証明された) 但し [2] の著者達は $n=2$ から $n=32$ までの 10^6 個の spherical nets についてその必要性が成立つことを確かめている。この論文 [2] の後半においては、自由群 F_n の word から作られる whitehead graph と $P(n) \supset RP_1(n) \supset GL(n)$ (参照 [2] page 95) との関係が論ぜられているが、その解析にはまだ成功していない。また始めの Assertion と同値な Conjecture を whitehead graph の言語

を使つて与えている。

第二章 2-bridge knot の Dehn construction について。

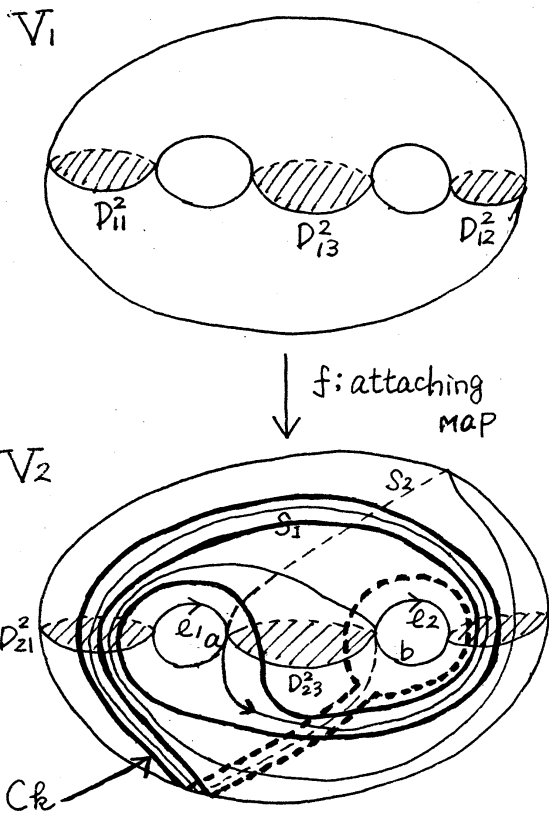
我々はこの章において、2-bridge knot から non-trivial Dehn construction によつて作られる manifold M^3 が三次元球面でないことを示す。($\pi_1(M^3) \neq 0$ を示すのが Property P の問題であるが 2-bridge knot に対しはまだ解かれていない。参照 [1])

実際に証明することは M^3 が genus 2 の irreducible な Heegaard 分解を持つことを示すだけである。なぜなら最近本間教授によつて次のことが示された。“ S^3 の任意の genus 2 の Heegaard 分解は reducible である。”

今、 S^3 の K を三次元球面に含まれる、2-bridge knot, $N(K, S^3)$ を S^3 における K の regular neighborhood とする。そのとき $S^3 - \dot{N}(K, S^3)$ と $N(K, S^3)$ との attaching を適当に変えることによつて三次元開多様体 M^3 を作ることができる。このような construction のことを Dehn construction という。特にその attaching がもとのと違うとき、non-trivial Dehn construction という。

<補題 I> 2-bridge knot から Dehn construction によつて作られる三次元開多様体 M^3 は genus 2 の Heegaard 分解をもつ。
証明、 [3] を参照。

補題1によつて M^3 に induce される Heegaard 分解 (M^3, V_1, V_2, F) は、その meridian の一つの attaching について次のような性質をもっている。今、 $D_{11}^2, D_{12}^2 \in V_1$ の meridian、 $D_{21}^2, D_{22}^2 \in V_2$ の meridian、 l_1, l_2 を D_{21}^2, D_{22}^2 とそれぞれ一点で交わる V_2 の longitude とする。始めに与えられた S^3 の k 2-bridge knot は



(図-1)

は V_2 上にあつて、 l_1, l_2 とそれぞれ一点で交わる。この交わる点をそれぞれ a, b とする。又 a から b で終る C_k の弧を S_1, S_2 とする。このとき $S_1 \cup S_2 = C_k$, $S_1 \cap S_2 = a \cup b$ である。このとき、 $S_1 l_1 S_1^{-1} l_1^{-1}$ に沿つて V_2 上に simple closed curve がとれる。この curve のことを knotting curve C_k と呼ぶ (knotting curve は 2-bridge knot k の

knot 群の l_1, l_2 を生成元とする relation を与えている。しかも、 C_k を l_1, l_2 で表現したとき、 l_1, l_2 共に 2 乗の項は表われないように knot k を V_2 上にとれる。)

補題1の証明において明らか様様に、 M^3 の自然な genus 2

の Heegaard 分解は全てその meridian D_i^2 を C_k に移している。

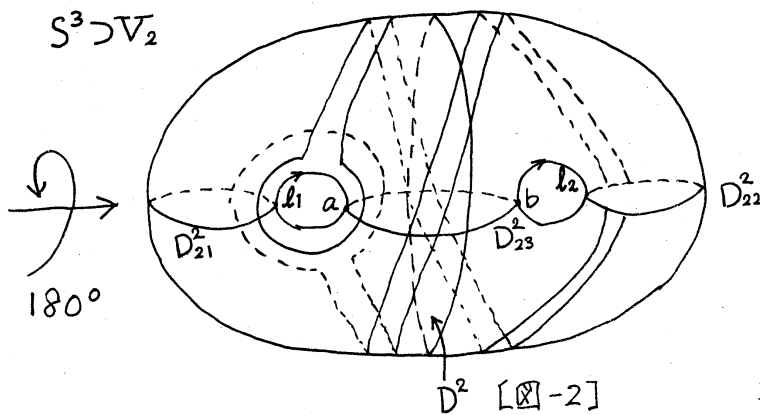
〈補題2〉 ∂V_2 上において C_k は l_1, l_2 と共に ∂V_2 を二つの穴をもった fake 2-disk と同相な二つの部分 A_1, A_2 に分割する。

証明. $\partial V_2 - (C_k \cup l_1 \cup l_2) = A_1' \cup A_2'$ とし、 $\bar{A}_1' = A_1, \bar{A}_2' = A_2$ とする。今、 $A_1' \cap S_1$ とすると A_1 が二つの穴をもった fake 2-disk と同相であることは、 C_k の作り方によって明白。すなわち、 C_k は l_1 と l_2 を S_1 に沿った band $(I \times I)$ で結んだときできる領域 A_1' の境界である。従って A_2 は $\partial A_2 = \partial A_1$ より ∂A_2 は三つの S_1 よりなる。ところが $A_1 \cup A_2 = \partial V_2 = \text{genus } 2 \text{ orientable surface}$ であるので A_2 も又、二つの穴のあいた fake 2-disk である。」

次に D_{21}^2, D_{22}^2 を図-1におけるような meridian-disk とする。

〈補題3〉 C_k 上で a, b より出発したとき $D_{21}^2, D_{22}^2, D_{23}^2$ の内のどれかに最初に到達するとすれば、 D_{21}^2, D_{22}^2 の内のどちらかであって D_{23}^2 ではない。

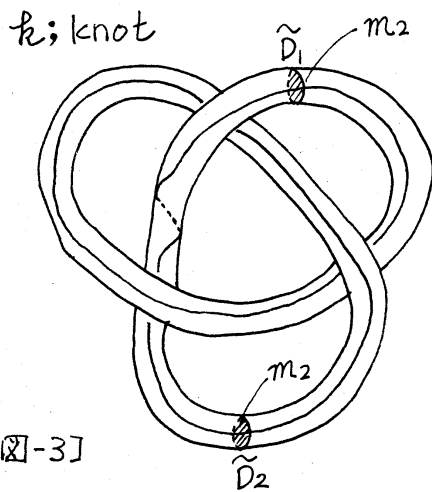
証明. curve C_k の ∂V_2 上での $D_{21}^2 \cup D_{22}^2 \cup D_{23}^2$ に関する対称性によって、 C_k に沿って a に至るとき、 D_{23}^2 を a の直前に横切るならば、 a から C_k に沿って進んだとき、始めて横切る meridian disk は D_{23}^2 である。(この対称性は l_1 を l_1 に、 l_2 を l_2 に移す)



従って、 V_2 の proper disk D^2 で V_2 を二つに分ける disk に沿って片方を 180° と回転することによって、補題の成立するように

できる。この回転によって b に関しても自然に補題は成立してしまう。」

次に M^3 の補題 1 によって induce される Heegaard 分解の meridian 系と knot k の S^3 における regular neighborhood $N(k, S^3)$ の meridian との関係 を述べる。すなわち $S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3)$ と



$V_2 \cup_{c \in k} D_{11}^2 \times I$ が対応し、 $N(k, S^3)$ と $V_1 - (D_{11}^2 \times I)^\circ$ が対応する。

$N(k, S^3)$ の二つの disjoint meridian を \tilde{D}_1, \tilde{D}_2 とする。

又、 $m_1, m_2 \in \partial(S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3))$ 上の simple closed curve で $\partial \tilde{D}_1, \partial \tilde{D}_2$ に対応するものとする。^{*1} このとき、

対応 $N(k, S^3) \leftrightarrow V_1 - (D_{11}^2 \times I)^\circ$ において \tilde{D}_1 に \tilde{D}_2^2 , \tilde{D}_2 に \tilde{D}_1^2 が対応する。 $\tilde{D}_i \in S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3)$ の境界の longitudinal 方向に n 回まわして、attach してできる mfd $\in M^3$ とすると、^{*2} $\partial \tilde{D}_i$ は m_1, m_2

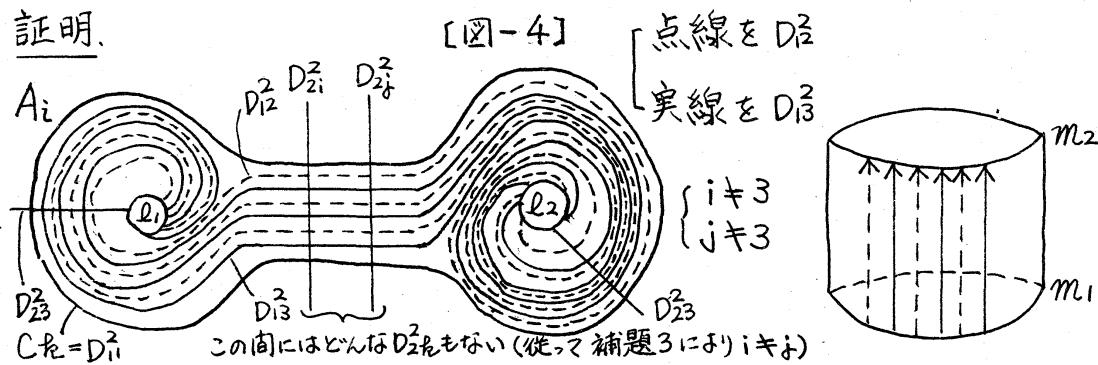
をそれぞれ同一方向から n 回横切ることになる。従って M^3 に補題 1 によつて induce される Heegaard 分解において、 D_{12}^2 は l_1, l_2 をそれぞれ同一方向から n 回横切る。同様に D_{13}^2 も又、 l_1, l_2 を同一方向から横切ることになる。(D_{12}^2 と同様に n 回)

<補題 4> M^3 に induce される Heegaard 分解は V_2 -irreducible である。(すなわち F 上に $\partial D_{11}^2, \partial D_{12}^2, \partial D_{13}^2, \partial D_{21}^2, \partial D_{22}^2, \partial D_{23}^2$ によつて生成される領域のどれもがその周上に、 ∂D_{21}^2 (又は ∂D_{22}^2 又は ∂D_{23}^2) の部分によつて占められた二つの弧を持たない)

証明. 補題 2, 3 により明白。

<補題 5> V_1 -irreducible (上の定義において $\partial D_{21}^2, \partial D_{22}^2, \partial D_{23}^2$ を $\partial D_{11}^2, \partial D_{12}^2, \partial D_{13}^2$ に替えよ) である。

証明.

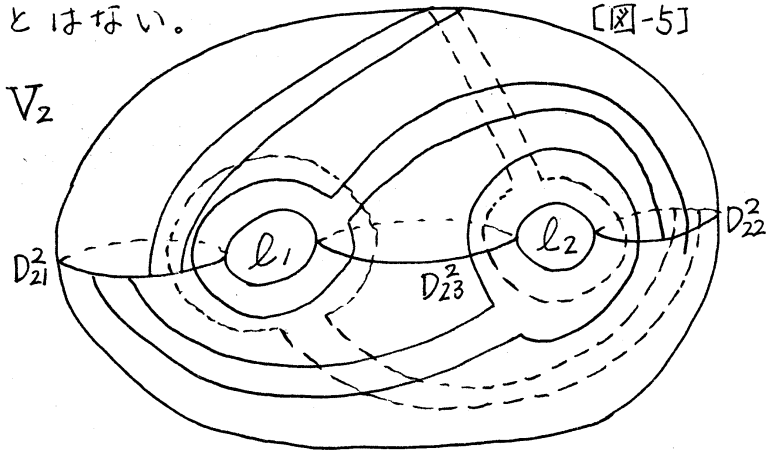


A_1, A_2 の band の部分と $D_{21}^2, D_{22}^2, D_{23}^2$ とによつて ∂V_2 上に生成される領域の irreducibility に関して、対応 $\tilde{D}_1 \leftrightarrow D_{12}^2, \tilde{D}_2 \leftrightarrow D_{13}^2$

$l_1 \leftrightarrow m_1, l_2 \leftrightarrow m_2$ により明白である。従つて問題となるのは

図-5 の領域における V_1 -irreducibility のみである。 \tilde{D}_1 と \tilde{D}_2 が m_1, m_2 を交互に同一方向から横切るのぞ、 D_{12}^2, D_{13}^2 も又 l_1, l_2

を交互に同一方向から横切る。従って V_1 -reducible と呼ぶこと
 とはない。 [図-5]



* 1 ; ここでの対応とは始めの trivial な対応を意味する。

* 2 ; この attaching には当然 $m_1(m_2)$ 方向に何回か回わすこと
 も考慮される。

注) 詳細については、他稿に譲る。

参考文献

1. R. RILEY 'Knots with the parabolic Property P', Quart.
 J. Math (2) 25 (1974) 273-83
2. A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko
 'The problem of discriminating Algorithmically the standard
 three-dimensional sphere', Russian Math. Surveys 29:5
 (1974), 71-172
3. 落合豊行 'genus 2 の homology 3-sphere', 京都大学
 数理解析研究所. 講究録 (1976. 1月)