数理解析研究所講究録
第 305 巻 1977 年 29-34

Bordisms and vector fields

広大 総合科学　　吉田敏男

closed m-manifold M^m 上の一次独立な vector fields の最大個数を Span M^m とかく. $w_i M^m$ を M^m の i-th. Stiefel-Whitney class とする.

“ Span $M^m \geqq k$ ならば, $w_i M^m = 0 \ (i \geqq m-k+1)$ ”

であるが, 逆は成立しない.

M^m が表わす m 次元 unoriented bordism group $\mathfrak{N}_m$ の元を $[M^m]_2$ とかく.

<u>問題</u>　$w_i M^m = 0 \ (i \geqq m-k+1)$ のとき,

$$\text{Span}\, N^m \geqq k \text{ 且 } [M^m]_2 = [N^m]_2$$

である closed m-manifold N^m が存在するか.

<u>定義 [1, P.431]</u>　$\mathfrak{N}_m \ni \alpha$ に対し,

$$\alpha \text{ fibers over } N^n \text{ with fiber } F^{m-n}$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ differentiable fibering of closed manifolds $\begin{array}{c} F^{m-n} \longrightarrow M^m \\ \downarrow \pi \\ N^n \end{array}$ s.t. $\alpha = [M^m]_2$

<u>Stong の予想 [1, p.440]</u> The set of classes $\alpha \in \mathfrak{N}_m$ fibered over $(S^1)^k$ is precisely the set of classes for which all numbers divisible by $w_m, w_{m-1}, \cdots, w_{m-k+1}$ are zero.

この予想が正しければ，問題は肯定的に解決される．$k = 1, 2, 4$ のとき，この予想は正しい [1, p.439].

<u>定理</u> $k \leqq 6$. closed m-manifold M^m に対し，

$$w_i M^m = 0 \quad (i \geqq m-k+1)$$

ならば，$\mathrm{Span}\, N^m \geqq k$ 且 $[M^m]_2 = [N^m]_2$ である closed m-manifold N^m が存在する．

証明は，後で示すように，次の補題と Stiefel-Whitney numbers の計算からえられる．

<u>補題 1 [1, p.434]</u> $k \geqq 2$. $RP(n_1) \times \cdots \times RP(n_k)$ から i 番目の成分への projection を p_i, $RP(n_i)$ 上の canonical line bundle を ξ_{n_i}. $RP(p_1^*\xi_{n_1} \oplus \cdots \oplus p_k^*\xi_{n_k})$ を $p_1^*\xi_{n_1} \oplus \cdots \oplus p_k^*\xi_{n_k}$ の projective space bundle. このとき，$RP(p_1^*\xi_{n_1} \oplus \cdots \oplus p_k^*\xi_{n_k})$ が $\mathfrak{N}_*$ で indecomposable であるための必要十分条件は

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \cdots + \binom{n+k-2}{n_k} \equiv 1 \bmod 2$$

ここで，$n = n_1 + \cdots + n_k$.

<u>補題 2 [cf. 1, p.432]</u> $k \geqq 2$. $RP(\xi_{n_1-1} \oplus 1) \times RP(n_2) \times \cdots \times RP(n_k)$ から i 番目の成分への projection を q_i, $RP(\xi_{n_1-1} \oplus 1)$ 上の canonical line bundle を λ. このとき，$RP(p_1^*\xi_{n_1} \oplus p_2^*\xi_{n_2} \oplus \cdots \oplus p_k^*\xi_{n_k})$ が $\mathfrak{N}_*$ で inde

-composable ならば, $RP(q_1^*\lambda\oplus q_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus q_k^*\xi_{n_k})$ もそうである。逆も成立する.

<u>証明</u> $\xi_{n_1-1}^{\perp}$ を trivial bundle $RP(n_1-1)\times R^{n_1}\longrightarrow RP(n_1-1)$ における ξ_{n_1-1} の orthogonal complement とする.

$$i\ :\ RP(\xi_{n_1-1}\oplus 1)\longrightarrow RP(\xi_{n_1-1}\oplus\xi_{n_1-1}^{\perp}\oplus 1)$$

$$\pi\ :\ RP(\xi_{n_1-1}\oplus\xi_{n_1-1}^{\perp}\oplus 1)=RP(n_1-1)\times RP(n_1)\longrightarrow RP(n_1)$$

をそれぞれ inclusion, trivial bundle の fiber 上への projection とする. このとき, $(\pi\circ i)^*\xi_{n_1}=\lambda$ であるから, 次の可換図がえられる.

$$\begin{tikzcd}
RP(q_1^*\lambda\oplus q_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus q_k^*\xi_{n_k}) \arrow[r, "\overline{(\pi\circ i)\times id.}"] \arrow[d, "\pi_2"'] & RP(p_1^*\xi_{n_1}\oplus p_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus p_k^*\xi_{n_k}) \arrow[d, "\pi_1"] \\
RP(\xi_{n_1-1}\oplus 1)\times RP(n_2)\times\cdots\times RP(n_k) \arrow[r, "(\pi\circ i)\times id."] & RP(n_1)\times RP(n_2)\times\cdots\times RP(n_k)
\end{tikzcd}$$

(π_1,π_2 は bundle projections, $\overline{(\pi\circ i)\times id}$ は自然な写像)

$X=RP(p_1^*\xi_{n_1}\oplus p_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus p_k^*\xi_{n_k})$, $Y=RP(q_1^*\lambda\oplus q_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus q_k^*\xi_{n_k})$ とおき, X,Y の s-classes をそれぞれ $s(X), s(Y)$ とかく. X,Y の total Stiefel-Whitney classes を調べて

$$(\overline{(\pi\circ i)\times id.})^*s(X)=s(Y)$$

となる. $(\overline{(\pi\circ i)\times id})^*$ は top 次元の Z_2 係数の cohomology 群の同型写像であることから示された.

$$RP(n_1,n_2,\cdots,n_k)=RP(p_1^*\xi_{n_1}\oplus p_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus p_k^*\xi_{n_k})$$

$$RP'(n_1,n_2,\cdots,n_k)=RP(q_1^*\lambda\oplus q_2^*\xi_{n_2}\oplus\cdots\oplus q_k^*\xi_{n_k})$$

とおく.

補題1,2を使って, indecomposable m-manifold Q_m $(m \neq 2^*-1)$ を次のようにとる.

(1) $Q_{8l+1} = RP'(4, \overbrace{7, \cdots, 7}^{l-1}, 3, 0)$ $(l \geqq 1)$, $\operatorname{Span} Q_{8l+1} \geqq 7l-1$

(2) $Q_{8l+5} = RP'(2, \overbrace{7, \cdots, 7}^{l}, 1, 0)$ $(l \geqq 0)$, $\operatorname{Span} Q_{8l+5} \geqq 7l+2$

(3) $Q_{2^p(2q+1)-1} = RP'(2^p, \overbrace{7, \cdots, 7}^{2^{p-2}q-1}, 3, 1, 0)$ $(p \geqq 2,\ q \geqq 1)$,

$\operatorname{Span} Q_{2^p(2q+1)-1} \geqq 7(2^{p-2}q)-3+\operatorname{Span} RP(2^p-1)$

(4) $Q_{8l+2} = RP(\overbrace{7, \cdots, 7}^{l}, 0, 0, 0)$ $(l \geqq 0)$, $\operatorname{Span} Q_{8l+2} \geqq 7l$

(5) $Q_{8l+4} = RP(\overbrace{7, \cdots, 7}^{l}, 1, 1, 0)$ $(l \geqq 0)$, $\operatorname{Span} Q_{8l+4} \geqq 7l+2$

(6) $Q_{8l+6} = RP(\overbrace{7, \cdots, 7}^{l}, 3, 0, 0, 0)$ $(l \geqq 0)$, $\operatorname{Span} Q_{8l+6} \geqq 7l+3$

(7) $Q_{16l} = RP(\overbrace{7, \cdots, 7}^{2l}, 0)$ $(l \geqq 1)$, $\operatorname{Span} Q_{16l} \geqq 14l$

(8) $Q_{16l+8} = RP(\overbrace{7, \cdots, 7}^{2l}, 3, 3, 0)$ $(l \geqq 0)$, $\operatorname{Span} Q_{16l+8} \geqq 14l+6$.

注意　$m = 2^p(2q+1)-1$ $(q \geqq 1)$ のとき, (1)と(2)は $p=1$ の場合, (3)は $p \geqq 2$ の場合, (4)〜(8)は $p=0$ の場合である.

Q_m $(m \neq 2^*-1)$ の積の単項式で, Span が5以下の可能性があるものは次のようになる.

(A) $2j$ 次元のとき

$$Q_2^j,\ Q_2^{j-2}Q_4,\ Q_2^{j-3}Q_6,\ Q_2^{j-4}Q_4^2,\ Q_2^{j-5}Q_5^2,\ Q_2^{j-5}Q_4Q_6.$$

(B) $2j+1$ 次元のとき

$$Q_2^{j-2}Q_5,\ Q_2^{j-4}Q_4Q_5,\ Q_2^{j-5}Q_5Q_6.$$

(A), (B) の manifolds の Stiefel-Whitney numbers を計算して

次の表がえられる．

(A)の場合

	Q_2^j	$Q_2^{j-2}Q_4$	$Q_2^{j-3}Q_6$	$Q_2^{j-4}Q_4^2$	$Q_2^{j-5}Q_5^2$	$Q_2^{j-5}Q_4Q_6$
w_{2j}	1	0	0	0	0	0
$w_{2j-2}w_2$		1	0	0	0	0
$w_{2j-3}w_3$			1	0	0	0
$w_{2j-4}w_4$				1	1	0
$w_{2j-5}w_5$				$j-4$	$j-5$	1

(B)の場合

	$Q_2^{j-2}Q_5$	$Q_2^{j-4}Q_4Q_5$	$Q_2^{j-5}Q_5Q_6$
$w_{2j-1}w_2$	1	0	0
$w_{2j-3}w_4$		1	0
$w_{2j-4}w_5$			1

$T_{10}=RP'(4,3,1)$ は indecomposable 10-manifold で，Span $T_{10}\geqq 7$ である．

<u>補題 3</u>　$[T_{10}]_2=[Q_2Q_4^2]_2+[Q_5^2]_2+[Q_4Q_6]_2+[Q_{10}]_2$ ．

<u>証明</u>　$[T_{10}]_2=a_1[Q_2^5]_2+a_2[Q_2^3Q_4]_2+a_3[Q_2^2Q_6]_2+a_4[Q_2Q_4^2]_2$

$$+a_5[Q_5^2]_2+a_6[Q_4Q_6]_2+a_7[Q_2Q_8]_2+a_8[Q_{10}]_2$$

とかける $(a_i=0,1)$．表から，$a_1=a_2=a_3=0$，$a_4=a_5=a_6$ となる．T_{10} は indecomposable であるから $a_8=1$ となる．故に，

$$[T_{10}]_2=a_4[Q_2Q_4^2]_2+a_4[Q_5^2]_2+a_4[Q_4Q_6]_2+a_7[Q_2Q_8]_2+[Q_{10}]_2 .$$

$$w_1^{10}(T_{10})=0,\quad w_1^{10}(Q_2Q_4^2)=0,\quad w_1^{10}(Q_5^2)=0,$$

$$w_1^{10}(Q_4Q_6)=0,\ w_1^{10}(Q_2Q_8)=\text{生成元},\ w_1^{10}(Q_{10})=0$$

から $a_7=0$ となる. また,

$$w_2^4(I_{10})w_1^2(I_{10})=0,\ w_2^4(Q_2Q_4^2)w_1^2(Q_2Q_4^2)=\text{生成元}$$

$$w_2^4(Q_5^2)w_1^2(Q_5^2)=0,\ w_2^4(Q_4Q_6)w_1^2(Q_4Q_6)=0,\ w_2^4(Q_{10})w_1^2(Q_{10})=\text{生成元}$$

から $a_4=1$ となる.

<u>定理の証明</u>

$k=6$ のとき示す. $k\leqq 5$ のときも同様.

奇数次元のとき:

$$[M^{2j+1}]_2=a[Q_2^{j-2}Q_5]_2+b[Q_2^{j-4}Q_4Q_5]_2+c[Q_2^{j-5}Q_5Q_6]_2+\sum[N^{2j+1}]_2$$

$$(a,b,c=0,1,\ \mathrm{Span}\,N^{2j+1}\geqq 6)$$

とかけるが, 表から $a=b=c=0$ となる.

偶数次元のとき:

同様に考えて,

$$[M^{2j}]_2=a[Q_2^{j-4}Q_4^2]_2+a[Q_2^{j-5}Q_5^2]_2+a[Q_2^{j-5}Q_4Q_6]_2+\sum[N^{2j}]_2$$

$$(a=0,1,\ \mathrm{Span}\,N^{2j}\geqq 6)$$

とかける. 故に補題3から

$$[M^{2j}]_2=a[Q_2^{j-5}I_{10}]_2+a[Q_2^{j-5}Q_{10}]_2+\sum[N^{2j}]_2.$$

Reference

[1] R.E. Stong, On fibering of cobordism classes, Trans. of Amer. Math. Soc., 178 (1973), 431–447.