数理解析研究所講究録
第 319 巻 1978 年 26-38

$U(n)/T^n$上のS^1作用による不動点集合について

岡山大 理　外間 研二
河野 進

1．$G=S^1$ (circle group) とし，XをG作用をもったパラコンパクト空間とする。Xとその不動点集合Fとの関係をみる為に次に定義する同変コホモロジーを用いる。

$E_G \longrightarrow B_G$ を普遍主G束とし，その同伴束

$$X\times_G E_G \xrightarrow{\pi} B_G$$

の全空間をX_Gで表わす。このとき，XのΛ係数の同変コホモロジー環を

$$H_G^*(X;\Lambda)=H^*(X_G;\Lambda)$$

で定義する（$\Lambda=\mathbb{Q},\mathbb{Z}$）。$H_G^*(X;\Lambda)$ はπ^*を通して$H^*(B_G;\Lambda)=\Lambda[t]$加群と成る。

注意．i）精確には$E_G^N \longrightarrow B_G^N$をN普遍G束として

$$H_G^n(X;\Lambda)=\varprojlim_N H^n(X\times_G E_G^N;\Lambda)$$

で定義する。

ii）Alexander-Spanier, Čech または Sheaf コホモロジー

を用いる。

完全列

(1.1) $\cdots \longrightarrow H_G^i(X;Q) \xrightarrow{\phi^*} H_G^i(F;Q) \xrightarrow{\delta} H_G^{i+1}(X,F;Q) \longrightarrow \cdots$

に於いて，Vietoris-Beagle mapping theorem によって自然な同型

$$H_G^{i+1}(X,F;Q) \cong H^{i+1}(X/G,F;Q)$$

が存在するから，Xが適当な条件（例えばXの被覆次元が有限）を満たすとき，十分大きなiに対して，$H_G^{i+1}(X,F;Q)=0$となる。このとき，(1.1) を$Q[t]$の素イデアル$\{0\}$で局所化することによって，次の同型が得られる。

(1.2) $(\phi^*)_{\{0\}} : H_G^*(X;Q) \cong H_G^*(F;Q)_{\{0\}}$

$F_G = F \times B_G$ であるから $H_G^*(F;Q)_{\{0\}}$ は $H^*(F)\otimes Q(t)$ （$Q(t)$はQ上の有理函数体）と同型である。次の補題は，$\dim_Q H^*(F) < \infty$ のとき，$H^*(F;Q)$が（次数つきでない）環として，$H_G^*(X;Q)$により一意的に決定されることを示している。

補題 1.3. A，B をQ上の有限次元多元環とする。このとき，

$$A\otimes Q(t) \underset{Q(t)}{\cong} B\otimes Q(t) \Longleftrightarrow A \underset{Q}{\cong} B$$

証明．$\Leftarrow$は明らかである。$\Rightarrow$を示す為に $\phi : A\otimes Q(t) \longrightarrow B\otimes Q(t)$ を$Q(t)$上の多元環としての同型とする。$\{x_1,\cdots,x_\ell\}$をAのQ上の基とすると，$\{x_1\otimes 1,\cdots,x_\ell\otimes 1\}$ は $A\otimes Q(t)$

の $Q(t)$ 上の基である。$\{y_1, \cdots, y_r\}$ を B の Q 上の基とする。仮定より，$r = l$ 。$(a_{ij}(t)) \in GL(l, Q(t))$，$C_{ij}^k$，$D_{ij}^k \in Q$ とし，

$$\phi(x_i \otimes 1) = \sum_{j=1}^{l} y_j \otimes a_{ij}(t)$$

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^{l} C_{ij}^k x_k$$

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^{l} D_{ij}^k y_k$$

とする。このとき ϕ は準同型写像だから，

$$\sum_{1 \leqq h, k \leqq l} a_{ih}(t)\, a_{jk}(t)\, D_{hk}^m = \sum_{k=1}^{l} C_{ij}^k a_{km}(t)$$

が成立する $(1 \leqq i, j, m \leqq l)$ 。$t_0 \in Q$ で $(a_{ij}(t_0)) \in GL(l, Q)$ をみたすものが存在する。この t_0 について，$\phi_0 : A \longrightarrow B$ を

$$\phi_0(x_i) = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}(t_0) y_j$$

で定義すれば，ϕ_0 は Q 上の線型空間としての同型であり，

$$\sum_{1 \leqq h, k \leqq l} a_{ih}(t_0)\, a_{jk}(t_0)\, D_{hk}^m = \sum_{k=1}^{l} C_{ij}^k a_{km}(t_0)$$

$(1 \leqq i, j, m \leqq l)$ が成立するから，環としての同型でもある。

2. G 空間 X のコホモロジー環が次数 2 の元で生成される場合 $H^*(F;Q)$ は $H_G^*(X;Q)$ により次数つき環として一意的に決定される。簡単の為，以下 X は閉多様体とし，$\Lambda = Z$ または $\Lambda = Q$ として，

(2.1) $H^*(X;\Lambda) \cong \Lambda[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]/(k_1, \cdots, k_m)$

が成立するものとする。ここに $\deg \alpha_i = 2$ で，k_i は $\alpha_1, \cdots,$

α_nに関する斉次多項式である。このとき，$\pi: X_G \longrightarrow B_G$ のスペクトル系列は退化するから，$i: X \hookrightarrow X_G$ として，

$$i^*: H_G^*(X;\Lambda) \longrightarrow H^*(X;\Lambda)$$

は全射である。$x_i \in H_G^2(X;\Lambda)$ を $i^*(x_i)=\alpha_i$ を満たす元とする（$i=1,\cdots,n$）。このとき，同型

(2.2) $H_G^*(X;\Lambda) \cong \Lambda[t, x_1, \cdots, x_n]/J$

が成り立つ。ここに

$$J = (p_1(x_1,\cdots,x_n) - tf_1, \cdots, p_m(x_1,\cdots,x_n) - tf_m)$$

で，$f_i \in \Lambda[t, x_1, \cdots, x_n]$ は $\deg f_i = \deg p_i - 1$ を満たす斉次多項式である。

$F_1, \cdots, F_k$ を X の不動点集合 F の連結成分とする。$H_G^*(X;Q)$ は自由 $H^*(B_G;Q)$ 加群であるから，(1.2) より，

$$\phi^*: H_G^*(X;Q) \longrightarrow H_G^*(F;Q) = \bigoplus_{j=1}^{k} H^*(F_j;Q) \otimes H^*(B_G;Q)$$

は単射であり，十分高い次数で全射でもある。各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\phi^*(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (b_{ij} + c_{ij}t), \quad b_{ij} \in H^2(F_j;Q), \quad c_{ij} \in Q$$

とおく。ϕ^* が十分高い次数で全射であることから，次の(1), (2) が得られる。

(1) $H^*(F_j;Q)$ は $b_{1j}, \cdots, b_{nj}$ で生成される。

(2) $j \neq l$ ならば $(c_{1j}, \cdots, c_{nj}) \neq (c_{1l}, \cdots, c_{nl})$。

$I_j \subset Q[x_1, \cdots, x_n]$ を，すべての $f \in J$ について

$$f(t, x_1+c_{1j}t, \cdots, x_n+c_{nj}t)$$

の t 中の係数全体で生成されるイデアルとし，

$$\mathfrak{q}_j \subset \mathbb{Q}[t, x_1, \cdots, x_n]$$

を $g \in \mathfrak{q}_j$ が $g(t, x_1+c_{1j}t, \cdots, x_n+c_{nj}t) \in I_j[t]$ と同値である様なイデアルとする。

・定理 2.3、 i) $H^*(F_j;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]/I_j$

ii) $J = \bigcap_{j=1}^{k} \mathfrak{q}_j$ （準素分解）

ここに $\sqrt{\mathfrak{q}_j} = (x_1 - c_{1j}t, \cdots, x_n - c_{nj}t)$。

証明 i) 準同型写像

$$h : \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow H^*(F_j;\mathbb{Q})$$

を $h(x_i) = b_{ij}$ $(i = 1, \cdots, n)$ によって定義する。(1)より，h は全射だから，$\mathrm{Ker}(h) = I_j$ を示せばよい。I_j の定義より $\mathrm{Ker}(h) \supset I_j$ は明らかである。$f \in \mathrm{Ker}(h)$ とする。(2)より，各 $l \neq j$ に対して，自然数 $i(l)$ で $c_{i(l)l} \neq c_{i(l)j}$ をみたすものが存在する，N を十分大きな自然数とし，

$$g = f(x_1 - c_{1j}t, \cdots, x_n - c_{nj}t)\prod_{l \neq j}(x_{i(l)} - c_{i(l)l}t)^N$$

とおく。$\phi^*(g(t, x_1, \cdots, x_n)) = 0$ より $g \in J$。また，

$$g(t, x_1+c_{1j}t, \cdots, x_n+c_{nj}t)$$

の t に関する最高次の係数は，f の 0 でない定数倍だから $f \in I_j$。従って $\mathrm{Ker}(h) \subset I_j$。

ii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]/I_j = \dim_{\mathbb{Q}} H^*(F_j;\mathbb{Q}) < \infty$ より $\sqrt{I_j}$

$=(x_1,\cdots,x_n)$であり，I_jは準素イデアルである。従って$I_j[t]$も準素イデアルであり，$\sqrt{I_j[t]}=(x_1,\cdots,x_n)$ 。定義より，q_jも準素イデアルであり，

$$\sqrt{q_j}=(x_1-c_{1j}t,\cdots,x_n-c_{nj}t)$$

が得られる。φ^*は単射だから，$J=\bigcap_{j=1}^{k} q_j$ は明らか。（終）

ii)より，等式

$$\sqrt{J}=\sqrt{\bigcap_{j=1}^{k} q_j}=\bigcap_{j=1}^{k}\sqrt{q_j}=\bigcap_{j=1}^{k}(x_1-c_{1j}t,\cdots,x_n-c_{nj}t)$$

が成り立つから，(2)より，斉次イデアルJの射影的多様体は相異なるk点$(1,c_{11},\cdots,c_{n1}),\cdots,(1,c_{1k},\cdots,c_{nk})$より成ることが分かる。従って

$$(1,c_{1j},\cdots,c_{nj})\longleftrightarrow F_j$$

によりJの零点とFの連結成分は1対1に対応することが分かる。これとi)より，J（従って$H_G^*(X;Q)$）が与えられればI_j（$j=1,\cdots,k$）（従って$H^*(F;Q)$）が決定されることが分かる。従って，Fのコホモロジー環の満たすべき条件は，Jに対する条件に還元される。

3．$A=(p_1,\cdots,p_n)\subset Q[x_1,\cdots,x_n]$を，斉次イデアルで，$\sqrt{A}=(x_1,\cdots,x_n)$を満たすものとする。

$$f_i\in Q[t,x_1,\cdots,x_n]$$

を$\deg f_i=\deg p_i-1$を満たす斉次多項式とし（$i=1,\cdots,n$），

$$J=(h_1-tf_1,\cdots,h_n-tf_n)$$

とおく。このときJの零点の個数は，高々$\prod_{i=1}^{n}\deg h_i$である。$\xi^{(j)}=(1,\xi_1^{(j)},\cdots,\xi_n^{(j)})$　$(j=1,\cdots,k)$を，Jの零点とする。$\xi_i^{(j)}\in Q$　$(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,k)$を仮定する。斉次イデアル$I_j\subset Q[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathfrak{q}_j\subset Q[t,x_1,\cdots,x_n]$を，$c_{ij}$の代りに$\xi_i^{(j)}$を用いて，2節に於けるのと同様に定義し，

$$m_j=\dim_Q Q[x_1,\cdots,x_n]/I_j$$

とおく。n個の斉次多項式$h_1-tf_1,\cdots,h_n-tf_n$のu-終結式R(u)は，次の様に分解される。

$$R(u)=C\cdot\prod_{j=1}^{k}(u+\xi_1^{(j)}u_1+\cdots+\xi_n^{(j)}u_n)^{\rho_j}$$

ここに$u,u_1,\cdots,u_n$は不定元，Cは定数，ρ_jは$\xi^{(j)}$の重複度である。このとき，Jは純イデアルだから，準素分解

$$J=\bigcap_{j=1}^{k}\mathfrak{q}_j$$

で$\sqrt{\mathfrak{q}_j}=(x_1-c_{1j}t,\cdots,x_n-c_{nj}t)$をみたすものが存在し，

$$\rho_j=\dim_Q Q[x_1,\cdots,x_n]/a_{\mathfrak{q}_j}$$

が成り立つ。ここに

$$a:Q[t,x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow Q[x_1,\cdots,x_n]$$

は$f\in Q[t,x_1,\cdots,x_n]$について

$$a_f=f(1,x_1,\cdots,x_n)$$

で定義される準同型写像である。このことから，次の定理は容易に示される。

定理3.1. 次のi)〜iv)は同値である。

i) $\sum_{j=1}^{k} m_j = \prod_{i=1}^{n} \deg p_i$

ii) $J = \bigcap_{j=1}^{k} q_j$ (準素分解)

iii) $m_j = \rho_j \quad (j=1,\cdots,k)$

iv) 準同型写像

$$\phi ; Q[t, x_1, \cdots, x_n]/J \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{k} Q[x_1,\cdots,x_n]/I_j \otimes Q[t]$$

を $\phi(x_i) = \bigoplus_{j=1}^{k} (x_i + \xi_i^{(j)} t) \quad (i=1,\cdots,n)$ で定義すれば，ϕ は準射であり，十分高い次数で全射である。

(2,3)，(3.1) より

定理3.2. X を G 作用をもった閉多様体とし，(2,1) を $m=n$ に対して満たすものとする。このとき，J を2節で定義したイデアルとすると，J の零点と不動点集合 F の連結成分との間の1対1対応で，零点の重複度が，対応する連結成分のコホモロジー環の Q 上の次元に一致する様なものが存在する。

4．ここでは，X は (2,1) を $\Lambda = Z$ に対して満たすものとする。$B_G = K(Z,2)$ より，連続写像 $\mu : X \longrightarrow (B_G)^n$ で

$$\mu^*(1\times\cdots\times 1\times \underset{i}{t}\times 1\times\cdots\times 1) = \alpha_i \quad (i=1,\cdots,n)$$

を満たすものが存在する。$p : E \longrightarrow X$ を $(B_G)^n$ 上の普遍 T^n 束の誘導束とする。$\Phi : G\times E \longrightarrow E$ を X 上の G 作用の bundle lifting とする。各 $g \in p^{-1}(F_j)$，$s \in G$ に対して $t \in T^n$ で

$$\Phi(s, g) = g t$$

を満たすものが存在する。このとき，対応 $s \longrightarrow t$ によって連結準同型写像 $h_j : G \longrightarrow T^n$ が定義される。これは g の取り方に依存しない。$A_j = (a_{1j}, \cdots, a_{nj})$ を，すべての $s \in G$ に対して

$$h_j(s) = (s^{a_{1j}}, \cdots, s^{a_{nj}})$$

を満たすものとする。$\mathbb{C}$ 上の T^n 作用を $t = (t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，$t \cdot z = t_i z$ を満たすものとして定義し，

$$\eta_i : E \times_{T^n} \mathbb{C} \longrightarrow X$$

を $p : E \longrightarrow X$ の同伴束とする。また，

$$\xi_i : E \times_G E_G / T^n \longrightarrow X \times_G E_G$$

を $E \times_G E_G \longrightarrow X \times_G E_G$ の同伴束とする。p の定義より，α_i は η_i の Euler 類であり，$x_i \in H_G^2(X; \mathbb{Q})$ を ξ_i の Euler 類とすると $\eta_i = i^*(\xi_i)$ より

$$i^*(x_i) = \alpha_i$$

が満たされる。τ を B_G 上の標準直線束とすると

$$p_1 : F_j \times B_G \longrightarrow B_G$$

$$p_2 : F_j \times B_G \longrightarrow F_j$$

を，それぞれ第2，第1成分への射影として束同型

$$\xi_i|F_j \times B_G = p_1^*(\tau^{a_{ij}}) \otimes p_2^*(\eta_i|F_j)$$

が存在する。従って，

$$\phi^*(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (b x_j + a_{ij} t)$$

が成立する。(2,3)より次の定理が得られた．

定理 4・1．J の零点は $(1, a_{11}, \cdots, a_{n1}), \cdots, (1, a_{1k}, \cdots, a_{nk})$ である。

上のベクトル $A_1, \cdots, A_k$ は差を除いて一意に定まる。即ち，

$$\Phi' : G \times E \longrightarrow E$$

を他の bundle lifting とし，対応する座標を $A_1', \cdots, A_k'$ とおけば，整数 $b_1, \cdots, b_n$ が存在して

$$A_j' = A_j + (b_1, \cdots, b_n) \quad (j=1, \cdots, k)$$

が成り立つ。

5．$U(n)$ を n 次のユニタリー群，$T^n \subset U(n)$ を極大トーラスとし，$X = U(n)/T^n$ とおく。$p : U(n) \longrightarrow X$ を等化写像とし

$$\eta_i : U(n) \times_{T^n} \mathbb{C} \longrightarrow X$$

を4節と同様に定義する。このとき，

$$H^*(X;Z) \cong Z[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]/(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

ここに α_i は η_i の Euler 類で，$\sigma_i = \sigma_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は i 次の基本対称式である。

$a_1, \cdots, a_n$ を整数とし，準同型 $h ; G \longrightarrow T^n$ をすべての $s \in G$ について

$$h(s) = (s^{a_1}, \cdots, s^{a_n})$$

で定義する．G作用 $\Phi : G\times U(n) \longrightarrow U(n)$ を，$s\in G$ と $g\in U(n)$ について，

$$\Phi(s, g) = h(s)g$$

で定義する。Φ は X 上の G 作用 $\varphi ; G\times X \longrightarrow X$ を誘導する。即ち Φ は φ の bundle lifting である

$$\xi_i : U(n)\times_G E_G \times \mathbb{C}/T^n \longrightarrow X\times_G E_G$$

を4節で定義した複素直線束とする。このとき束同型

$$\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n = \pi^*(\tau^{a_1}\oplus \cdots \oplus \tau^{a_n})$$

が成り立つ。c_i は対応するベクトル束の i 次の Chern 数を表わすものとすると

$$\sigma_i(x_1, \cdots, x_n) = t^i \sigma_i(a_1, \cdots, a_n)$$

が成り立つ。(2,2) より

$$H_G^*(X; Z) \cong Z[t, x_1, \cdots, x_n]/J$$

$$J = (\sigma_1 - t\sigma_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \sigma_n - t^n\sigma_n(a_1, \cdots, a_n))$$

特に $a_1, \cdots, a_n$ は

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n_1} < a_{n_1+1} = \cdots = a_{n_1+n_2} < \cdots$$

$$< a_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1} = \cdots = a_n \quad (n_1 + \cdots + n_m = n)$$

を満たすものとする。このとき，φ の不動点集合の各連結成分は $U(n_1)/T^{n_1}\times\cdots\times U(n_m)/T^{n_m}$ に同相であり，連結成分の個数は $n!/(n_1!\times\cdots\times n_m!)$ に等しいことが分かる。

次に，3節で得られた結果を用いて，特に $X = U(3)/T^3$ の

場合に $H^*(F;Q)$ の可能性について調べてみよう。この場合，$f_1, f_2, f_3 \in Z[t, x_1, x_2, x_3]$ を，それぞれ次数 0，1，2 の斉次元として

$$J=(x_1+x_2+x_3-tf_1,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-tf_2,\ x_1x_2x_3-tf_3)$$

とおける。J は $(1,0,0,0)$ を零点とすると仮定しても一般性をうしなわない，従って，適当に変型すれば

$$J=(g_1, g_2, g_3)$$

$$g_1=x_1+x_2+x_3$$

$$g_2=x_1^2+x_1x_2+x_2^2-t(\alpha x_1+\beta x_2)$$

$$g_3=x_1^3-t(ax_1^2+bx_1x_2+t(cx_1+dx_2))$$

とおける。ここに $\alpha, \beta, a, b, c, d \in Z$。(2,3) より g_1, g_2, g_3 の共通零点を $(1, a_{11}, a_{12}, a_{13}), \cdots, (1, a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$ とすれば，$a_{ij} \in Q$ $(i=1,2,3;\ j=1,\cdots,k)$ と仮定することができるから，$(1,0,0,0)$ に対応する F の連結成分 F_j について次のいずれかが満たされることが分かる。

i) $F_j \sim_Q pt$

ii) $F_j \sim_Q S^2$

iii) $F_j \sim_Q X$

ここに $X \sim_Q Y$ は $H^*(X;Q)$ と $H^*(Y;Q)$ が同型であることを意味する，

従って (3,1) より次の定理が従がう。

定理5.1. $U(3)/T^3$上の自明でないG作用について，次の何れかが成り立つ．

i) $F \sim_Q S^2+S^2+S^2$ （直和）

ii) $F \sim_Q S^2+S^2+2$ pt

iii) $F \sim_Q S^2+4$ pt

iv) $F \sim_Q 6$ pt