数理解析研究所講究録
第 304 巻 1977 年 39-58

Schwinger 汎函数微分方程式と超準解析

九大　工学部　　川畑茂徳

§1．超準解析（nonstandard analysis）の場の量子論への応用を目標とする。具体的には超準的に一般化された函数の理論とその上の汎函数微積分に大別される。前者によって線込み理論，Dirac空間の数学的基礎づけを行い，後者によってSchwinger汎函数微分方程式を取扱う。超準解析を用いたDirac空間の数学的基礎づけは，G. Takeuti[1] M.O. Farrukh[2]等によって試みられたが今のところ成功したとはいえない。例えば線型作用素の連続スペクトルλに対応する固有ベクトルをe_λとするとき，$(e_\lambda, e_{\lambda'}) = \delta(\lambda-\lambda')$がDirac空間で成立する。この関係式を誘導できる理論は今まで存在しなかったようである。我々の超準的に一般化された函数の理論では，《独立変数をかける》作用素，微分作用素について，上の関係式が成立することは自明である。R. Kurata[3]は急減少な函数空間の超積$^*S$を用いて線込み理論の正当化を試みた。しかし$^*S$ではBogoliubov-Parasiuk[4]流の積の一般理論を含まない，

その上除法に関して困難があり，多くの問題点を残している。 F. Edwards と R.E. Peierls [3] は線型化された Schwinger 方程式を，有限次元の Fourier 変換に相当する汎函数 Fourier 変換を形式的に定義して解いたが，彼等の方法は数学的正当性が全くなく単なる形式的計算であり，その計算すら不明確で曖昧なところが多い。我々は超準的に拡張された《無限次元空間の一様測度》による積分を定義し，F. Edwards 等の結果を正当化する。我々の超準的な汎函数微積分は Schwinger 方程式以外にも利用できるがここでは触れない。Dirac 空間，繰込み理論への応用は現在考察中である。

§2 超ユークリッド空間 $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}_\omega$

$\mathbb{N}$ を自然数の集合（0 を含めて）とし，$\mathbb{N}$ 上の Fréchet の filter をふくむ ultrafilter を固定して考えこれを以下 $\mathcal{F}$ であらわす。h_n を Hermite 函数とする，

$$h_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n}(e^{-x^2})$$

d 次元の場合，$h_p(x) = h_{p_1}(x_1) h_{p_2}(x_2) \cdots h_{p_d}(x_d)$ ，$p = (p_1, p_2, \cdots p_d) \in \mathbb{N}_d$
p_j は整数 $\geqq 0$ で置きかえて考えておく，また $|p| = \sum_{j=1}^{d} p_j$ と書く。$\mathbb{C}^n$ を n 次元複素ユークリッド空間とし，

$$\mathbb{E} = \prod_{n \in N} \mathbb{C}^{n+1} / \mathcal{F}.$$

として $\mathbb{E}$ を定義する。すなわち $(a^{(n)})_{n \in N} \in \prod_{n \in N} \mathbb{C}^{n+1}$ ここに $a^{(n)}$ は $n+1$ 次元ベクトル（$a^{(n)} = (a_0^{(n)}, \cdots a_n^{(n)})$ と考えてよい）である。$\prod \mathbb{C}^{n+1}$ の2元，$a = (a^{(n)})$，$b = (b^{(n)})$ に対し，

$$a \simeq b \iff \{n ;\ a^{(n)} = b^{(n)}\} \in \mathcal{F}.$$

という同値関係を定義し，それによって $\prod \mathbb{C}^{n+1}$ を類別したものが $\mathbb{E}$ である。$(a^{(n)})$ をふくむ同値類を $[a^{(n)}]_n$ であらわそう。$\mathbb{E}$ の元の間には自然に加法が定義され，${}^*\mathbb{C}$ 上の線型空間となる。$a, b \in \mathbb{E}$ の内積は当然，

$$(a, b) = [(a^{(n)}, b^{(n)})]_n \in {}^*\mathbb{C}$$

によって定義される。ここに $(a^{(n)}, b^{(n)})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の内積である。

$\mathbb{E}$ の元で，とくにある数列 $(a^{(n)}) \in \mathbb{C}^N$ があって

$$[a^{(n)}]_n = [(a_0, a_1, \cdots a_n)]_n$$

と書けるような元の全体から作られる部分空間を，$\mathbb{E}^0$ とおく。これは ${}^*\mathbb{R}$，${}^*\mathbb{C}$ と異なり，何らかの集合の超積で書かれるものではない。数列 (a_n)，$(b_n) \in \mathbb{C}^N$ が $\mathbb{E}^0$ の元 $[a^{(n)}]_n$，$[b^{(n)}]_n$ を定義する時には，$[a^{(n)}]_n = [b^{(n)}]_n$ ならば，実は任意の $n \in N$ に対し $a_n = b_n$ である。いいかえると $(a_n) \in \mathbb{C}^N$ から $\mathbb{E}^0$ への対応

$$\mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{E}^0$$

は単射，したがって双射となり，$\mathbb{E}^0$ はただの数列空間である。

$\mathbb{E}$の元に対し，エルミート函数系$\{h_n\}$を用いて${}^*\mathbb{R}$から${}^*\mathbb{C}$への函数ψを対応させ，この函数の全体を$\mathbb{E}_h({}^*\mathbb{R})$とする。

$a=[a^{(n)}]_n\in\mathbb{E}$に対し，

$$a\longmapsto \psi=[\psi_n]_n=[\sum_{p\le n}a_p^{(n)}h_p]_n$$

あきらかに，$a,b\in\mathbb{E}$の内積に関して，$a\longmapsto\psi$，$b\longmapsto\varphi$とするとき

$$(a,b)=[\int\psi_n(x)\overline{\varphi_n}(x)\,dx]_n=((\psi,\varphi)\text{と書く})$$

ゆえに上の対応

$$\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}_h({}^*\mathbb{R})$$

は内積を不変にする同型対応である。この写像による$\mathbb{E}^0$の同型$\mathbb{E}_h^0({}^*\mathbb{R})$が定義される。上で注意したところより，$\mathbb{E}_h^0$は形式的エルミート級数$\sum_{p=0}^{\infty}a_ph_p$，$a_p\in\mathbb{C}$の全体と同一視される。

形式的エルミート級数空間としての$\mathbb{E}_h^0$において(a_p)が急激少数列のときには急激少函数(S)を，緩増加数列のときは緩増加超函数(S')を，(a_p)がl_2の場合にはヒルベルト空間L^2を作る。すなわち　$(S)\subset(L^2)\subset(S')\subset\mathbb{E}_h^0$，この関係は任意のd次元で正しい。

§3　空間$\mathbb{E}_h^0$，$\mathbb{E}_h$上の線型作用素

<u>定義3-1</u>　$\phi\in\mathbb{E}_h$のとき微分$D\phi$を定義する。

$$\hat{D}\phi = [\sum_{|p|,|q|\le n} \lambda_{qp} a_p^{(n)} h_p] \in \mathbb{E}_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$D\phi = [\sum_{|q|\le n} (\sum_{p\in N_d} \lambda_{qp} a_p) h_q]_n \in \mathbb{E}_n^\circ \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^\circ$$

但し，$\lambda_{qp} = (Dh_p, h_q)_{L^2}$，$Dh_p$ は通常の微分である。

注意 3-1　$d=1$ 次元の場合

$$\hat{D}\phi = [\sum_{0\le p\le n} \{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\, a_{p+1}^{(n)} - \sqrt{\tfrac{p}{2}}\, a_{p-1}^{(n)}\} h_p]_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$D\phi = [\sum_{0\le p\le n} \{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\, a_{p+1} - \sqrt{\tfrac{p}{2}}\, a_{p-1}\} h_p]_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^\circ$$

定義 3-2　$\phi \in \mathbb{E}_n$ に対し不定積分 $\int \phi\, d\xi$ を次式で定義する

$$\hat{\int} \phi\, d\xi = [\sum_{|p|,|q|\le n} I_{qp} a_p^{(n)} h_q]_n \in \mathbb{E}_n \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$\int \phi\, d\xi = [\sum_{|q|\le n} (\sum_{p\in N_d} I_{qp} a_p) h_q]_n \in \mathbb{E}_n^\circ \quad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^\circ$$

但し $\mathbb{I} = (I_{qp})_{|p|,|q|\le n}$ は $\lambda_{qp} = (Dh_p, h_q)_{L^2}$ とするとき，$(\lambda_{qp})_{|p|,|q|\le n}$ の逆行列であり，$I = (I_{qp})_{q,p\in N_d}$ は $(\lambda_{qp})_{q,p\in N_d}$ の逆行列である。

定義 3-3　Fourier 変換の定義　$\varphi \in \mathbb{E}_n$ に対し

$$(\mathcal{F}\phi)(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{i\lambda x} \phi(x)\, dx$$
$$= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} [\sum_{|p|\le n} a_p^{(n)} (\mathcal{F}h_p)(\lambda)]_n$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Big[\sum_{|p|\le n} a_p^{(n)}\, i^{|p|} h_p(\lambda) \Big]_n \in \mathbb{E}_n .$$

<u>定義3-4</u>　独立変数をかける作用素の定義

$$\hat{x}\circ\phi = \Big[\sum_{|p|,|q|\le n} \tau_{qp}\, a_p^{(n)} h_q \Big]_n \in \mathbb{E}_n , \qquad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$x\circ\phi = \Big[\sum_{|q|\le n} \Big(\sum_{p\in N_d} \tau_{qp}\, a_p \Big) h_q \Big]_n \in \mathbb{E}_n^0 \qquad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^0$$

但し，$\tau_{qp} = (x h_p, h_q)_{L^2}$

<u>注意3-2</u>　定義3-4より　$(\psi h_p, h_q)_{L^2} < \infty$　$(\forall p, q \in N_d)$　となる整函数ψをかける作用素は自然に定義される，

$$\hat{\psi}\circ\phi = \Big[\sum_{|p|,|q|\le n} \alpha_{qp}\, a_p^{(n)} h_q \Big]_n \in \mathbb{E}_n \qquad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n$$

$$\psi\circ\phi = \Big[\sum_{|q|\le n} \Big(\sum_{p\in N_d} \alpha_{qp}\, a_p \Big) h_q \Big]_n \in \mathbb{E}_n^0 \qquad \text{if } \phi \in \mathbb{E}_n^0$$

但し　$\alpha_{qp} = (\psi h_p, h_q)_{L^2}$

<u>Lemma 3-1</u>　(1)　$\tau : (S') \longrightarrow \mathbb{E}_n^0$　とすると次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
(S') \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "D"'] & \mathbb{E}_n^0 \arrow[d, "D"] \\
(S') \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{E}_n^0
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
(S') \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}"] & \mathbb{E}_n^0 \arrow[d, "\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}"] \\
(S') \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{E}_n^0
\end{tikzcd}$$

(2)　$\phi \in \mathbb{E}_n^0$ のとき　$\mathcal{F}(D^\nu \phi) = (i\sigma)^\nu \circ \mathcal{F}\phi$　　$\nu \in N$

　　$\phi \in \mathbb{E}_n$ のとき　$\mathcal{F}(\hat{D}^\nu \phi) = \widehat{(i\sigma)^\nu} \circ \mathcal{F}\phi$　　$\nu \in N$,

証明， 1) $T\in(S')$のとき DT の Hermite 係数は（但し $d=1$）

$$\langle DT, h_p\rangle = -\langle T, h_p'\rangle$$
$$= -\langle T, \sqrt{\tfrac{p}{2}}h_{p-1} - \sqrt{\tfrac{p+1}{2}}h_{p+1}\rangle$$
$$= -\sqrt{\tfrac{p}{2}}\langle T, h_{p-1}\rangle + \sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\langle T, h_{p+1}\rangle$$

であることから明らか。

2) $d=1$ のとき証明する。

$$\hat{x}\circ\phi = [\sum_{0\le p\le n}\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\tfrac{p}{2}}a_{p-1}^{(n)}\}h_p\}$$

であるから $\mathcal{F}\phi = \tilde{\phi}$ と書くことにすれば，

$$\widehat{(i\sigma)}\circ\tilde{\phi} = i[\sum_{0\le p\le n}\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\, i^{p+1}a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\tfrac{p}{2}}\, i^{p-1}a_{p-1}^{(n)}\}h_p]_n$$
$$= [\sum_{0\le p\le n} i^p\{-\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}a_{p+1}^{(n)} + \sqrt{\tfrac{p}{2}}a_{p-1}^{(n)}\}h_p]_n$$
$$= \mathcal{F}(\hat{D}\phi)$$

q.e.d.

<u>example 3-1</u> $d=1$ 次元の場合に述べる

(1) $\mathcal{F}x^m = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(-i)^m\,\delta^{(m)}(\sigma)$

(2) $\delta(x,y) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-y)^\ell}{\ell!}D^\ell\delta(x)$， $\forall y\in{}^*\mathbb{R}$ を fix したとき.

∵ 定義より

$$D_x\delta(x,y) = [\sum_{p\le n}\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}h_{p+1}(y) - \sqrt{\tfrac{p}{2}}h_{p-1}(y)\}h_p(x)]_n$$
$$= -[\sum_{p\le n}h_p'(y)h_p(x)]_n$$

従って
$$D_x^\ell\delta(x,y) = (-1)^\ell[\sum_{p\le n}h_p^{(\ell)}(y)h_p(x)]_n$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-y)^l}{l!}D_x^{(l)}\delta(x)=\Big[\sum_{p\le n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2l}y^l}{l!}h_p^{(l)}(0)\,h_p(x)\Big]_n$$
$$=\Big[\sum_{p\le n}h_p(y)\,h_p(x)\Big]_n=\delta(x,y).$$

(3) $\mathcal{F}(e^{bx})=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,\delta(\sigma,ib),\qquad b\in {}^*\mathbb{R}$

㊟ (1), (2) より明らかである。

(4) $\mathcal{F}_1\delta=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1},\qquad \mathcal{F}\mathbf{1}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\delta$

但し $\mathbf{1}=\Big[\sum_{p\le n}\int h_p(z)dz\;h_p\Big]_n\equiv\Big[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{p\le n}i^p h_p(0)\,h_p\Big]_n$

<u>Lemma 3-2</u> $\tau\,;\,(S')\longrightarrow \mathbb{E}_n^0$ (injection) とする。次の図式は可換である。但し $p(x)$ は独立変数 x の多項式である。注)

$$\begin{array}{ccc}(S') & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{E}_n^0\\ \big\downarrow{\scriptstyle p(x)\times} & & \big\downarrow{\scriptstyle p(x)\circ}\\ (S') & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{E}_n\end{array}$$

<u>証明</u>, $p(x)=x$ のとき証明すれば十分。$\phi\in(S')$ とする

$$x\circ\phi=\Big[\sum_{q\le n}\Big(\sum_{p\in N}(xh_p,h_q)a_p\Big)h_q\Big]_n$$

但し, $a_p=\langle\phi,h_p\rangle$, $\sum_{p\in N}(xh_p,h_q)a_p=\langle x\phi,h_q\rangle$ であるから,

$$x\circ\phi=\Big[\sum_{q\le n}\langle x\phi,h_q\rangle h_q\Big]_n=\tau(x\phi)\qquad \text{q.e.d}$$

注) $\mathcal{O}_M$ に属する整函数であればよい。

Lemma 3-3　$\lambda \in {}^*\mathbb{R}$ とする．$x \circ e_\lambda = \lambda e_\lambda$，$\frac{1}{i} D f_\lambda = \lambda f_\lambda$ の解は $e_\lambda = \delta(\lambda, x)$，$f_\lambda = \mathcal{F} e(\lambda, x)$ である。従って

$$(f_\lambda, f_{\lambda'}) = (e_\lambda, e_{\lambda'}) = \delta(\lambda, \lambda') \qquad \lambda, \lambda' \in {}^*\mathbb{R},$$

証明　$f_\lambda = [\sum_{p \le n} a_p h_p]_n$ とおく，定義より，

$$\frac{1}{i} D f_\lambda = \frac{1}{i}\Big[\sum_{p \le n}\Big\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\, a_{p+1} - \sqrt{\tfrac{p}{2}}\, a_{p-1}\Big\} h_p\Big] = \lambda f_\lambda$$

従って　$\sqrt{\frac{p+1}{2}}\, a_{p+1} - \sqrt{\frac{p}{2}}\, a_{p-1} = i \lambda_n a_p$，但し $\lambda = [\lambda_n]_n \in {}^*\mathbb{R}$ を解くことに還元される。$a_p = i^p b_p$ とおくと

$$\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\, b_{p+1} + \sqrt{\tfrac{p}{2}}\, b_{p-1} = \lambda_n b_p \qquad p \in \mathbb{N}$$

この漸化式をみたす解は Hermite 函数 $h_p(\lambda_n)$ の定数倍である。ゆえに　$f_\lambda = [\sum_{p \le n} i^p h_p(\lambda) h_p] = \mathcal{F} \delta(\lambda, \cdot)$。$x \circ e_\lambda = \lambda e_\lambda$ も同様にして　$e_\lambda = [\sum_{p \le n} h_p(\lambda) h_p(x)]_n = \delta(\lambda, x)$　q.e.d.

注意 3-3　1)　ϕ が整函数で ${}^\forall p \in \mathbb{N}_d$ について $\int \phi h_p d\xi < \infty$ のとき $\phi \in \mathbb{E}_n^0$ である。

2)　$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{c_{m+1}}{m!} \delta^{(m)} \in \mathbb{E}_n^0$，但し $\overline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[m]{|c_m|} = M \geq 0$，

$M=0$ のとき hyperfunction と同一視される。

定義 3-5　$\phi(x, y) \in \mathbb{E}_n({}^*\mathbb{R}^d \times {}^*\mathbb{R}^d)$ のとき，$\phi(x, y) = [\sum_{|p|,|q| \le n} A_{pq}^{(n)} h_p(x) h_q(y)]_n$ と表わされる。行列 $A = (A_{pq}^{(n)})_{|p|,|q| \le n}$

が逆行列 $\mathbb{B}=(B^{(n)}_{p,q})_{|p|,|q|\le n}$ をもつとき，$\phi(x,y)$ は可逆であるという。

$$\phi^{-1}(x,y)=[\sum_{|p|,|q|\le n} B^{(n)}_{p,q}\, h_p(x)\, h_q(y)]_n \in \mathbb{E}_n({}^*\mathbb{R}^d\times{}^*\mathbb{R}^d)$$

で逆元を定義する。

<u>Lemma 3-4</u>　$\phi(x,y)\in\mathbb{E}_n$ が可逆のとき

$$\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\phi^{-1}(\xi,\xi')\phi(\xi',\eta)d\xi'=\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\phi(\xi,\xi')\phi^{-1}(\xi',\eta)d\xi'=\delta(\xi,\eta)$$

§4　$\mathbb{E}^0_n$, $\mathbb{E}_n$ 上の汎函数微積分,

$\mathbb{E}_n$上の函数 ― 一般に${}^*\mathbb{C}$値をとる ―は

$$F(\varphi)=[\ F_n(\varphi_n)]_n$$

の形式のものに限定する。$F_n(\varphi_n)=F_n(\sum_{|p|\le n} a^{(n)}_p h_p)$ は $a^{(n)}$ の値のみに依存するから F_nは $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の函数とみなされる。

$\forall n\in N$ について $F_n\in C^1(\mathbb{C}^{n+1})$ のとき，$F\in C^1(\mathbb{E}_n)$, また $\forall n\in N$ について $F_n\in(S')(\mathbb{C}^{n+1})$ のときに，$F\in S'(\mathbb{E}_n)$ と書く・・・・・・・。

<u>定義 4-1</u> 1) $F\in L^1(\mathbb{E}_n)$のとき

$$\int_{\mathbb{E}_n}F(\varphi)\delta\varphi=\left[\int_{\mathbb{C}^{n+1}}F_n(a^{(n)}_0,\cdots a^{(n)}_n)da^{(n)}_0\cdots da^{(n)}_n\right]_n\in{}^*\mathbb{C}$$

で $\mathbb{E}_n$ 上の汎函数積分を定義する

2) $F \in C^1(\mathbb{E}_n)$ のとき

$$\frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\xi)} = \Big[\sum_{|p| \le n} \frac{\partial F_n}{\partial a_p^{(n)}} h_p(\xi)\Big]_n \in (\mathbb{E}_n)_\xi$$

但し，$\varphi = [\sum_{|p| \le n} a_p^{(n)} h_p]_n$ で汎函数微分を定義する。

3) （汎函数 Fourier 変換の定義）　$F \in S'(\mathbb{E}_n)$ のとき

$$(\mathcal{F}F)(\lambda) = \int F(\varphi)\, e^{i\int \phi(\xi)\lambda(\xi)\,d\xi}\, \delta\Big(\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\Big)$$

$$= [\ (\mathcal{F}F_n)(\lambda^{(n)})]_n$$

ここに，$(\mathcal{F}F_n)(\lambda^{(n)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int F_n(x)\, e^{i\lambda x}dx \in S'(\mathbb{C}^{n+1})$ である。

<u>Theorem 4-1</u>

1) $F, G \in L^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow \int (F+G)\delta\phi = \int F\delta\phi + \int G\delta\phi$,

2) $\phi_0 \in \mathbb{E}_n$ を 1，固定すると，$F \in L^1(\mathbb{E}_n)$ のとき

$$\int F(\phi+\phi_0)\delta\phi = \int F(\varphi)\delta\varphi\ ,\quad \text{但し}\ \varphi = \phi_0 + \phi,$$

3) Fourier 変換を $\mathcal{F}\phi \equiv \tilde{\varphi}$ と書くとき，

$$\int F(\tilde{\varphi})\delta\phi = \int F(\tilde{\varphi})\delta\tilde{\varphi} = \int F(\phi)\delta\phi$$

4) $(K\phi)(\eta) = \int K(\xi,\eta)\phi(\eta)\,d\eta$, $K(\xi,\eta)\in \mathbb{E}_n$ で線型変換を定義する。但し $K(\xi,\eta) = [\sum_{|p|,|q|\le n} k_{pq}^{(n)} h_p(x) h_q(y)]_n$ で可逆とする。$\mathbb{K} = (k_{pq}^{(n)})_{|p|,|q|\le n}$ の逆行列を $\mathbb{K}^{-1}$ とする，また $|\det K^{-1}| \equiv [\,|\det \mathbb{K}^{-1}|\,]_n$ とおく。

$$\int F(K\phi)\,\delta\phi = |\det K^{-1}| \int F(\varphi)\,\delta\varphi$$

5) $G \in C^1(\mathbb{E}_n) \cap B(\mathbb{E}_n)$, $F \in C_0^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\int G(\phi)\frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(\xi)}\,\delta\phi = -\int F(\phi)\frac{\delta G(\phi)}{\delta\phi(\xi)}\,\delta\phi$$

6) $F \in S'(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(\xi)}\right)(\lambda) = \int \frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(\xi)}\, e^{i\int\phi(\xi)\lambda(\xi)}\,\delta\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$= -i\lambda(\xi)(\mathcal{F}F)(\lambda),$$

ように汎函数Fourier変換と，その共役変換は $S'(\mathbb{E}_n)_\phi$ と $S'(\mathbb{E}_n)_\lambda$ の間に互いに逆な同型対応を定める。

<u>Theorem 4-2</u>

1) $G, F \in C^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\{G(\phi)F(\phi)\} = \frac{\delta G(\phi)}{\delta\phi(\xi)}F(\phi) + G(\phi)\frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(\xi)}.$$

但し $G(\phi)F(\phi) = [G_n F_n]_m$ である。

2) $F \in C^1(R)$, $G \in C^1(\mathbb{E}_n) \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)} F(G(\phi)) = \left.\frac{dF}{d\beta}\right|_{\beta=G(\phi)} \frac{\delta G(\phi)}{\delta\phi(\xi)} = F'(G(\phi))\frac{\delta G(\phi)}{\delta\phi(\xi)}$$

3) $f \in C^1(R)$ のとき,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\frac{\partial}{\partial\eta} f(\phi(\eta)) = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)} f(\phi(\eta)).$$

4) (chain rule), $F(\phi,\xi) \in C^1(\mathbb{E}_n)\times\mathbb{E}_n \Rightarrow$

$$\int_{{}^*R^d} \frac{\delta F(\phi,\xi)}{\delta\phi(\eta)}\frac{\delta}{\delta F(\phi,\xi)} d\xi = \frac{\delta}{\delta\phi(\eta)}$$

5) $F \in C^2(\mathbb{E}_n)$ のとき

$$\frac{\delta^2 F(\phi)}{\delta\phi(\xi)\,\delta\phi(\eta)} = \frac{\delta^2 F(\phi)}{\delta\phi(\eta)\,\delta\phi(\xi)}.$$

<u>example 4-1</u> 1) $\dfrac{\delta\phi(\xi)}{\delta\phi(\eta)} = \delta(\xi,\eta)$

2) $f \in C^1(R)$ のとき, $\dfrac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\displaystyle\int f(\phi(\eta))d\eta = \int \frac{\delta f(\phi(\eta))}{\delta\phi(\xi)}d\eta$

$$= \int \frac{\partial f(\phi(\eta))}{\partial\phi(\eta)}\delta(\xi,\eta)\,d\eta = \frac{\partial f(\phi(\xi))}{\partial\phi(\xi)}.$$

Theorem 4-1, 4-2 の証明は, すべて有限次元空間の微積分

の定理に還元できる。

§5 Schwinger 方程式.

量子化された場の理論においては Green 函数 $G(x,x')$, $x,x' \in R^4$ はその系の状態を特徴づける。Green 函数のみたす方程式は，そのままの形では求めることはできない。しかし仮想的な外部場を導入したときの Green 函数 $G(x,x';\phi)$ については ϕ に関する functional differential equation（これが Schwinger equation と呼ばれる）を導くことができる。もし $G(x,x';\phi)$ が求まれば $G(x,x') = G(x,x';0)$ とすればよい。Schwinger equation の解を関数空間上の積分型（continual integral）で表現することが望ましい。我々は Schwinger 方程式の解を E_n 上の "continual integral" で表現して取扱う。

nucleon と meson の相互作用についての Schwinger 方程式は，

$$\left[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5 \phi(x) + ig\gamma_5 \int d\xi\, \Delta(x,\xi;\phi) \frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\right] G(x,x';\phi) = \delta(x-x') \quad \text{---}(5.1)$$

$$\left[-\Box_\xi + B^2\right] \Delta(\xi,\xi';\phi) = \delta(\xi-\xi') + ig\, T_r \gamma_5 \int d\xi\, \Delta(\xi,\eta) \frac{\delta G(\xi',\xi';\phi)}{\delta\phi(\eta)}$$

$$- g\, T_r \gamma_5\, \phi(\xi)\, G(\xi',\xi';\phi) \quad \text{---} \quad (5.2)$$

γ_i は Dirac matrix， $\Box_\xi = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_3^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}$

簡単のため問題を linear にして (5.2)を

$$(-\Box_\xi + k^2)\Delta(\xi,\xi') = \delta(\xi-\xi')$$

でおきかえる。

$$\mathcal{L} \equiv \left[-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5\phi(x) + i\gamma_5 g\int d\xi\, \Delta(x,\xi)\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\right]_r$$

とおくと

$$\mathcal{L} : \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \times S'(\mathbb{E}_n) \longrightarrow \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \times S'(\mathbb{E}_n)$$

なる operator と考えられる。ここに $G(x,x';\phi)$ は超準的に一般化された函数すなわち $\mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \times S'(\mathbb{E}_n)$ の元と考える。

$-g\gamma_5\phi(x)$ の項を消去するために,

$$G(x,x';\phi) = G_1(x,x';\phi)\, R_1^{-1}(\phi)$$

$$R_1^{-1}(\phi) = \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{{}^*\mathbb{R}^4} \phi(\xi)\, \vec{\Delta}(\xi,\xi')\, \phi(\xi')\, d\xi\, d\xi'\right)$$

とおくと, Lemma 3-4, Theorem 4-2-1 より

$$\left\{-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m + ig\gamma_5\int d\xi\, \Delta(x,\xi)\frac{\delta}{\delta\phi(\xi)}\right\} G_1(x,x';\phi) = \delta(x,x')R_1$$

ここで汎函数 Fourier 変換の公式 (Theorem 4-1-6) を用いると,

$$\left\{-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5\int d\xi\, \Delta(x,\xi)\lambda(\xi)\right\}(\mathcal{F}G_1)(x;x';\lambda) = \delta(x,x')\,\mathcal{F}R_1$$

$$\equiv R_2(\lambda)\,\delta(x,x') \qquad \cdots (5.3)$$

R_2を評価するために,

$$\phi(\xi) = \phi'(\xi) - \int \Delta(\xi,\xi')\phi(\xi')\, d\xi'$$

とおくと, Lemma 3-4 より

$$R_2(\lambda) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{*\mathbb{R}^4} \lambda(\xi)\Delta(\xi,\xi')\lambda(\xi')\,d\xi\,d\xi'\right\}$$

$$\times \int \exp\left\{\frac{i}{2}\int_{*\mathbb{R}^4} \phi'(\xi)\,\overset{-1}{\Delta}(\xi,\xi')\,\phi'(\xi')\,d\xi\,d\xi'\right\}\delta\left(\frac{\phi'}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$\equiv C \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{*\mathbb{R}^4} \lambda(\xi)\Delta(\xi,\xi')\lambda(\xi')\,d\xi\,d\xi'\right\}$$

ここに $C = |\det \overset{-1}{\Delta}|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(1+i)^{s}(1-i)^{n-s}\right]_n$ ．但し $\Delta_{pq} = \langle \Delta * h_p, h_q \rangle$ ，Δ は Klein-Gordon 方程式の Green 函数とするとき，$\mathbb{\Delta} = (\Delta_{p.q})_{|p|,|q|\le n}$ の正の固有値の数を s とする，$|\det\overset{-1}{\Delta}| \equiv [\,|\det \overset{-1}{\mathbb{\Delta}}|\,]_n$ 。

(5.3) 式において，$\Omega(\xi) = \int \Delta(\xi,\xi')\lambda(\xi')\,d\xi'$ という変数変換をすると，

$$\left[-i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5\Omega(x)\right]G_2(x,x';\Omega) = C\,\delta(x,x')$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{*\mathbb{R}^4}\Omega(\xi)\,\overset{-1}{\Delta}(\xi,\xi')\,\Omega(\xi')\,d\xi\,d\xi'\right\} \quad \cdots (5.4)$$

ここで $G_2(x,x';\Omega) \equiv (\mathcal{F}G_1)(x,x';\lambda)$

$G_3(x,x';\Omega)$ を

$$\left[-i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - g\gamma_5\Omega(x)\right] G_3(x,x';\Omega) = \delta(x,x') \quad \cdots (5.5)$$

すなわち外部場 $\Omega(x)$ の下での相互作用を考えないときの Green 函数とする。一方

$$G(x,x';\phi) = \overset{-1}{R_1}(\phi)\,(\overset{-1}{\mathcal{F}}G_1)(\phi)$$

$$= R_1^{-1}(\phi)\int G_2(x,x';\Omega)\exp\left\{-i\int \Omega(\xi)\vec{\Delta}^{-1}(\xi,\xi')\phi(\xi')d\xi d\xi'\right\}\delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right)\times|\det\vec{\Delta}|$$

(∵ Theorem 4-I-4)

$$= C|\det\vec{\Delta}|\, R_1^{-1}(\phi)\int G_3(x,x';\Omega)\,\delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{x\mathbb{R}^4}\Omega(\xi)\vec{\Delta}^{-1}(\xi,\xi')\Omega(\xi')d\xi d\xi' - i\int_{x\mathbb{R}^4}\Omega(\xi')\vec{\Delta}^{-1}(\xi,\xi')\phi(\xi')d\xi d\xi'\right\}$$

ここで $G(x,x')\equiv G(x,x';0)$ とおくと，

$$G(x,x') = c\,|\det\vec{\Delta}|\int G_3(x,x';\Omega)\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{x\mathbb{R}^4}\Omega(\xi)\vec{\Delta}^{-1}(\xi,\xi')\Omega(\xi')d\xi d\xi'\right\}$$
$$\times\,\delta\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

(4.5)式を一般の場合に解くには，$\mathbb{E}_n$ 上のスペクトル分解の定理を使うのが便利である。しかし紙面の都合上述べられないので簡単にとける場合のみを取扱う。

meson recoil が無視できる場合，$x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$ の函数はすべて $x_0=t$ の函数となり，(4.5)式は簡単にとけて

$$G_3(t,t') = S(t,t')\exp\left(-ig\int_{t'}^{t}\Omega(s)ds\right)$$

$$但し\quad \left(i\frac{\partial}{\partial t}+m\right)S(t,t') = \delta(t,t')$$

従って

$$G(t,t') = C|\det\vec{\Delta}|\, S(t,t')\exp\left\{\frac{i}{2}g^2\int_{t'}^{t}d\xi\int_{t'}^{t}d\xi'\Delta(\xi,\xi')\right\}$$

$$\times \int \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{{}^*\mathbb{R}^4} \Omega'(\zeta)\,\Delta^{-1}(\zeta,\zeta')\,\Omega'(\zeta')\,d\zeta\,d\zeta'\right\}\,\delta\left(\frac{\Omega'}{\sqrt{2\pi}}\right) \quad \text{注1)}$$

$$= c\,c'\,|\det\Delta^{-1}|\,\exp\left\{\frac{i}{2}g^2\int_{t'}^{t}d\zeta\int_{t'}^{t}d\zeta'\,\Delta(\zeta,\zeta')\right\}$$

ここに $\quad c\,c'\,|\det\Delta^{-1}| = |\det\Delta|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(1+i)^s(1-i)^{n-s}\right]_n \times$

$$|\det\Delta^{-1}|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(1-i)^s(1+i)^{n-s}\right]_n |\det\Delta^{-1}|$$

$$= [1]_n = 1.$$

ゆえに

$$G(t,t') = S(t,t')\exp\left\{\frac{i}{2}g^2\int_{t'}^{t}d\zeta\int_{t'}^{t}d\zeta'\,\Delta(\zeta,\zeta')\right\}$$

$\Delta(\zeta,\zeta')$として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \beta^2\right)\Delta(t,t';\vec{x},\vec{x}') = \delta(t,t')\,\delta(\vec{x},\vec{x}')$$

の解をとれば以前 Tomonaga[6)] によって得られた厳密解と一致する解を得ることができる。

<u>注意 5-1</u> 1) Schwinger 方程式を解く際にあらわれた積 $\phi(\zeta)\psi(\zeta)$ 等は ultraproduct の意味での積 $[\phi_n\psi_n]_n$ である。

2) Schwinger 方程式を超準解析で取扱うのは自然である。なぜかというと, fermion の Green 函数の場合

注1) $\Omega(\zeta) = \Omega'(\zeta) - g\int_{t'}^{t}\Delta(\zeta,\eta)\,d\eta$ という平行移動を行った。

$$U_k(x) = A_k^{ext}(x) - ie^2 \sum_{n,m} \int S_p\left(S^c(y-z)\,\gamma^m S^c(z-y)\gamma^n\right) D^c_{nk}(y-x) A_m^{ext}(z)\,dz\,dy$$

という量で汎函数微分 $\frac{\delta}{\delta U_k(x)}$ を行う。ところが S^c, $D^c_{n.k}$ は因果的Green函数，$A_k^{ext}(x)$は超函数であるから $U_k(x)$には，超函数の積，合成積が現われてくる。このような量を超函数の範囲内で考えることは不可能であるから，超函数を一般化した函数の理論が必要である。

我々の場合 $S^c(y-z)$ $D^c_{n.k}(y-x)$ は $S^c(y,z), D^c_{n.k}(y,x) \in \mathbb{E}^0_n({}^*\mathbb{R}^4 \times {}^*\mathbb{R}^4)$ と考え，$A_m^{ext}(z) \in \mathbb{E}^0_n({}^*\mathbb{R}^4)$ であるから $U_k(x)$は $U_k(x; A_m^{ext}) \in \mathbb{E}^0_n \times \mathbb{C}'(\mathbb{E}^0_n)$ とみなすことが出来る．したがって $U_k(x)$は超準的に一般化した函数の理論で取扱えることになる。

文献

1) G. Takeuti ; Proc. Jap. Academy 38, 414-418 (1961)

2) M.O. Farrukh ; Journal of Mathematical Physics vol. 16. NO.2 February 1975.

3) R. Kuratu ; Mem. Fac. Engi. Kyushu. Univ. val 25 (1965-1966)

4) Bogoliubov, N.N. and O.A. Parasiuk ; Acta Mathematica. 97. 227 (1957).

5) S.F. Edwards and R.E. Peierls ; Proc. Roy. Soc. (London) A224, 24. (1954)

6) S.I. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. Osaka 1. (1946).