数理解析研究所講究録
第305巻 1977年 35-49

例外リー群のループ空間の Z_2 係数 homology

京大 理学部 小島一元

G が compact, connected simple Lie 群であるとき、そのループ空間 ΩG の homology の計算については R. Bott が generating variety と呼ばれる homogenuous space を用いる方法を示し [4] $Sp(n)$ を除く古典群について $H_*(\Omega G)$ を Hopf algebra として完全に決定した。最近 T. Watanabe はこの方法を例外 Lie 群 G_2, F_4 について用い、$H_*(\Omega G)$, $H_*(\Omega G; Z_p)$ $(p=2,3)$ の Steenrod operation の dual operation を込めた意味での Hopf algebra structure を決定した。

一方、$H_*(\Omega G; Z_p)$ については Eilenberg-Moore spectral sequence を用いることによって、その ring structure を比較的容易に決定することができる。[7], [8]. そこで

<u>問題</u> $H_*(\Omega G; Z_2)$ を operational structure を込めて Hopf algebra として決定せよ。(G は E_6, E_7, E_8 の type をもつ simple Lie 群.)

ϕ が diagonal であるとき、$\bar{\Phi}(x) = \phi(x) - 1\otimes x - x\otimes 1$ とおき Sq^i_* を

$\langle Sq^i x, y\rangle = \langle x, Sq^i_* y\rangle$ ($x \in H^*(X;Z_2)$, $y \in H_*(X;Z_2)$, $\langle\ ,\ \rangle$ は Kronecker積)

で定義される oparation とするとき、

<u>結果</u> 適当な生成元を選べば、

(i) $H_*(\Omega E_6;Z_2)=\Lambda(x_2)\otimes Z_2[x_4, x_8, x_{10}, x_{14}, x_{16}, x_{22}]$,

$\bar\Phi(x_i)=0$ for $i=2, 10, 14, 22$. $\bar\Phi(x_4)=x_2\otimes x_2$,

$\bar\Phi(x_8)=x_2\otimes x_2\cdot x_4 + x_2\cdot x_4\otimes x_2 + x_4\otimes x_4$,

$\bar\Phi(x_{16})=x_2\otimes x_2\cdot x_4\cdot x_8 + x_2\cdot x_4\cdot x_8\otimes x_2 + x_4\otimes x_4\cdot x_8 + x_4\cdot x_8\otimes x_4$
$+ x_2\cdot x_4\otimes x_2\cdot x_8 + x_2\cdot x_8\otimes x_2\cdot x_4 + x_8\otimes x_8$,

$Sq^2_* x_4 = x_2$, $Sq^2_* x_8 = x_2\cdot x_4$, $Sq^4_* x_8 = x_4$, $Sq^2_* x_{10} = x_4^2$, $Sq^4_* x_{14} = x_{10}$ $Sq^2_* x_{16} = x_{14} + x_2\cdot x_4\cdot x_8$

$Sq^4_* x_{16} = x_4\cdot x_8$, $Sq^8_* x_{16} = x_8$, $Sq^2_* x_{22} = x_{10}^2$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$.

(ii) $H_*(\Omega E_7;Z_2)=\Lambda(x_2, x_4, x_8)\otimes Z_2[x_{10}, x_{14}, x_{16}, x_{18}, x_{22}, x_{26}, x_{34}]$,

$\bar\Phi(x_i)=0$ for $i=2, 10, 14, 18, 22, 26, 34$. $\bar\Phi(x_4)=x_2\otimes x_2$,

$\bar\Phi(x_8)=x_2\otimes x_2\cdot x_4 + x_2\cdot x_4\otimes x_2 + x_4\otimes x_4$,

$\bar\Phi(x_{16})=x_2\otimes x_2\cdot x_4\cdot x_8 + x_2\cdot x_4\cdot x_8\otimes x_2 + x_4\otimes x_4\cdot x_8 + x_4\cdot x_8\otimes x_4$
$+ x_2\cdot x_4\otimes x_2\cdot x_8 + x_2\cdot x_8\otimes x_2\cdot x_4 + x_8\otimes x_8$,

$Sq^2_* x_4 = x_2$, $Sq^2_* x_8 = x_2\cdot x_4$, $Sq^4_* x_8 = x_4$, $Sq^4_* x_{14} = x_{10}$, $Sq^2_* x_{16} = x_{14} + x_2\cdot x_4\cdot x_8$,

$Sq^4_* x_{16} = x_4\cdot x_8$, $Sq^8_* x_{16} = x_8$, $Sq^2_* x_{22} = x_{10}^2$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$, $Sq^4_* x_{26} = x_{22}$, $Sq^2_* x_{34} = x_{16}^2$,

$Sq^{16}_* x_{34} = x_{18}$.

(iii) $H_*(\Omega E_8;Z_2)=\Lambda(x_2, x_4, x_8, x_{14})\otimes Z_2[x_{16}, x_{22}, x_{26}, x_{28}, x_{34}, x_{38}, x_{46}, x_{58}]$,

$\bar\Phi(x_i)=0$ for $i=2, 14, 22, 34, 38, 46, 58$. $\bar\Phi(x_4)=x_2\otimes x_2$,

$\bar\Phi(x_8)=x_2\otimes x_2\cdot x_4 + x_2\cdot x_4\otimes x_2 + x_4\otimes x_4$,

$$\bar{\Phi}(x_{16}) = x_2 \otimes x_2 \cdot x_4 \cdot x_8 + x_2 \cdot x_4 \cdot x_8 \otimes x_2 + x_4 \otimes x_4 \cdot x_8 + x_4 \cdot x_8 \otimes x_4$$
$$+ x_2 \cdot x_4 \otimes x_2 \cdot x_8 + x_2 \cdot x_8 \otimes x_2 \cdot x_4 + x_8 \otimes x_8$$

$Sq_*^2 x_4 = x_2$; $Sq_*^2 x_8 = x_2 \cdot x_4$, $Sq_*^4 x_8 = x_4$, $Sq_*^2 x_{16} = x_{14} + x_2 \cdot x_4 \cdot x_8$, $Sq_*^4 x_{16} = x_4 \cdot x_8$,

$Sq_*^8 x_{16} = x_8$, $Sq_*^8 x_{22} = x_{14}$, $Sq_*^4 x_{26} = x_{22}$, $Sq_*^2 x_{28} = x_{26}$, $Sq_*^2 x_{34} = x_{16}^2$, $Sq_*^4 x_{38} = x_{34}$,

$Sq_*^2 x_{46} = x_{22}^2$, $Sq_*^8 x_{46} = x_{38}$, $Sq_*^2 x_{58} = x_{28}^2$,

但し、x_iは degree iの生成元を表わし、他の $Sq_*^{2^i}$(生成元)はすべて0.

計算はGの3-connective fibre space $\widehat{G}$およびその loop space $\Omega\widehat{G}$を考えるとき、まず$H^*(\widehat{G};Z_2)$は oparation付き Hopf algebra として完全に決定でき、$H_*(\Omega G;Z_2)$から求めた$H_*(\Omega\widehat{G};Z_2)$と Eielenberg-Moore spectral sequence を用いて比較すると$H_*(\Omega\widehat{G};Z_2)$の oparational structureがかなりわかりこれをもとにして$H_*(\Omega\widehat{G};Z_2)$の diagonal structureをほとんど決めることができる。さらに$\Omega\widehat{G} \to \Omega G \to K(Z,2)$なる fibration を考えると$H_*(\Omega G;Z_2)$を oparation付き Hopf algebraとして大略決定することができる。これだけではわからない oparation についてはさらに別の killing を考えることによっておよび unstable homotopy theoryを用いることにより決定可能である。ここで unstable homotopy theory を必要とする relation $Sq_*^2 x_{22} = x_{10}^2$は次の Watanabe の結果からも示される。

<u>$H_*(\Omega F_4;Z_2)$ (Watanabe)</u>　適当に生成元を選べば、

$$H_*(\Omega F_4;Z_2) \cong \Lambda(x_2) \otimes Z_2[x_4, x_{10}, x_{14}, x_{22}]$$

$\bar{\Phi}(x_i) = 0$ for $i = 2, 10, 14, 22$,　$\bar{\Phi}(x_4) = x_2 \otimes x_2$

$Sq_*^2 x_4 = x_2,\ Sq_*^2 x_{10} = x_4^2,\ Sq_*^4 x_{14} = x_{10},\ Sq_*^8 x_{22} = x_{14}.$

§ 1. 3-connective fibre space

Gを compact connected simple Lie 群とすると次の結果はよく知られている。

Prop.1.1 $\pi_0(G)=\pi_1(G)=\pi_2(G)=0 \quad \pi_3(G)\cong Z$ よってまた

Prop.1.2 $x_3 \in H^3(G)\cong Z$ を generator とするとき $x_3 : G \to K(Z,3)$ の homotopy fibre $\tilde{G}$ は associative H-space で $i:\tilde{G}\to G$ なる inclusion および x_3 は H-map.

$H^*(\tilde{G};Z_2)$ $(G=F_4, E_6, E_7, E_8)$ は Kachi によって計算されているがその基本となるのは $H^*(G;Z_2)$ に関する Araki および Shikata の結果である。[1], [2].

Theorem 1.3 $H^*(F_4;Z_2)\cong Z_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4)\otimes\Lambda(Sq^2\alpha_3,\ \alpha_{15}, Sq^8\alpha_{15})$,

$H^*(E_6;Z_2)\cong Z_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4)\otimes\Lambda(Sq^2\alpha_3, Sq^4Sq^2\alpha_3, \alpha_{15}, Sq^8Sq^4Sq^2\alpha_3, Sq^8\alpha_{15})$,

$H^*(E_7;Z_2)\cong Z_2[\alpha_3, Sq^2\alpha_3, Sq^4Sq^2\alpha_3]/(\alpha_3^4, (Sq^2\alpha_3)^4, (Sq^4Sq^2\alpha_3)^4)$

$\otimes\ \Lambda(\alpha_{15}, Sq^8Sq^4Sq^2\alpha_3,\ Sq^8\alpha_{15},\ Sq^4Sq^8\alpha_{15})$,

$H^*(E_8;Z_2)\cong Z_2[\alpha_3, Sq^2\alpha_3, Sq^4Sq^2\alpha_3, \alpha_{15}]/(\alpha_3^{16}, (Sq^2\alpha_3)^8, (Sq^4Sq^2\alpha_3)^4\ \alpha_{15}^4)$

$\otimes\ \Lambda(Sq^8Sq^4Sq^2\alpha_3,\ Sq^8\alpha_{15},\ Sq^4Sq^8\alpha_{15},\ Sq^2Sq^4Sq^8\alpha_{15})$

α_i は degree i の generator. しかもよく知られた inclusion $F_4 \hookrightarrow E_6 \hookrightarrow E_7 \hookrightarrow E_8$ に関しそれぞれ大きな群の中では totally non-homologus to zero になっている。以下では $Sq^j\alpha_k=\alpha_{j+k}$ と略記して表すことにする。

<u>Theorem 1.4</u> (Thomas) $H^*(G;Z_2)$ $(G=E_6, E_7, E_8)$ で $Sq^2\alpha_{15}=Sq^8Sq^4Sq^2\alpha_3$.

$i:\tilde{G}\to G$ を fibre の inclusion とし $j:\tilde{G}\to\tilde{G}'$ を group の inclusion $G\to G'$ から induce される Hopf-map とする。

<u>Theorem 1.5</u> $H^*(\tilde{F}_4;Z_2)\cong Z_2[x_8]\otimes\Delta(x_9, x_{11}, x_{15}, x_{23})$

$H^*(\tilde{E}_6;Z_2)\cong Z_2[x_{32}]\otimes\Delta(x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{33})$

$H^*(\tilde{E}_7;Z_2)\cong Z_2[x_{32}]\otimes\Delta(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, x_{33}, x_{35})$

$H^*(\tilde{E}_8;Z_2)\cong Z_2[x_{15}, x_{32}]/(x_{15}^4)\otimes\Delta(x_{23}, x_{27}, x_{29}, x_{33}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$

x_i は degree i の generator, Δ は simple system を表わす。さらに $i^*(\alpha_{15})=x_{15}$, $i^*(\alpha_{23})=x_{23}$ (G が F_4, E_6, E_7, E_8) $i^*(\alpha_{27})=x_{27}$ $(G=E_7, E_8)$ $i^*(\alpha_{29})=x_{29}$ $(G=E_8)$ でありさらに同じ degree をもつ x_i は j^* で対応している。

<u>Theorem 1.6</u> $Sq^4x_{11}=x_{15}$. これは H.Kachi[5]の中で示された。

<u>Prop. 1.7</u> Theorem 1.5 の x_i はすべて primitive にとれる。

(証) 例えば $G=E_8$ のとき $\bar{\Phi}(x_i)=0$, $i\neq 47$ は次元の関係より明らか。次元の理由により $\bar{\Phi}(x_{47})=a\,x_{15}\otimes x_{32}+b\,x_{32}\otimes x_{15}$ である。$(Sq\otimes Sq)\bar{\Phi}=\bar{\Phi}\circ Sq$ なので $\bar{\Phi}(Sq^8x_{47})=a\,x_{23}\otimes x_{32}+b\,x_{32}\otimes x_{23}$ ところが次元の理由より $Sq^8x_{47}=c\,x_{23}\cdot x_{32}$ だから $a=b=c$ よって x_{47} として $x_{47}+c\,x_{15}\cdot x_{32}$ ととればこれは primitive. 他の場合にも同様にして決めることができる。■

<u>Prop. 1.8</u> Theorem 1.5 で Δ は Λ とかきなおせる。

これは前 Prop. より容易にわかる。

<u>Prop. 1.9</u> Theorem 1.5のz_iはuniversally transgressive.

∵ 実際 $H^*(B\tilde{F}_4;Z_2)\cong Z_2[B_9, B_{10}, B_{12}, B_{16}, Sq^8B_9, B_{24}, Sq^{16}Sq^8B_9, \cdots]$,

$H^*(B\hat{E}_6;Z_2)\cong Z_2[B_{10}, B_{12}, B_{16}, B_{24}, B_{33}, B_{34}, Sq^{32}B_{33}, Sq^{64}Sq^{32}B_{33}, \cdots]$,

$H^*(B\hat{E}_7;Z_2)\cong Z_2[B_{12}, B_{16}, B_{20}, B_{24}, B_{28}, B_{33}, B_{34}, B_{36}, Sq^{32}B_{33}, \cdots]$,

$H^*(B\hat{E}_8;Z_2)\cong Z_2[B_{16}, B_{24}, B_{28}, B_{30}, B_{31}, B_{33}, B_{34}, B_{36}, B_{40}, B_{48}, Sq^{32}B_{33}, \cdots]$,

よってComparison theoremを用いて明らか。■

<u>Prop 1.10</u> Theorem 1.5において.

(i) $H^*(\tilde{F}_4;Z_2)$で$Sq^1z_8=z_9$, $Sq^2z_9=z_{11}$, $Sq^1z_{15}=0$

(ii) $H^*(\hat{E}_6;Z_2)$で$Sq^2z_9=z_{11}$, $Sq^8z_9=z_{17}$, $Sq^2z_{15}=0$, $Sq^{16}z_{17}=z_{33}$, $Sq^1z_{32}=z_{33}$,

(iii) $H^*(\hat{E}_7;Z_2)$で$Sq^8z_{11}=z_{19}$, $Sq^4z_{15}=0$, $Sq^4z_{19}=0$, $Sq^{16}z_{19}=z_{35}$, $Sq^8z_{27}=0$,

$Sq^1z_{32}=z_{33}$, $Sq^2z_{33}=z_{35}$.

(iv) $H^*(\hat{E}_8;Z_2)$で$Sq^{16}z_{23}=0$, $Sq^8z_{27}=0$, $Sq^1z_{29}=z_{15}^2$, $Sq^4z_{29}=0$, $Sq^1z_{32}=z_{33}$

$Sq^2z_{33}=z_{35}$, $Sq^4z_{35}=z_{39}$, $Sq^8z_{39}=z_{47}$.

∵ 証明の方法のみ述べると、まず$\hat{E}_8$においてfibration $\hat{E}_8\to E_8\xrightarrow{p}K(Z,3)$の$Z_2$-cohomology Serre spectral sequenceを考える。Theorem 1.5とProp. 1.9より明らかに$\tau(z_i)=0$ for $i=15,23,27,29$, $\tau(z_{15}^2)=0$ 同様に$\tau(z_i)\neq 0$ for $i=32,33,35,39,47$. 一方$H^*(K(Z,3);Z_2)=Z_2[u_3, Sq^2u_3, Sq^4Sq^2u_3, Sq^8Sq^4Sq^2u_3, \cdots]$だから明らかに$p^*u_3=\alpha_3$でありtransgressionでkillされるべき元は$H^*(E_8;Z_2)$のrelationに対応するu_3^{16}, $(Sq^2u_3)^8$, $(Sq^4Sq^2u_3)^4$, $(Sq^8Sq^4Sq^2u_3)^2$, と$Sq^{16}Sq^8Sq^4Sq^2u_3$. よって$\tau(z_{32})=Sq^{16}Sq^8Sq^4Sq^2u_3$, $\tau(z_{33})=(Sq^8Sq^4Sq^2u_3)^2$, $\tau(z_{35})=(Sq^4Sq^2u_3)^4$, $\tau(z_{39})=(Sq^2u_3)^8$ $\tau(z_{47})=u_3^{16}$

あとはAdem relationと $\tau\circ Sq^i = Sq^i\circ\tau$ によって結果をうる。$\widehat{G}=\widehat{E}_7$ のときはこの結果とnaturalityにより $Sq^1 y_{32}=y_{33}$, $Sq^2 y_{33}=y_{35}$, $Sq^4 y_{15}=0$ $Sq^8 y_{27}=0$ などが得られ他のものについては $\widehat{E}_8$ のときと同様にすればよい。$\widehat{E}_6, \widehat{F}_4$ のときも同様。∎

$H^*(\widehat{G};Z_2)$ $(G=F_4,E_6,E_7,E_8)$ はProp. 1.7によりprimitively generated. Sq^i はprimitivityを保つからSteenrod algebraの構造より $H^*(\widehat{G};Z_2)$ のoperational structureを完全に決めるためには Sq^{2^i}(generator)を決めればよいのでTheorem 1.6とProp. 1.10ですべてがつくされる。

§2. $H_*(\Omega G;Z_2)$, $H_*(\Omega\widehat{G};Z_2)$

ΩG はhomotopy commutative H-spaceであり従って $H_*(\Omega G;Z_2)$ は可換環であるが、Bottによりさらに $H_*(\Omega G)$ がevenでfreeしかもringとして有限生成であることが示されている。Borelの定理により $H_*(\Omega G;Z_2)\cong(\bigotimes_{i\in I}A_i)\otimes(\bigotimes_{j\in J}B_j)\otimes(\bigotimes_{k\in K}C_k)$, $A_i\cong\Lambda(x_i)$, $B_j\cong Z_2[y_j]/(y_j^{2^{n_j}})$ $C_k\cong Z_2[z_k]$ I, J, Kはfinite set. すると $\mathrm{Ext}_{H_*(\Omega G;Z_2)}(Z_2,Z_2)\cong$ $(\bigotimes_{i\in I}Z_2[sx_i])\otimes(\bigotimes_{j\in J}(\Lambda(sy_j)\otimes Z_2[\theta y_j]))\otimes(\bigotimes_{k\in K}\Lambda(sz_i))$ ここで $s\alpha$ はbideg $=(1,\deg\alpha)$, θy_j はbideg $=(2,2^{n_j}\deg y_j)$ なる元。

さて ΩG のEilenberg-Moore spectral sequenceはHopf algebra spectral sequenceになっている。すなわち各 E_r termはbigraded, bicommutative, biassociative Hopf algebraで d_r はderivativeかつcoderivative. また各 $s\alpha$, $\theta\beta$ はprimitive (E_2-termで)で E_2-term, E_∞-termのHopf algebra structureはgeometricに定義されたものとcompatible.

<u>Theorem 2.1</u> $H_*(\Omega F_4; Z_2) \cong \Lambda(x_2) \otimes Z_2[x_4, x_{10}, x_{14}, x_{22}]$,

$H_*(\Omega E_6; Z_2) \cong \Lambda(x_2) \otimes Z_2[x_4, x_8, x_{10}, x_{14}, x_{16}, x_{22}]$,

$H_*(\Omega E_7; Z_2) \cong \Lambda(x_2, x_4, x_8) \otimes Z_2[x_{10}, x_{14}, x_{16}, x_{18}, x_{22}, x_{26}, x_{34}]$

$H_*(\Omega E_8; Z_2) \cong \Lambda(x_2, x_4, x_8, x_{14}) \otimes Z_2[x_{16}, x_{22}, x_{26}, x_{28}, x_{34}, x_{38}, x_{46}, x_{58}]$

x_i は degree i の generator.

(:) 証明の大略のみ述べる。$H_*(\Omega G; Q)$ を考えると,

$H_*(\Omega F_4; Q) \cong Q[x_2, x_{10}, x_{14}, x_{22}]$

$H_*(\Omega E_6; Q) \cong Q[x_2, x_8, x_{10}, x_{14}, x_{16}, x_{22}]$

$H_*(\Omega E_7; Q) \cong Q[x_2, x_{10}, x_{14}, x_{18}, x_{22}, x_{26}, x_{34}]$

$H_*(\Omega E_8; Q) \cong Q[x_2, x_{14}, x_{22}, x_{26}, x_{34}, x_{38}, x_{46}, x_{58}]$ が知られている。 今、$H_*(\Omega G; Z_2)$ に $x^{2^n}=0$ なる type の relation があると $H_*(\Omega G; Q)$ が polynomial だから $H_*(\Omega G; Z_2)$ に $2^n \cdot \deg x$ の degree をもつ indecomposable element y があるはず。ところが bideg $sy = (1, 4k)$ differential が coderivative であることから, $d_n(sy)=0$ を次元の関係から示せる。よって $H^*(G; Z_2)$ に degree $4k+1$ の indecomposable element を得る。逆に $H^*(G; Z_2)$ に $4k+1$ の indecomposable element があったとすると再び spectral sequence 中の Hopf algebra structure を用いることによりこれらは filtration degree 1 の元に対応していて $H_*(\Omega G; Q)$ をみると $G=E_6$ の x_8, x_{16} 以外は $(4k+2)$ dim のもののみだから $H^*(G; Z_2)$ の $4k+1$ dim の indecomposable elem. は $H^*(E_6; Z_2)$ の α_9, α_{17} を除いて $H^*(\Omega G; Z_2)$ の relation に対応していて α_9, α_{17} が sx_8, sx_{16} に対応していることが容

易にわかる。これによって結果を得る。cf. T. Petrie [7]. ∎

次に $H_*(\Omega\tilde{G};Z_2)$を求める。Borelの定理により，x_iのdual elementを x_i^*と書くとき，

$H^*(\Omega G;Z_2)\cong Z_2[x_2^*]/(x_2^{*2^p})\otimes A$ の形をしているが，

$H^2(\Omega G)\cong Z$ の generator を表わす map を $f:\Omega G\to K(Z,2)$ とし

$H_*(K(Z,2);Z_2)\cong\Lambda(u_2,u_4,\cdots,u_{2k},\cdots)$（ここで u_{2k} は v_2が $H^*(K(Z,2);Z_2)$ の2次元の generator であるとき v_2^kのdualを表わす。）とするとき，

<u>Lemma 2.2</u> Theorem 2.1で $x_{2k}\in H_*(\Omega G;Z_2)$ を次の式をみたすようにとれる： $f_*x_{2k}=u_{2k}$ for $G=F_4$, $k=1,2$, or $G=E_6,E_7,E_8$ $k=1,2,3,4$.

☺ 例えば $K(Z,2)$ の Eilenberg–Moore s.s. と ΩG のそれとを比較すればよい。∎

によれば $G=F_4$ のとき $p\geqq 2$，$G=E_6,E_7,E_8$のとき $p\geqq 4$ がわかる。ところが例えば $G=F_4$ のとき $p\geqq 3$ とすると $x_2^{*2^2}\neq 0$ この元は $H^*(\Omega G;Z_2)$で primitive したがって $QH_*(\Omega F_4;Z_2)$ に8次元の non zero element を得るがこれは Theorem 2.1に反す。同様にして $G=E_6,E_7$ E_8のときは $p=4$ であることがえられる。

ここで $S^1\to\Omega\tilde{G}\to\Omega G$ なる fibration を用いれば Gysin sequence より明らかに結果を得ることができる；

Prop. 2.3 $H_*(\Omega\hat{F}_4; Z_2) \cong \Lambda(z_7)\otimes Z_2[z_8, z_{10}, z_{14}, z_{22}]$,

$H_*(\Omega\hat{E}_6; Z_2) \cong \Lambda(z_{31})\otimes Z_2[z_8, z_{10}, z_{14}, z_{16}, z_{22}, z_{32}]$,

$H_*(\Omega\hat{E}_7; Z_2) \cong \Lambda(z_{31})\otimes Z_2[z_{10}, z_{14}, z_{18}, z_{22}, z_{26}, z_{32}, z_{34}]$,

$H_*(\Omega\hat{E}_8; Z_2) \cong \Lambda(z_{14}, z_{31})\otimes Z_2[z_{22}, z_{26}, z_{28}, z_{32}, z_{34}, z_{38}, z_{46}, z_{58}]$

∵ 先程の Gysin sequence により Λ を Δ でかきかえた結果は明らかである。もし $z_7^2\neq 0$ in $H_*(\Omega\hat{F}_4;Z_2)$ ならば次元の理由で $z_7^2=z_{14}$ $\Omega i:\Omega\hat{G}\to\Omega G$ を考えると $\Omega i_* z_7=0$, $\Omega i_* z_{14}=x_{14}$ よりこれはありえない。$z_{31}^2=0$ in $H_*(\Omega\hat{G};Z_2)$ for $G=E_6,E_7,E_8$, $z_{14}^2=0$ in $H_*(\Omega\hat{E}_8;Z_2)$ も同様に naturality からわかる。■

この証明はさらに次のことも示している。

Prop. 2.4 Theorem 2.1 および Prop. 2.3 において

(i) $G=F_4$, $\Omega i_* z_7=0$, $\Omega i_* z_8=x_4^2$, $\Omega i_* z_{10}=x_{10}$, $\Omega i_* z_{14}=x_{14}$, $\Omega i_* z_{22}=x_{22}$,

(ii) $G=E_6$, $\Omega i_* z_{31}=0$, $\Omega i_* z_8=x_4^2$, $\Omega i_* z_{10}=x_{10}$, $\Omega i_* z_{14}=x_{14}$, $\Omega i_* z_{16}=x_8^2$,

$\Omega i_* z_{22}=x_{22}$, $\Omega i_* z_{32}=x_{16}^2$

(iii) $G=E_7$, $\Omega i_* z_{31}=0$, $\Omega i_* z_{10}=x_{10}$, $\Omega i_* z_{14}=x_{14}$, $\Omega i_* z_{18}=x_{18}$, $\Omega i_* z_{22}=x_{22}$,

$\Omega i_* z_{26}=x_{26}$, $\Omega i_* z_{32}=x_{16}^2$, $\Omega i_* z_{34}=x_{34}$.

(iv) $G=E_8$, $\Omega i_* z_{14}=x_{14}$, $\Omega i_* z_{31}=0$, $\Omega i_* z_{22}=x_{22}$, $\Omega i_* z_{26}=x_{26}$, $\Omega i_* z_{28}=x_{28}$,

$\Omega i_* z_{32}=x_{16}^2$, $\Omega i_* z_{34}=x_{34}$, $\Omega i_* z_{38}=x_{38}$, $\Omega i_* z_{46}=x_{46}$ $\Omega i_* z_{58}=x_{58}$

としてよい。

次に $\Omega\hat{G}$ に関する Eilenberg-Moore spectral sequence を考えると明らかに：

Prop 2.5　Theorem 2.1 と Prop. 2.3 において σ を homology suspension x^* を x の dual element とすると

(i) $\sigma(z_7)=y_8^*$, $\sigma(z_8)=y_9^*$, $\sigma(z_{10})=y_{11}^*$, $\sigma(z_{14})=y_{14}^*$, $\sigma(z_{22})=y_{22}^*$ for $G=F_4$.

(ii) $\sigma(z_{31})=y_{32}^*$, $\sigma(z_8)=y_9^*$, $\sigma(z_{10})=y_{11}^*$, $\sigma(z_{14})=y_{15}^*$, $\sigma(z_{16})=y_{17}^*$, $\sigma(z_{22})=y_{23}^*$

$\sigma(z_{32})=y_{33}^*$, for $G=E_6$

(iii) $\sigma(z_{31})=y_{32}^*$, $\sigma(z_{10})=y_{11}^*$, $\sigma(z_{14})=y_{15}^*$, $\sigma(z_{18})=y_{19}^*$, $\sigma(z_{22})=y_{23}^*$, $\sigma(z_{26})=y_{27}^*$,

$\sigma(z_{32})=y_{33}^*$, $\sigma(z_{34})=y_{35}^*$ for $G=E_8$.

(iv) $\sigma(z_{14})=y_{15}^*$, $\sigma(z_{31})=y_{32}^*$, $\sigma(z_{22})=y_{23}^*$, $\sigma(z_{26})=y_{27}^*$, $\sigma(z_{28})=y_{29}^*$,

$\sigma(z_{32})=y_{33}^*$, $\sigma(z_{34})=y_{35}^*$, $\sigma(z_{38})=y_{39}^*$, $\sigma(z_{46})=y_{47}^*$

よく知られているように σ は Pontryagin product を annihilate する。また $\sigma\circ Sq^i=Sq^i\circ\sigma$ であるから $H_*(\Omega\hat{G};Z_2)$ における Sq^i_* operation が mod decomposable できまる。ところで

Lemma 2.6　Prop. 2.3, 2.4, 2.5 において.

(i) z_{22} in $\hat{G}=\hat{F}_4, \hat{E}_6$, (ii) z_{26}, z_{34} in $\hat{G}=\hat{E}_7$, (iii) z_{26}, z_{46}, z_{58} in $\hat{G}=\hat{E}_8$ を primitive にとることができる。

が次元の関係により容易にわかるのでこの z_{22}, z_{26}, z_{34} z_{46}, z_{58} の選び方のもとで $H_*(\Omega\hat{G};Z_2)$ の元を次のように定義する。

Definition. (i) $G=F_4$, $z_{14}'=Sq^8_*z_{22}$, $z_{10}'=Sq^4_*z_{14}'$, $z_8'=Sq^2_*z_{10}'$, $z_7'=Sq^1_*z_8'$,

(ii) $z_{14}'=Sq^8_*z_{22}$, $z_{10}'=Sq^4_*z_{14}'$, $z_8'=Sq^2_*z_{10}'$, $z_{16}'=Sq^{16}_*z_{32}$,

(iii) $z_{22}'=Sq^4_*z_{26}$, $z_{14}'=Sq^8_*z_{22}'$, $z_{10}'=Sq^4_*z_{14}'$, $z_{32}'=Sq^2z_{34}$, $z_{31}'=Sq^1z_{32}'$

$z_{18}'=Sq^{16}_*z_{34}$.

(iv) $z_{22}' = Sq^4_* z_{26}$, $z_{14}' = Sq^8_* z_{22}'$, $z_{38}' = Sq^8_* z_{46}$, $z_{34}' = Sq^4_* z_{38}'$, $z_{32}' = Sq^2_* z_{34}'$

$z_{31}' = Sq^1_* z_{32}'$. (**Remark.** これらの元は $\Omega j: \Omega\tilde{G} \to \Omega G$ でうまく対応している。)

それで x_i をうまくとれば Prop 2.3, Prop 2.4, Prop 2.5 が成立するようにして z_i' を z_i のかわりに使ってよいことがわかる。

<u>Prop 2.7</u> Prop.2.3 で $H_*(\Omega \hat{E}_6; Z_2)$ の z_{16}, z_{32} および $H_*(\Omega \hat{E}_7; Z_2)$ の z_{28} 以外は primitive. さらに $\bar{\phi}(z_{28}) = z_{14} \otimes z_{14}$.

(∵) 上のことから $\bar{\phi}(z_{28})$ のみ問題であるが $Sq^2_* z_{28} = z_{26} +$ decomposable であり 26次元には decomposable がないことから $Sq^2_* z_{28} = z_{26}$ よって上から $Sq^8_* Sq^4_* Sq^2_* z_{28} = z_{14}$ Adem relation より $Sq^{14}_* z_{28} = z_{14}$ より $\bar{\phi}(z_{28}) = z_{14} \otimes z_{14}$ は明らか。

また上のことと <u>Prop. 2.4</u> を用いて naturality により

<u>Prop 2.8</u> $H_*(\Omega G; Z_2)$ で ring の generator x_i を適当に選ぶと、

(i) $G = F_4$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$, $Sq^4_* x_{14} = x_{10}$, $Sq^2_* x_{10} = x_4^2$, $Sq^2_* x_4 = x_2$

(ii) $G = E_6$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$, $Sq^8_* x_{16} = x_8$, $Sq^4_* x_{14} = x_{10}$, $Sq^2_* x_{10} = x_4^2$, $Sq^4_* x_8 = x_4$, $Sq^2_* x_4 = x_2$.

(iii) $G = E_7$, $Sq^2_* x_{34} = x_{16}^2$, $Sq^{16}_* x_{34} = x_{18}$, $Sq^4_* x_{26} = x_{22}$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$, $Sq^8_* x_{18} = x_{10}$, $Sq^8_* x_{16} = x_8$, $Sq^4_* x_{14} = x_{10}$, $Sq^4_* x_8 = x_4$, $Sq^2_* x_4 = x_2$.

(iv) $G = E_8$ $Sq^8_* x_{46} = x_{38}$, $Sq^4_* x_{38} = x_{34}$, $Sq^2_* x_{34} = x_{16}^2$, $Sq^2_* x_{28} = x_{26}$, $Sq^4_* x_{26} = x_{22}$, $Sq^8_* x_{22} = x_{14}$, $Sq^8_* x_{16} = x_8$, $Sq^4_* x_8 = x_4$, $Sq^2_* x_4 = x_2$.

また prop.2.7, Prop 2.4 を用いると naturality によって

Prop. 2.9 x_4, x_8, x_{16}, x_{28} 以外は primitive で

$$\phi(x_4) = x_2\otimes x_2,\ \phi(x_8) = x_2\otimes x_2\cdot x_4 + x_2\cdot x_4\otimes x_2 + x_4\otimes x_4,$$

$$\phi(x_{16}) = x_2\otimes x_2\cdot x_4\cdot x_8 + x_2\cdot x_4\cdot x_8\otimes x_2 + x_2\cdot x_4\otimes x_2\cdot x_8 + x_2\cdot x_8\otimes x_2\cdot x_4$$
$$+ x_4 x_8\otimes x_4 + x_4\otimes x_4\cdot x_8 + x_8\otimes x_8,\quad \phi(x_{28}) = x_{14}\otimes x_{14}$$

∵ Lemma 2.2 のあとで述べたことにより $x_4^* = (x_2^*)^2$, $x_8^* = (x_2^*)^4$, $x_{16}^* = (x_2^*)^8$ だから最初の 3 つの formula がでる。最後のは明らか。

Prop. 2.10 $Sq^2_* x_8 = x_2\cdot x_8$, $Sq^4_* x_{16} = x_4\cdot x_8$, $Sq^2_* x_{16} = x_{14} + x_2\cdot x_4\cdot x_8$

∵ Prop 2.9 より E_8 で示せば充分であることがわかる。
$H^*(\Omega E_8; Z_2) \cong Z_2[x_2^*]\otimes\Lambda(x_{14}^*)$ for $\dim\leq 16$ であり Thomas の結果と合わせて結果がでる。■

$H_*(\Omega G; Z_2)$ の operation をすべて決定するには
$Sq^{2^i}_*$(generator) を調べればよい。まだ調べていないのは、
$Sq^2_* x_{22} = x_{10}^2$ in $H_*(\Omega G; Z_2)$ for $G = F_4, E_6, E_7$ および
$Sq^2_* x_{46} = x_{22}^2$, $Sq^2_* x_{58} = x_{28}^2$ in $H_*(\Omega E_8; Z_2)$

最初に述べたように最後の 2 つはそれぞれ E_8 を $H^*(E_8; Z_2)$ の元 α_{23} および α_{29} によって killing した spaces を考えて求めることができる。これに関して次の問題がある。

問題 適当な条件下で $0\neq x\in H^n(X; Z_2)$ s.t. $Sq^1 x\neq 0$ として $x^2=0$ とするとき $\exists z\in H^{2n-2}(\Omega X; Z_2)$ s.t. $Sq^2 z\neq 0$ (かつ $\phi(z) = \sigma^* x\otimes\sigma^* x$) となるか。 Remark $\Omega\bar{X}$ があるいは $\bar{X}$ の cohomology の状態がわかっていればこの問題はとけるが今の case には役だつ。

（ここで $\bar{X}$ は $x : X \to K(Z_2, n)$ の homotopy fibre.）

この場合すなわち $X = E_8$, $x = \alpha_{23}$ or α_{29} のときにはこの問題はとける。$Sq^1\alpha_{23} \neq 0$, $Sq^1\alpha_{29} \neq 0$ については Kono [6] により．

Theorem 2.11. 適当な $\alpha_{15} \in H^{15}(E_8; Z_2)$ を選ぶと，

$$\bar{\phi}(\alpha_{15}) = \alpha_3 \otimes \alpha_3^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_5^2 + \alpha_9 \otimes \alpha_3^2, \quad \bar{\phi}(\alpha_{23}) = \alpha_3 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_{17} \otimes \alpha_3^2$$

$$\bar{\phi}(\alpha_{29}) = \alpha_5 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_9 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_{17} \otimes \alpha_3^4.$$

よって $\bar{\phi} \circ Sq = (Sq \otimes Sq) \circ \bar{\phi}$ より $\bar{\phi}(Sq^1\alpha_{23}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^2$,

$\bar{\phi}(Sq^1\alpha_{29}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_5^2 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^4$ ところが $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_9$ は明らかに primitive．だから $\bar{\phi}(Sq^1\alpha_{23} - \alpha_3^2 \cdot \alpha_9^2) = \bar{\phi}(Sq^1\alpha_{29} - \alpha_{15}^2) = 0$　24, 30 次元の primitive element はないから $Sq^1\alpha_{23} = \alpha_3^2\alpha_9^2$, $Sq^1\alpha_{29} = \alpha_{15}^2$．すると先程の z の dual z^* はそれぞれの場合に x_{22}^2 + indecomposable or x_{28}^2 + indecomposable よって x_{22}^2 or x_{28}^2．x_{22}, x_{28} の dual を x_{22}^*, x_{28}^* とすればこれらは primitive な元であるから，$Sq^2 x_{22}^*$, $Sq^2 x_{28}^*$ も primitive ところで 24, 30 次元の primitive はないのでこれらは 0．よって $\bar{\phi}(Sq^2 z) = 0$ かいえて $Sq^2 z$ の dual は indecomposable．ところが $H_*(\Omega E_8; Z_2)$ の 46, 58 次元の indecomposable elem. は x_{46} + dec., x_{58} + dec．したがって $Sq^2_* x_{58} = x_{28}^2$ or $Sq^2_* x_{46} = x_{22}^2$ がわかる。

最後の $Sq^2_* x_{22} = x_{10}^2$ については，essential にはもし $Sq^2_* x_{22} = 0$ とすれば $e^{10} \xrightarrow{Sq^4} e^{14} \xrightarrow{Sq^8} e^{22}$ なる complex を $\tilde{E}_6$ および $\Omega\tilde{E}_6$ の Z_2 係数 cohomology をもとにして構成することができるが，このような complex の存在は Toda による球面の homotopy に矛盾するのを示す。

文中引用したreferenceのみを掲げれば.

[1] S. Araki. Cohomology modulo 2 of the compact exceptional groups, J. Math. Osaka Univ. 12 (1961), 43-65.

[2] S. Araki - Y. Shikata, Cohomology mod 2 of the compact exceptional group E_8, Proc. Japan Acad, 57 (1961), 619-622.

[3] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups., Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 251-281.

[4] R. Bott, The space of loop on Lie groups, Mich, Math. J. 5 (1958) 35-61.

[5] H. Kachi, Homotopy groups of compact Lie groups E_6, E_7 and E_8, Nagoya Math. J. 32 (1968) 109-139.

[6] A. Kono, Hopf algebra structure and cohomology operation of the mod 2 cohomology of exceptional Lie groups. Japanese J. Math.

[7] T. Petrie The weakly complex bordism of Lie groups, Ann of Math. 88 (1968), 371-402.

[8] M. Rothenberg - N. Steenrod The cohomology of the classifying spaces of H-spaces, Bull. American Math. Soc. 71 (1965) 872-875.

[9] H. Toda. Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals of Math. Studies 49, Princeton Univ. Press, 1962.

[10] E. Thomas Exceptional Lie groups and Steenrod squares, Mich. Math. J. 11 (1964) 151-156.