数理解析研究所講究録
第 304 巻 1977 年 1-10

Some applications of non-standard methods

P. Roquette (Heidelberg)

現在まで non-standard method は known theorem の re-proof に威力を発揮してきたが，これは non-standard method の威力の test であると考えられる。数論関係の known theorem の re-proof の例として以下の3例が特に重要である：

① Siegel - Mahler theorem,

② Hilbert irreducibility theory,

③ Mordell - Weil theorem,

① の reproof は Roquette と A. Robinson によって与えられた（J. of Number Theory, 1975）[1].

② は Gilmore - Robinson による（1956）また Springer Lecture notes, Robinson Memorial volume (1976)[2] 参照。

③ の re-proof は Kani の学位論文（未公表）である。

まず ① の non-standard equivalent の描出を試みよう。

$f(x, y)$ を $\mathbb{Z}$ 上の既約多項式とし，不定方程式

$$f(x, y) = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

の integer solutions, i.e., $x, y \in \mathbb{Z} \wedge f(x, y) = 0$，を捜す。

もしも genus g が positive であれば有限個の整数解しか存在しない。これが Siegel の定理である。

Mahler は $g = 1$ の場合に次のように拡張した (1934)。

$S = \{p_1, \cdots, p_r\}$ を prime number の finite set とする。また $\mathbb{Z}^{(S)} = \{m/n \mid p|n \Rightarrow p \in S\}$ とする。しからば(*)をみたす S-integer x, y (i.e. $x \in \mathbb{Z}^{(S)}, y \in \mathbb{Z}^{(S)}$) は有限個しか存在しない。

Siegel の定理は整数格子点は genus positive の curve の上に有限個しか存在しないことを主張するが，Mahler の定理は格子の目をもっと細かくしても同じことが成立することを主張する。Mahler の定理は $g > 1$ の場合にも成立する (S. Lang, Le Veque)。最も一般的な Siegel-Mahler の定理の表現は次のようである。

K を finite algebraic number field, $\mathfrak{o}$ を ring of all integers in K, S を finite set of prime divisors in K とする。$f(x, y)$ を $\mathfrak{o}$ 上の irreducible polynomial とする。

$$\mathfrak{o}^{(S)} \overset{\text{put}}{=} \{\alpha/\beta \mid \alpha, \beta \in \mathfrak{o},\ かつ\ \mathfrak{p}|(\beta) \Rightarrow \mathfrak{p} \in S\}$$

すると $f(x, y) = 0$ の solutions x, y で $x, y \in \mathfrak{o}^{(S)}$ なる

ものは $g>0$ ならば有限個である。

S が empty で $K=\mathbb{Q}$ の場合が先にのべた Siegel の定理である。

$^*K$ を K の enlargement とする。すると $K\subset {}^*K$ で，K は alg. closed in $^*K$ である。更に精しくいうと，$^*K$ は K の regular extension である。

もしも $(x,y)\in\mathcal{O}^{(S)}\times\mathcal{O}^{(S)}$ with $f(x,y)=0$ が無数にあるとすれば，enlargement の性質から

$$\exists (x,y)\in {}^*\mathcal{O}^{(S)}\times{}^*\mathcal{O}^{(S)}\ (\text{non-standard})\ ;\ f(x,y)=0$$

がいえる。この x,y に対して $F=K(x,y)$ とおけば，F/K は function field of the curve $f=0$ となる。S は finite set であるからして x,y の分母はやはり S の素点のみからなる，即ち only standard primes in its denominator である。Siegel-Mahler の non-standard equivalent は

<u>Theorem</u> $K\subset F\subset {}^*K$, F/K : ft field of genus $g>0$ とするとき，どの $x\in F-K$ も少くも1つの non-standard prime を分母にもつ．

と表わすことができる。

②については東大の連続講義で述べたから，③について述べることにしよう．（実際には Mordell-Weil の定理の non-standard equivalent を述べる所までは行かなかった。）[3)]

F/K を finite alg. number field K 上の f.t. field とする。$D(F/K)$ で divisor group を，$C(F/K)$ で divisor class group を，$C_0(F/K)$ で divisor class group of deg. 0 を表わすことにする。$C_0(F/K)$ はまた $J(F/K)$ でも表わされる。Mordell-Weil の定理は

$J(F/K)$ is finitely generated.

と表現される。これを non-standard に表現するにはどうすればよいか？そのため順序として，いくつか準備を行うことにする。

Chapter 1 Finitely generated abelian groups

A を abelian group とする。enlargement $^*A$ は $^*\mathbb{Z}$-module である。

Prop. 1 A : finitely generated

$\Longleftrightarrow$ $^*A = {}^*\mathbb{Z}A$ (i.e. $^*\mathbb{Z}$-module generated by A)

proof) $\Rightarrow$)

$A = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} a_i$ とする。non-standard model の general principle によって $^*A = \sum_{i=1}^{r} {}^*\mathbb{Z} a_i$

$\Leftarrow$) $^*A$ はとくに starfinitely generated である。general principle によって A は finitely generated である。

Prop. 2 $\mathbb{N} \ni n > 1$ とする。A/nA is finite.

$\Longleftrightarrow$ $^*A/A$ is divisible by n.

proof) ⇒) $a_1, \cdots, a_r \in A$ を representatives mod nA とする：　$A = \bigcup_{i=1}^{r} (a_i + nA)$

$$\therefore {}^*A = \bigcup_{i=1}^{r} (a_i + n^*A) = A + n^*A$$

⇐) Assume A/nA infinite. non-st. の general principle によって $\exists\, x + n^*A$; non-standard in $^*A$

$$\therefore {}^*A \supsetneqq A + n^*A \qquad \text{Q.E.D.}$$

$\mathbb{R}_{fin} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}\ (|x| < y)\}$ とし，$^*\mathbb{R}/\mathbb{R}_{fin}$ を $\dot{\mathbb{R}}$ と書く。$\dot{\mathbb{R}}$ は ordered additive group である。

<u>Prop. 3</u>　A/nA が finite for some $n > 1$ とする。

A ; finitely g.t.d. (=generated)

⇔ $\exists$ internal map $\varphi : {}^*A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ satisfying

① $\dot{\varphi} : {}^*A \longrightarrow \dot{\mathbb{R}}$ is a positive definite form,

② $\ker \dot{\varphi} = A$

ここに $\dot{\varphi}$ は φ から induce される canonical map である。

proof) ⇐) $V = \{a_1, \cdots, a_r\}$ を representatives of A/nA とする。$X \in A$ に対し

$$X = X_0 + r_1 n \quad , X_0 \in V \, , r_1 \in A$$

とかける。induction によって

$$X = X_0 + X_1 n + \cdots + X_{k-1} n^{k-1} + r_k n^k ,$$

$$X_j \in V \, , \ r_k \in A$$

の形にあらわされる。故に $\forall k \in {}^*\mathbb{N}$, $\forall x \in {}^*A$ に対して

$$x = x_0 + x_1 n + \cdots + x_{k-1} n^{k-1} + r_k n^k \ , \quad x_j \in V, \ r_k \in A$$

とあらわされる。

$$\dot{\varphi}(r_k) = 0 \ , \quad \text{if } k \text{ large}$$

を証明しよう。もし，これが示されたら，②から $r_k \in A$．そこで上の x の式を

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + r_k n^k \ , \quad \lambda_i \in {}^*\mathbb{Z}$$

の形に書き直せば

$$x \in \sum_{j=1}^{r} {}^*\mathbb{Z} a_j + {}^*\mathbb{Z} A \subset {}^*\mathbb{Z} A \quad \therefore \ {}^*A = {}^*\mathbb{Z} A$$ となり，

Prop.1 によって A の fin. gtd がわかる。

<u>notation</u>: $\dot{\varphi}(x) = 0$ を $\varphi(x) \doteq 0$ と書く。即ち $\equiv 0$ (mod $\mathbb{R}_{fin}$) の意である。

Put $\quad f(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y))$.

$f(x,y)$ は symmetric, bilinear mod $\mathbb{R}_{fin}$, positive mod $\mathbb{R}_{fin}$ である，即ち $\dot{f}$ は bilinear で $f(x,x) \doteq \varphi(x)$，$\varphi(x) \dot{\geqq} 0$ がなりたつ。これは $\dot{\varphi}$ のみたす①という性質の定義から解る。

次の(1)，(2)がなりたつ：

(1) $\quad \varphi(x_1 + \cdots + x_r) \dot{\leqq} 2^{r+1}(\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_r)) \quad (r \in \mathbb{N})$

(2) $\quad \dfrac{\varphi(nx)}{n^2} \doteq \varphi(x) \quad$ for $\forall n \in {}^*\mathbb{N}$

(1) は簡単。実際，$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) \doteq 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$ より $\varphi(x+y) \dot{\leq} 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$. Induction によって(1)をえる。

<u>(2) の証明</u>

$$f(2x,y)-2f(x,y)\doteq 0 \quad \text{より} \quad \exists c\in\mathbb{R};$$

$$|f(2x,y)-2f(x,y)|\le c$$

$$\therefore \quad |f(nx,y)-nf(x,y)|\le (n-1)c \quad \text{by induction}$$

これから $\forall n\in{}^*\mathbb{N}$ に対して

$$|f(nx,ny)-n^2f(x,y)|\le (n^2-1)c$$

$$\therefore \quad \left|\frac{f(nx,ny)}{n^2}-f(x,y)\right|\le \left(1-\frac{1}{n^2}\right)c<c$$

これは $\dfrac{f(nx,ny)}{n^2}\doteq f(x,y)$ を意味する。

さて，目標の $\dot{\varphi}(r_k)=0$ if k large を示そう．$x=y$ として

$$0\,\dot{\le}\,\varphi(r_k)\doteq\frac{\varphi(n^k r_k)}{n^{2k}}\,\dot{\le}\,\frac{2\varphi(x)}{n^{2k}}+\frac{2\varphi(\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ra_r)}{n^{2k}}$$

右辺第一項は <1 if k large である。

第2項 $\leqq 2^{r-1}\sum_j \dfrac{\varphi(\lambda_j a_j)}{n^{2k}}$ by (1)

$$\le 2^{r-1}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\lambda_j}{n^k}\right)^2\frac{\varphi(\lambda_j a_j)}{\lambda_j^2}$$

λ_j の定義から $0\le\left(\dfrac{\lambda_j}{n^k}\right)^2<1$，これと(2)によって結局

$$0\,\dot{\le}\,\varphi(r_k)\,\dot{\le}\,1+2^{r-1}\sum_j\varphi(a_j).$$

しかも $\varphi(A)\doteq 0$ によって $\varphi(r_k)\doteq 0$.

<u>Prop. 4</u> 仮定は Prop. 3 と同じとする。

$\exists\psi: A\longrightarrow\mathbb{R}$ (unique positive definite quadr. form)

s.t. $\psi-\varphi$ bdd on A

証明 $\dfrac{f(\omega x, \omega y)}{\omega^2} = g(x,y)$ とおく．但し $\omega \in {}^*N - N$

$\psi(x) = {}^\circ g(x,x)$ と定義する。ここに ${}^\circ g$ は g の standard part をあらわす。ψ が positive definite q.d. form であることは直ちにしられる。 $g(x,x) - \varphi(x)$ $(x \in {}^*A)$ は internal で $g(x,x) \doteqdot f(x,x) \doteqdot \varphi(x)$ だから finite value である。これは $g(x,x) - \varphi(x)$ が A 上 bdd であることを意味する。実際，$\theta(x) = g(x,x) - \varphi(x)$ が bdd on A でないとすれば，$\forall c \in R\ \exists a \in A\ ;\ c < \theta(a)$. enlargement の general principle によって

$$\forall c \in {}^*R\ \exists a \in {}^*A\ ;\ c < \theta(a)$$

これは $\theta({}^*A) \subset R_{fin}$ に反する。uniqueness は $\psi' - \psi$ が bdd. qdr. form $\neq 0$ であれば矛盾（bdd でない）によってえられる。

もしも φ が standard であれば $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$ である。

Properties of ψ：

(i) ψ は positive definite quadr. form on A である，

(ii) ψ は discrete on A，即ち，$\forall c (>0) \in R\ \exists$ only finitely many $x \in A\ ;\ \psi(x) \leq c$ がなりたつ．

Chapter II Non-standard Formulation

K を alg. number field of finite degree とする。
F を K 上の ft. field とする。

$C_0(F/K) = J(F/K)$ を A とおく。

<u>Theorem</u> $^*A = {}^*C_0(F/K)$ は canonically isomorphic with $C_0(F^*K/{}^*K) = J(F^*K/{}^*K)$ である。

この定理は <u>Riemann-Roch Theorem</u> の non-standard equivalent である。

<u>Theorem</u> For any $X, Y \in D(FL/L)$ (relatively prime) $\exists$ $X \cdot Y \in D(L/K)$ s.t.

(1) bilinear,

(2) symmetric,

(3) $X \cdot Y = 0$ if X, Y algebraic over K

(4) if $\deg X = 0$, then $Y \sim Z$ implies $X \cdot Y \sim X \cdot Z$

(L は K の任意の拡大とする.)

<u>仮定</u>: degree ft $\delta : D(L/K) \longrightarrow \Gamma$ (ordered group) が $X \leq Y \Rightarrow \delta(X) \leq \delta(Y)$, $X \sim 0 \Rightarrow \delta(X)$ をみたすとする。

<u>Theorem</u> (Castelnuovo-Severi) $\delta(X, X) \leqq 0$ for $X \in C_0(FL/L)$

$^*J(F/K) = {}^*A$ 上で positive definite quadratic form φ

が存在する。(Prop. 3)

$J(F/K) = A$ 上で standard quadratic form φ (positive definite, discrete) が存在する。(Prop 4)

(足立恒雄記)

注 1) あとがきの文献 [6]

2) 〃 [7]

3) この話のつづきは，数学会年会総合講演でなされた．("数学" 参照)．