数理解析研究所講究録
第 318 巻 1978 年 41-49

Teichmüller 空間論への函数環の応用

東理大・理　　宮原 靖

最近，Riemann面の moduli の理論に函数環や微分空間の理論を応用する試みがなされている（Rochberg，Marden，Minda etc.）。例えば，Rochberg の方法は次の通りである。

$\mathcal{S}$ をコンパクトな境界付 Riemann 面の全体から成る集合とする．$\bar{S} \in \mathcal{S}$ に対し，その内部を S，境界を ∂S で表す．$\bar{S}$ の種数を p，境界成分の個数を q とし，$N = 2p + q - 1$ とおく．S において解析的，かつ $\bar{S}$ において連続な函数の全体を $A(S)$ で表すとき，これは一様ノルムにより Banach環をなす．$\bar{S}$，$\bar{S}' \in \mathcal{S}$ に対して，$A(S)$ から $A(S')$ の上への連続な1対1線型写像の全体を $L(A(S), A(S'))$ で表す．$\bar{S}$ と $\bar{S}'$ が同位相ならば，$L(A(S), A(S')) \neq \phi$ なることが知られている．$T \in L(A(S), A(S'))$ に対して

$$c(T) = \|T\|\|T^{-1}\|$$

とおく．つねに $C(T) \geqq 1$ が成立つ．また，$T/\|T\|$ が等長写像であるのは $C(T)=1$ なるときに限る．

$z \in S$，$z' \in S'$ に対し，ある $\varepsilon > 0$ 及びある $T \in L(A(S), A(S'))$ があって，すべての $f \in A(S)$ に対して

$$|f(z) - (Tf)(z')| \leqq \varepsilon \min(\|f\|, \|Tf\|)$$

が成立つとき，z と z' は T に関して ε-related であるという．

$\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$ に対して

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = \inf\{\log C(T) \mid T \in L(A(S), A(S'))\}$$

とおくとき，これは $\bar{S}$ と $\bar{S}'$ の間の距離を与える．（正確には S と S' の等角同値類の間の距離である．）距離の公理をみたすことの証明は次のもの以外は容易である．

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = 0 \Rightarrow S \text{ と } S' \text{ は等角同値である．}$$

これは次のように言い換えられる．

定理1．$\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$ に対して

$$\inf\{C(T) \mid T \in L(A(S), A(S'))\} = 1$$

ならば，S と S' は等角同値である．

これは Rochberg によりなされたが（[1]），その証明は間接的なものであった．S と S' の間の等角写像を具体的に構成することにより，これを直接に証明することも可能である．その方法は後で述べる定理3の証明においても用いられるので，ここでは述べない．また，この結果自体，函数環の問題

としても興味深い．更に，Rochberg は次の結果を証明した（[1]，[2]）．

定理2．$\bar{S} \in \mathcal{S}$ の Riemann 空間において，距離 $d(\cdot,\cdot)$ の定める位相は Teichmüller 距離の定める位相と同値である．

このように，$c(T)$ が1に近いような $T \in L(A(S), A(S'))$ が存在すれば，S と S' は等角同値に近い状態にあると考えられるが，これに関連して次の結果が示される．これは，自己同型 $T \in L(A(S), A(S))$ について，$c(T)$ が1に十分近いときは，T は S の1つの自己等角写像により引起こされる $A(S)$ の自己同型に近いということを示している．

定理3．$\bar{S} \in \mathcal{S}$ に対して，$N = 2p + q - 1 \geqq 2$ とする．十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ 及び S の任意の相対コンパクトな部分領域 D に対して，次の条件をみたす定数 $d > 1$ が存在する．$T1 = 1$ かつ $c(T) < d$ なる任意の $T \in L(A(S), A(S))$ に対して S の自己等角写像 w が唯一つ定まり，すべての $z \in D$ につき，z と $w(z)$ は T に関して ε-related である．

この結果を証明するために少し準備をしておく．$\bar{S} \in \mathcal{S}$ とする．$\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_p, \beta_p$ はそれぞれ S 上の単純閉曲線

!!

であって，これらは homologically independent modulo ∂S であるとする．しかも，$i \neq j$ のとき

$$\alpha_i \cap \alpha_j = \phi, \quad \beta_i \cap \beta_j = \phi, \quad \alpha_i \cap \beta_j = \phi,$$

かつ α_i と β_i は唯一点で交わるものとする．S を $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_p, \beta_p$ に沿って切ることにより得られる領域を S_0 とする．即ち，$S_0 = S - \bigcup_{j=1}^{p}(\alpha_j \cup \beta_j)$．$S_0$ にすべての α_j, β_j の上の点の定める境界要素をすべて付加した集合を S_0^* で表す．S_0^* には自然な位相が定められる．次に，D を S の相対コンパクトな部分領域とするとき，$\overline{D} - \bigcup_{j=1}^{p}(\alpha_j \cup \beta_j)$ に $\overline{D} \cap \{\bigcup_{j=1}^{p}(\alpha_j \cup \beta_j)\}$ の点が定める境界要素をすべて付加して得られる集合を D^* で表す．D^* は S_0^* の部分集合である．

定理2を証明するために，次の Lemma が必要である．

Lemma. $\overline{S} \in \mathcal{S}$，$D$ を S の任意の相対コンパクトな部分領域とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の条件をみたす $d > 1$ が存在する．$\overline{S'} \in \mathcal{S}$ とするとき，$T1 = 1$ かつ $c(T) < d$ なる $T \in L(A(S), A(S'))$ が存在するならば，D^* から S' の中への連続写像 w_T が存在して，すべての $s \in D^*$ につき，s と $w_T(s)$ は T に関して ε-related である．

証明は省略する．

さて，定理2を証明しよう．$N \geq 2$ だから S の自己等角写像は有限個しか存在しない．それを $w_1, \cdots, w_M$ とする．

任意の$\varepsilon>0$及びSの任意の相対コンパクトな部分領域Dを与える．このとき$d>1$があって，$T1=1$かつ$c(T)<d$なる任意の$T\in L(A(S),A(S))$に対して，あるj $(1\leqq j\leqq M)$が対応して，すべての$z\in D$及びすべての$f\in A(S)$につき

$$|f(z)-(Tf)(w_j(z))|\leqq\varepsilon\min(\|f\|,\|Tf\|)$$

を示せばよい．これが成立たないと仮定すると，ある$\varepsilon>0$及びある相対コンパクトな部分領域Dに対して，$d_n\to1$なる列$\{d_n\}$があって次の性質をみたす．各nにつき，$T_n1=1$かつ$c(T_n)<d_n$なる$T_n\in L(A(S),A(S))$が存在して，各j $(1\leqq j\leqq M)$に対しある$f_{jn}\in A(S)$及びある$z_{jn}\in D$が

(1) $$|f_{jn}(z_{jn})-(T_nf_{jn})(w_j(z_{jn}))|>\varepsilon\|f_{jn}\|$$

または

(2) $$|f_{jn}(z_{jn})-(T_nf_{jn})(w_j(z_{jn}))|>\varepsilon\|T_nf_{jn}\|$$

をみたす．

今，$\{S_n\}$をSの近似とし，$\varepsilon_n\to0$なる正数列$\{\varepsilon_n\}$をとる．Lemmaにおいて$\varepsilon=\varepsilon_n$，$D=S_n$とすることにより$S_n^*$から$S$の中への連続写像$w_{T_n}$が存在して，各点$\zeta\in S_n^*$と$w_{T_n}(\zeta)$は$T_n$に関して$\varepsilon_n$-relatedであるとしてよい．$S_0^*$及び$S$上にそれぞれ適当な距離を導入しておく．このとき，任意のコンパクト集合K $(\subset S_0^*)$に対して番号n_0があって，$\{w_{T_n}\mid n\geqq n_0\}$は$K$上で同程度連続であることが，

46

集合$\{w_{T_n}(\zeta) \mid \zeta \in K,\ n=1,2,\cdots\}$が$\partial S$から離れていること及び積分表示式を用いて証明される。従って$\{w_{T_n}\}$はS_0^*上の正規族である。そこで，部分列を選んで番号をつけ変えることにより，ある連続写像$w: S_0^* \to S$に対して，S_0^*の任意のコンパクト部分集合において一様に$\lim_{n\to\infty} w_{T_n} = w$としてよい。各点$\zeta \in S_n^*$と$w_{T_n}(\zeta)$が$\varepsilon_n$-relatedであることを用いて，この写像$w$が$S$の自己等角写像であることが証明される。即ち，ある$j\ (1 \leq j \leq M)$に対して$w = w_j$となる。従って，この$j$に対し，

(3) $\lim_{n\to\infty} w_{T_n} = w_j$ uniformly on every compact subset of S_0^*.

このjについて，(1)または(2)のいずれかがすべてのnに対して成立つと仮定してもよい。また，ある$z_0 \in \overline{D}$に対し，$z_{jn} \to z_0\ (n \to \infty)$としてよい。更に，$f_{jn}/\|f_{jn}\|$及び$(T_n f_{jn})/\|f_{jn}\|$の一様有界性より，$S$上で広義の一様に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{jn}}{\|f_{jn}\|} = f_0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n f_{jn}}{\|f_{jn}\|} = g_0$$

としてもよい。ここに，f_0, g_0はS上のある解析函数である。

さて，(1)がすべてのnに対して成立っているとすれば，

$$\left| \frac{f_{jn}(z_{jn})}{\|f_{jn}\|} - \frac{(T_n f_{jn})(w_j(z_{jn}))}{\|f_{jn}\|} \right| > \varepsilon.$$

$n \to \infty$ として次の不等式を得る；

(4) $$|f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \geqq \varepsilon.$$

一方，Lemma により，n が十分大きいならば，

$$|f_{jn}(z_{jn}) - (T_n f_{jn})(w_{T_n}(z_{jn}))| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\|f_{jn}\|.$$

従って (3) により

$$|f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る．これは (4) に矛盾する．

(2) がすべての n に対して成立っているときも，同様に矛盾を生ずる．

これで条件をみたす自己等角写像 w の存在が示された．

最後に w の一意性を証明する．一意性が成立たないと仮定すると，$\varepsilon_n \to 0$ なる正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 及び $T_n 1 = 1$ かつ $c(T_n) \to 1$ なる $T_n \in L(A(S), A(S))$ が存在して，ある j，k について ($j \neq k$)，すべての $z \in D$ 及びすべての $f \in A(S)$ に対し，

(5) $$\begin{cases} |f(z) - (T_n f)(w_j(z))| \leqq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|), \\ |f(z) - (T_n f)(w_k(z))| \leqq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|) \end{cases}$$

が成立つ．そこで，$w_j(z_1) \neq w_k(z_1)$ なる $z_1 \in D$ をとると，(5) により，すべての $f \in A(S)$ に対して

$$\begin{aligned} &|f(w_j(z_1)) - f(w_k(z_1))| \\ &\leqq |f(w_j(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| + |f(w_k(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| \end{aligned}$$

$\leqq 2\varepsilon_n \|f\|.$

$n\to\infty$とすれば，すべての$f\in A(S)$に対して

$$f(w_j(z_1)) = f(w_k(z_1))$$

となる．$A(S)$は点を分離するから，これは矛盾である．かくして一意性が示された．（証明終）

定理3の応用として，fとTfの零点の間の関係を示す次の結果が得られる．

定理4．$S\in\mathcal{S}$に対して，$N=2p+q-1\geqq 2$とする．$f_0\in A(S)$を任意とする．十分小さな任意の$\varepsilon>0$及び$f_0\neq 0$ on $\mathrm{Bd}\,D$のようなSの任意の相対コンパクト部分領域Dに対して次の性質をみたす定数$d>1$が存在する：

$T\in L(A(S),A(S))$が$T1=1$及び$c(T)<d$をみたすならば，f_0のDにおける零点の個数はTf_0の$w(D)$における零点の個数に等しい．ここで，wは定理3により一意に定まるSの自己等角写像である．更に，$w(D)$におけるTf_0の零点の集合$N_{Tf_0}(w(D))$からDにおけるf_0の零点の集合$N_{f_0}(D)$の上への写像θがあって，すべての$\zeta\in N_{Tf_0}(w(D))$に対して，$\theta(\zeta)$とζはTに関してε-relatedである．しかもこのような写像θは唯一つしかない．

参　考　文　献

[1] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces, Duke Math. J., 40 (1973), 41–52.

[2] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces II, Ibid., 42 (1975), 167–182.