数理解析研究所講究録
第304巻 1977年 24-38

超準函数解析のいくつかの問題について

東大 教養　斎藤正彦

導入部

A.　A. Robinson [4] は，有界実数列全部の空間上の任意の連続線型形式が*有限作用素（第一部定義1.2参照）として表わされることを示した。この形の定理は超準解析では非常に有効であり，これに類似したいろいろな定理が個別的に定式化され，証明されている。

この講演の目的は，上記の結果をきわめて一般的な枠組で定式化し，簡単に証明すること，およびそれを個々の問題に適用することである。特につぎの諸結果が一般化されて再現される：

1）上記の Robinson の結果。

2）ノルム線型空間 V の再双対空間の元を *V の元で表わすこと（Luxemburg [3]）。

3）シュヴァルツ超函数を（無限小を除いて）*多項式で表わすこと（Robinson [5]）。

4）測度空間上の積分を＊有限作用素で表わすこと（Bernstein［1］）。

5）無原子確率測度を＊有限集合上の＊平均で表わすこと（Henson［2］）。

この講演では最後の定理にだけ証明を付け，他は定義と定理だけを述べる。それについては［6］または［7］を見ていただきたい。ただし，［6］は本稿の結果よりやや弱い形になっている。

主題三つあり，函数空間からの線型写像，正値線型形式および無原子測度である。どれも共通の方法によっているが，論理的には独立である。

B.　超準解析（non-standard analysis）の基礎は既知と仮定するが，本稿で必要な最小限のことを要約しておく。

まず本稿で扱うあらゆる対象を含む宇宙 U を考える。宇宙 U とはつぎの四条件をみたす空でない集合である：

1）　$y \in U,\ x \in y \Rightarrow x \in U$.

2）　$x,\ y \in U \Rightarrow \{x, y\} \in U$.

3）　$x \in U \Rightarrow \bigcup x = \bigcup_{y \in x} y \in U$

4）　$x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$　（$\mathcal{P}(x)$ は x の冪集合）.

選択公理は仮定する。また，関係，函数，順序対等はすべて集合である。

Uの元を定項とする論理式の全体を$\mathcal{L}$とする。論理式ϕがn個しか自由変項を含まないとき，ϕをn変項論理式と言い，$\phi(x_1, \cdots, x_n)$と書く。0変項論理式を文と言う。束縛変項の変域をUと考えて，任意の文ϕはUで解釈することができ，真または偽の定まった命題を表わす。

$\phi(x, y)$を二変項論理式とする。Uの元aで，あるUの元bに対して$\phi(a, b)$が真になるものの全体をϕの左域と言い，$\mathcal{D}(\phi)$と書く。$\mathcal{D}(\phi)$は必ずしもUに属さない。

定義　$\mathcal{D}(\phi)$の任意有限個の元$a_1, \cdots, a_n$に対してUの元bが存在し，$\phi(a_i, b)$ $(1 \leq i \leq n)$がすべて真となるとき，ϕは有限共起的（concurrent）であると言う。

もう一つの集合${}^*U$およびUから${}^*U$への単射$*$を考える。$\mathcal{L}$の文ϕに対し，そこに現われる定項（Uの元）をすべて$*$による像と考えることにより，ϕは${}^*U$で解釈され，真偽の定まった命題を表わす。ただし，束縛変項の変域は${}^*U$とする。${}^*U$の元を定項とする論理式の全体を${}^*\mathcal{L}$と書く。$\mathcal{L} \subset {}^*\mathcal{L}$とみなす。${}^*\mathcal{L}$の文は${}^*U$で解釈できる。

定義　つぎの二条件がみたされるとき，$^*\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}$ の広大化（enlargement）と言う：

1）$\mathcal{L}$ の任意の文 ϕ に対し，ϕ が $\mathcal{U}$ で真であることと $^*\mathcal{U}$ で真であることとは同値である（移行の原理）．

2）$\mathcal{L}$ の任意の有限共起的な二変項論理式 $\phi(x, y)$ に対し，$^*\mathcal{U}$ の元 β が存在し，$\mathcal{D}(\phi)$ の任意の元 a に対して $^*\mathcal{L}$ の文 $\phi(a, \beta)$ が $^*\mathcal{U}$ で真となる（共起性の原理）．

本稿を通じ，$\mathcal{U}$ の広大化（存在する）$^*\mathcal{U}$ を一つ固定して考える．$\mathcal{U}$ の諸概念はすべて $^*\mathcal{U}$ に移される．対応する概念には前に $*$ を付けるが，混乱の恐れがなければ省略する．

記号　1）X を位相空間，a を X の点とする．a の近傍系を $\mathcal{V}(a)$ とするとき，

$$\mathrm{Mon}(a) = \bigcap \{ {}^*B \,;\, B \in \mathcal{V}(a) \}$$

を a の単子と言う．$\alpha \in \mathrm{Mon}(a)$ のとき，$\alpha \fallingdotseq a$ と書く．

2）体はつねに可換体を意味する．

3）$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbb{R}$ は実数体，$\mathbb{C}$ は複素数体，$\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \,;\, x \geqq 0 \}$，$\mathbb{R}^{++} = \{ x \in \mathbb{R} \,;\, x > 0 \}$．

第一部　函数空间からの線型写像

A.　＊有限作用素による表現

1.1. 定義　$\mathbb{K}$ を位相体，V を $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間とする．つぎの条件がみたされるとき，かりに V を HB 空間と言うことにする：V の任意の有限個の線型独立な元 $v_1, \cdots, v_n$，$\mathbb{K}$ 上の位相線型空間 W および W の元 $w_1, \cdots, w_n$ に対し，V から W への連続線型写像 z で，$z(v_i) = w_i \ (1 \leq i \leq n)$ となるものが存在する．

つぎの空間はどれも HB 空間である：

1) $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のハウスドルフ局所凸空間．

2) 離散体 $\mathbb{K}$ 上の離散線型空間．

3) $\mathbb{K}^n$，ただし $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{K}$ は任意の位相体．

1.2. 記号と定義　第一部ではつぎの記号を使う．

1) $\mathbb{K}$ は位相体，V は $\mathbb{K}$ 上の HB 空間，W は $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間，Z は V から W への連続線型写像の全体．$v \in V$，$z \in Z$ に対し，$z(v)$ のかわりに $\langle v, z \rangle$ と書く．

2) X は空でない集合，E は X 上の V 値函数から成る線型空間．

3) X 上の Z 値有限函数（＝台が有限）の全体を F と書く．F の元 h に対し，E から W への線型写像 T_h が

$$T_h(f) = \sum_{x \in X} \langle f(x), h(x) \rangle \quad (f \in E)$$

によって定まる．これを有限作用素と言う．

4）これを$^*U$で解釈することにより，$*$有限作用素が定義される．すなわち，$^*F$の元φに対し，$^*E$から$^*W$への$*$写像$^*T_\varphi$が，

$$^*T_\varphi(\psi) = \sideset{^*}{}\sum_{\xi \in {}^*X} \langle \psi(\xi), \varphi(\xi) \rangle \quad (\psi \in {}^*E)$$

によって定義される．

5）PをEからWへの線型写像とする．我々の目標はPを$*$有限作用素として表わすことである．

1.3. 定理　1）上の記号のもと，$*$有限函数$\varphi \in {}^*F$が存在し，あらゆる$f \in E$に対して$^*T_\varphi(f) = P(f)$となる．

2）特に$\mathbb{K}$が離散でなく，VもWも$\{0\}$でなければ，$*$有限函数$\varphi \in {}^*F$で，その台がXを含むものが存在し，あらゆる$f \in E$に対して$^*T_\varphi(f) \fallingdotseq P(f)$が成りたつ．

1.4. 系（Luxemburg [3]）$\mathbb{K}$を位相体，Xを$\mathbb{K}$上の位相線型空間，$X' = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$とする（$X'$の位相は問題にしない）．このとき，$X'$上の任意の線型形式$P$に対して$^*X$の元$\xi_P$が存在し，あらゆる$f \in X'$に対して$P(f) = {}^*f(\xi_P)$となる．

1.5. 系　$(X, \mathbb{B}, m)$ を測度空間，E を X 上の実数値可積函数の全体とする．${}^*X$ の $*$有限部分集合 Γ および Γ 上の ${}^*\mathbb{R}$ 値 $*$函数 φ が存在し，任意の $f \in E$ に対して

$$\int_X f\,dm = {}^*\sum_{\xi\in\Gamma} {}^*f(\xi)\varphi(\xi)$$

が成りたつ．

B．$*$積分による表現

1.6. 定理　$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$，V および W を $\{0\}$ でない $\mathbb{K}$ 上のバナハ空間，X をハウスドルフ局所コンパクト空間とし，E の元はすべて連続とする．X 上のいたるところ真に正なラドン測度 m に対し，${}^*X$ から ${}^*Z$ への $*$連続 $*$函数 φ で，つぎの性質をもつものが存在する：

a) φ の値域は ${}^*Z$ の $*$有限次元部分空間に含まれる．

b) φ の台は $*$コンパクトで X を含む．

c) 任意の $f \in E$ に対して ${}^*m(\langle {}^*f, \varphi\rangle) \fallingdotseq P(f)$ が成りたつ。ただし，$\langle {}^*f, \varphi\rangle : \xi \longmapsto \langle {}^*f(\xi), \varphi(\xi)\rangle$．

特に X が C^∞ 多様体なら φ は ${}^*C^\infty$ 函数に取れる．

1.7. 系 (Robinson [5])　特に $X = \mathbb{R}^k$，$V = W = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$，m は $\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ測度とする．E の函数がすべてコンパクトな台をもつならば，$*$多項式（$*$フーリエ多項式）

φ が存在し，任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) \fallingdotseq {}^*\!\!\int_{{}^*\mathbb{R}^k} {}^*f(\xi)\varphi(\xi)\,{}^*d\xi$$ が成りたつ。

第二部　正値線型形式および測度

2.1. 定義および記号

1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ は順序位相でコンパクトである。α が正の無限大＊実数のとき，$\alpha \fallingdotseq +\infty$ となる。$\pm\infty$ を含む演算：$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$. $a \in \mathbb{R}$ に対し，$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$. $a \in \mathbb{R}^{++}$ に対し，$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$. $0 \cdot (\pm\infty)$ は定義しない。

2) X は集合，E は X 上の $\mathbb{R}^+$ 値函数から成る錐空間とする。すなわち；$0 \in E$。$f, g \in E$，$a, b \in \mathbb{R}^+$ なら $af + bg \in E$.

3) P は E 上の錐形式．すなわち P は E から $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ への写像でつぎの条件をみたすものとする：

(a) $P(0) = 0$.

(b) $a \in \mathbb{R}^{++}$, $f \in E \Rightarrow P(af) = aP(f)$.

(c) $f, g \in E \Longrightarrow P(f+g) = P(f) + P(g)$.

(d) $f, g \in E$, $f \leq g \Rightarrow P(f) \leq P(g)$.

4) $E_P = \{ f \in E ;\ P(f) < +\infty \}$ と置く。$0 \in E_P$.

5) F は X 上の $\mathbb{R}^+$ 値有限函数の全体とする.

2.2. 定理　X を含む ${}^*X$ の $*$ 有限部分集合 Γ および Γ 上の ${}^*\mathbb{R}^{++}$ 値 $*$ 函数 φ が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) \fallingdotseq \sideset{}{^*}\sum_{\xi \in \Gamma} {}^*f(\xi)\varphi(\xi)$$ が成りたつ。

2.3 系　測度空間 $(X, \mathbb{B}, m)$ に対し, X を含む ${}^*X$ の $*$ 有限部分集合 Γ および Γ 上の ${}^*\mathbb{R}^{++}$ 値 $*$ 函数 φ が存在し, X 上の積分確定 ($\overline{\mathbb{R}}$ の値を許す) な任意の函数 f に対して

$$\int_X f\, dm \fallingdotseq \sideset{}{^*}\sum_{\xi \in \Gamma} {}^*f(\xi)\varphi(\xi)$$ が成りたつ。

2.4 定理　X を孤立点のないハウスドルフ空間とし, E の函数はすべて連続とする。X を含む ${}^*X$ の $*$ 有限部分集合 Γ および $*$ 自然数 p が存在し, 任意の $f \in E$ に対して

$$P(f) \fallingdotseq \frac{1}{p} \sideset{}{^*}\sum_{\xi \in \Gamma} {}^*f(\xi)$$ が成りたつ。

第三部　無原子測度

3.1. 定義　測度空間 $(X, \mathbb{B}, m)$ が無原子であるとは, 任意の有限可測集合 A に対して $m(A) = 0$ となることである。

3.2. 補題　$(X, \mathbb{B}, m)$ を無原子測度空間, E を X 上の正値可測函数の全体, E_p を正値可積函数の全体とし, E の元 f

に対して $\int_X f\,dm$ を $P(f)$ と書く。E_P の元 $f_1, \cdots, f_\ell$,
$E-E_P$ の元 $f_{\ell+1}, \cdots f_n$, $e \in \mathbb{R}^{++}$, $N \in \mathbb{N}$ および X の有限部分集合 D が与えられたとする. D を含む X の有限部分集合 C および自然数 r が存在し,

$$|T_{C,r}(f_i) - P(f_i)| \leq e \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

$$T_{C,r}(f_i) \geqq N \quad (\ell+1 \leq i \leq n)$$

が成りたつ. ただし, $T_{C,r}(f) = \frac{1}{r}\sum_{x \in C} f(x)$.

証明　$e \leq 1 \leq N$ と仮定し,

$$M = 1 + |D| \cdot \max\{f_i(x)\,;\ 1 \leq i \leq n,\ x \in D\}$$

と置く。ただし, $|D|$ は D の濃度である.

$1°$ 積分の定義により, $1 \leq i \leq n$ に対し, 正値可積階段函数 g_i が存在し,

$$g_i \leq f_i, \quad P(f_i) - P(g_i) \leq \frac{1}{8}e \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

$$g_i \leq f_i, \quad P(g_i) \geqq 2N \quad (\ell+1 \leq i \leq n)$$

が成りたつ. $G = \max\{g_i(x)\,;\ 1 \leq i \leq n,\ x \in X\}$ と置き, $g_1, \cdots g_n$ の台の合併を Y とする. $m(Y) < +\infty$.

$2°$ Y の可測部分集合 Z を適当に取ると, $m(Y-Z) < \frac{e}{8G}$ かつ $f_1, \cdots, f_\ell$ は Z 上有界になる. $1 \leq i \leq \ell$ に対し, $x \in Z$ のとき $f_i'(x) = f_i(x)$, $x \notin Z$ のとき $f_i'(x) = 0$ として函数 f_i'

を定義する．$x \in Z$ なら $g_i(x) \leq f_i'(x)$ だから，正値可積階段函数 h_i $(1 \leq i \leq l)$ が存在し，$h_i \leq f_i'$，$x \in Z$ に対しては $g_i(x) \leq h_i(x)$，かつ $x \in X$ に対して

$$f_i'(x) - h_i(x) < \frac{e}{8(1+m(Y))}$$

となる．$l+1 \leq i \leq n$ に対しては，$x \in Z$ のとき $h_i(x) = g_i(x)$，$x \notin Z$ のとき $h_i(x) = 0$ として h_i を定義する．

3° Z の可測部分集合の無共分族 $\{A_1, \cdots A_p\}$ を適当に取ると，h_i $(1 \leq i \leq n)$ は A_j の特性函数 χ_{A_j} の正値線型結合として表わされる：

$$h_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\chi_{A_j} \quad (a_{ij} \geq 0,\ 1 \leq i \leq n).$$

$a_0 = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}$ と置く．$m(A_1), \cdots, m(A_p)$ を有理数で近似する：自然数 r, $q_1, \cdots q_p$ が存在し，$\frac{1}{r} \leq \frac{e}{4M}$

かつ
$$\frac{q_j}{r} \leq m(A_j) \leq \frac{q_j}{r} + \frac{e}{8a_0} \quad (1 \leq j \leq p)$$

が成りたつ．$q = q_1 + \cdots + q_r$ と書くと，

$$\frac{q}{r} \leq \sum_{j=1}^{p} m(A_j) \leq m(Z) \leq m(Y).$$

4° 各 A_j から q_j 個の点を取る．$m(A_j) = 0$ なら $q_j = 0$ だし，$m(A_j) > 0$ なら（無原子の仮定により）A_j は無限集合だから

これは可能である。これらの点の全体を C_0 ($|C_0| = g$) とし，
$C = C_0 \cup D$ と置く。$1 \leq i \leq n$ に対し，

$$T_{C,r}(h_i) = T_{C_0,r}(h_i) + T_{D-C_0,r}(h_i)$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{x \in C_0 \cap A_j} h_i(x) + \frac{1}{r}\sum_{x \in D-C_0} h_i(x)$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, g_j + \frac{1}{r}\sum_{x \in D-C_0} h_i(x).$$

この等式と $P(h_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, m(A_j)$ とを合わせて，

$$|T_{C,r}(h_i) - P(h_i)| \leq \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \left| \frac{g_j}{r} - m(A_j) \right| + \frac{1}{r}\sum_{x \in D-C_0} h_i(x)$$

$$\leq \frac{e}{8} + \frac{e}{4}.$$

5° $1 \leq i \leq l$ に対し，

$$0 \leq P(f_i) - P(h_i) = (P(f_i) - P(g_i)) + (P(g_i) - P(h_i))$$

$$\leq \frac{e}{8} + \int_Z (g_i - h_i) + \int_Y g_i \leq \frac{e}{8} + 0 + G \cdot \frac{e}{8G} = \frac{e}{4}.$$

一方， $0 \leq T_{C,r}(f_i) - T_{C,r}(h_i) = \frac{1}{r}\sum_{x \in C_0} (f_i'(x) - h_i(x))$

$$+ \frac{1}{r}\sum_{x \in D-C_0} (f_i(x) - h_i(x)) \leq \frac{g}{r}\frac{e}{8(1+m(Y))} + \frac{e}{4M} \cdot M \leq \frac{e}{8} + \frac{e}{4}.$$

したがって，

$$|T_{C,r}(f_i) - P(f_i)| \leq |T_{C,r}(f_i) - T_{C,r}(h_i)| + |T_{C,r}(h_i) - P(h_i)|$$

$$+|P(h_i)-P(f_i)| \leqq \left(\frac{e}{8}+\frac{e}{4}\right)+\left(\frac{e}{8}+\frac{e}{4}\right)+\frac{e}{4}=e.$$

6° $l+1 \leqq i \leqq n$ に対しては，

$$T_{C,r}(f_i) \geqq T_{C,r}(h_i) \geqq P(h_i)-\left(\frac{e}{8}+\frac{e}{4}\right) \geqq \int_Z g_i - \frac{1}{2}$$

$$=\int_Y g_i - \int_{Y-Z} g_i - \frac{1}{2} \geqq P(g_i) - G\cdot m(Y-Z) - \frac{1}{2}$$

$$\geqq 2N - \frac{e}{8} - \frac{1}{2} \geqq N.$$ 証明終.

3.3. 定理　無原子測度空間 $(X, \mathbb{B}, m)$ に対し，X を含む ${}^*X$ の $*$有限部分集合 Γ および $*$自然数 ρ が存在し，X 上の任意の積分確定な実数値函数 f に対して

$$\int_X f\,dm \fallingdotseq {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f) = \frac{1}{\rho}\sum_{\xi\in\Gamma}^{*} {}^*f(\xi)$$

が成りたつ。

証明　補題の記号を踏襲し，さらに X の有限部分集合の全体を $\mathcal{S}(X)$ と書く. $\mathcal{L}$ の二変項論理式 $\phi(x,y)$ として

$$x=(f,e,N,a)\in E\times\mathbb{R}^{++}\times\mathbb{N}\times X \;\wedge\; y=(C,r)\in\mathcal{S}(X)\times\mathbb{N}$$

$$\wedge\; a\in C \wedge [f\in E_P \to |P(f)-T_{C,r}(f)|\leqq e] \wedge [f\in E-E_P \to T_{C,r}(f)\geqq N]$$

を考える。補題によって ϕ は有限共起的である．共起性の原理により，${}^*U$ の元 β が存在し，$\mathcal{D}(\phi)$ の任意の元 x に対して

$\phi(x,\beta)$ が ${}^*U$ で真となる。すなわち，${}^*\mathcal{S}({}^*X)\times{}^*N$ の元 (Γ,ρ) が存在し，論理式 ϕ の二行目の性質をもつ。a，f，e，N は任意だから，$X\subset\Gamma$，$f\in E_P$ なら $P(f)\fallingdotseq{}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)$，$f\in E-E_P$ なら ${}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)\fallingdotseq+\infty=P(f)$ となる。

任意の積分確定な函数 f に対しては，$f=f^+-f^-$ と分解する。f^+，f^- は正値可測函数で，少くとも一方は可積である。それぞれに定理を適用して引けばよい。証明終。

3.4. 系（Henson [2]） 上の定理で m が確率測度ならば，$\rho={}^*|\Gamma|$ としてよい（${}^*|\ |$ は *濃度）。

証明 $\gamma={}^*|\Gamma|$ とする。

$$\frac{\gamma}{\rho}=\frac{1}{\rho}{}^*|{}^*X\cap\Gamma|\fallingdotseq m(X)=1.$$

$${}^*T_{\Gamma,\gamma}({}^*f)=\frac{\rho}{\gamma}{}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)\fallingdotseq\int f\,dm \quad (f\in E). \quad 証明終.$$

文　献

[1] A. R. Bernstein ; A non-standard integration theory for unbounded functions. Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math. 20 (1974) 97 - 108.

[2] C. W. Henson ; On the nonstandard representation of measures. Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972) 437 - 446.

[3] W. A. J. Luxemburg ; On some concurrent binary relations occurring in analysis. Contributions to non-standard analysis 85 - 100. North-Holland (1972).

[4] A. Robinson ; On generalized limits and linear functionals. Pacific J. Math. 14 (1964) 269 - 283.

[5] A. Robinson ; Non-standard analysis. North-Holland (1966) 第2版 (1974).

[6] 斎藤正彦 ; 超積と超準解析 —— ノンスタンダード・アナリシス ——. 東京図書 (1976).

[7] M. Saito ; On some problems in non-standard functional analysis, to appear.