数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 21-26

相対可換子代数と Paschke 予想について

高井博司（都立大理）

§0. 序論

前稿で述べたように $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha$ は $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ の遺伝的な C^*部分代数になるが $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha$ と可換な $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ の要素全体 $(\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha)'\cap C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ は未だ解析されていないが、$(\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha)'\cap\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ は容易にスカラー全体 $\mathbb{C}$ になることが云える。Olesen-Pedersen-Størmer は、素な C^*代数 $\mathfrak{A}$ と G が T^1 又は $\mathbb{Z}/(p)$ のとき、$\Gamma(\alpha)=Sp(\alpha)$ ならば $(\mathfrak{A}^\alpha)'\cap M(\mathfrak{A})=\mathbb{C}$ を示した。ただし $M(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の乗法代数である。

我々は先ず一般の C^*代数 $\mathfrak{A}$ と $G=T^1$ 又は $\mathbb{Z}/(p)$ のとき $(\mathfrak{A}^\alpha)'\cap\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ が可換になることを示し、G が有限可換群 F のとき $\mathfrak{B}$ は (CCR) となり、$G=T^1\times F$ のとき $\mathfrak{B}$ は (GCR) になることを示す。しかし $G=T^2$ のとき $\mathfrak{B}$ が (NGCR) になる C^*力学系 $(\mathfrak{A},T^2,\alpha)$ が存在することを云う。次にこの結果を使えば Paschke の結果、つまり I 型ファクター (I) の $\mathbb{Z}$ 又 T^1 による接合積 $\mathbb{Z}\otimes_\alpha(\mathrm{I})$, $T^1\otimes_\alpha(\mathrm{I})$ は I 型 W^*代数になることが容易に分かる。更に任意のコンパクト可換群 G による (I) の接合積 $G\otimes_\alpha(\mathrm{I})$ は I 型 W^*-代数になることが分かるが $\mathbb{Z}^2\otimes_\alpha(\mathrm{I})$ は一般には I 型にはならない。最後に任意の

無限コンパクト可換群Gに対して $G \otimes_\alpha (\mathrm{II}_1)$ がI型ファクターになるII_1型ファクター(II_1)が存在することを注意する。

§1、相対可換子代数

$(\mathfrak{A}, G, \alpha)$を$C^*$力学系とし$\mathfrak{A}$が単位元を持つ$C^*$代数とする。$\mathfrak{A}^\alpha$の$\mathfrak{A}$に於ける可換子代数を$\mathcal{B}$で表わすと $\alpha_g(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ $(g \in G)$ より $\beta_g = \alpha_g|_{\mathfrak{A}}$ とすると $(\mathcal{B}, G, \beta)$はC^*力学系になる。$\mathcal{B}^\beta \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$は容易に示せるので $\omega \in \sigma(\mathcal{B}^\beta)$ (i.e. $\mathcal{B}^\beta$のスペクトル)に対して $\omega^{-1}(0)$で生成された$\mathcal{B}$の閉イデアルをJ_ωで表わすと $\bigcap_{\omega \in \sigma(\mathcal{B}^\beta)} J_\omega = (0)$が示せるので $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}/J_\omega$ $(\omega \in \sigma(\mathcal{B}^\beta))$とおくと $\mathcal{B} \simeq \oplus_\omega \mathcal{B}_\omega$ が成り立つ。今 $G = T^1$ 又は $\mathbb{Z}/(p)$とすると、$\beta_g^\omega(x + J_\omega) = \beta_g(x) + J_\omega$ $(g \in G)$によってC^*力学系$(\mathcal{B}_\omega, G, \beta^\omega)$を作ると β^ωは$\mathcal{B}_\omega$上エルゴード的になるから $Sp(\beta^\omega) = \Gamma(\beta^\omega)$となる。だから $Sp(\beta^\omega) = \gamma_0 \hat{G}$ $(\gamma_0 \in \hat{G})$となる。そこで $\mathcal{B}_\omega^{\beta^\omega}(\{\gamma_0\})$に入るユニタリ要素$u$をとると $\mathcal{B}_\omega^{\beta^\omega} = \mathbb{C}$ より $\mathcal{B}_\omega = C^*(u)$を得る。つまり$\mathcal{B}_\omega$は可換になる。だから$\mathcal{B}$は可換である。よって次の結果を得る。

命題1、 $G = T^1$ 又は $\mathbb{Z}/(p)$ のとき、$(\mathfrak{A}^\alpha)' \cap \mathfrak{A}$ は可換C^*代数である。

Gが有限可換群Fのとき、 $\dim \mathcal{B}_\omega = |Sp(\beta^\omega)|$ となるから $\mathcal{B}_\omega$は有限次元C^*代数である。任意の $\mathrm{Prim}\,\mathcal{B}$ の元 $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{P} \supset J_\omega$ なる J_ωが存在するので $\mathcal{B}/\mathfrak{P} \simeq \mathcal{B}_\omega / \mathfrak{P}/J_\omega$ より、$\mathcal{B}/\mathfrak{P}$

が有限次元になる。よって次の結果を得る。

命題2、　G が有限可換群 F のとき、$(\mathfrak{A}^{\alpha})'\cap\mathfrak{A}$ は (CCR) である。

更に $G=T^1\times F$ とすると　$H=F^{\perp}\cap Sp(\beta^{\omega})$ とおくと H は無限群としてよい。$\gamma\in Sp(\beta^{\omega})$ に対してユニタリ要素 u_γ をとると $(u_\gamma)_{\gamma\in H}$ は可換になる。$|F|=m$ とおくと　$u_\gamma^m u_\delta=u_\delta u_\gamma^m$ $(\gamma\in Sp(\beta^{\omega}),\ \delta\in H)$ が成り立つ。β^{ω} はエルゴード的であるから $u_\gamma u_\delta=\lambda u_\delta u_\gamma$ なる $\lambda\in\mathbb{C}$ が存在する。よって $\lambda^m=1$ となり $u_\gamma u_\delta^m=u_\delta^m u_\gamma$ を得る。$\gamma\in Sp(\beta^{\omega})$ は任意より $(u_{\delta^m})_{\delta\in H}$ は $\mathcal{B}_\omega$ の中心に入る。$H_1=\{\delta^m:\delta\in H\}$ とおくと $H_1^{\perp}$ は G の有限部分群となる。$\gamma^{\omega}=\beta^{\omega}|_{H_1}$ とおくと　$\mathcal{B}_\omega^{\gamma^{\omega}}\subset\mathcal{B}_\omega\cap\mathcal{B}_\omega'$ より、$\mathcal{B}_\omega\cap[(\mathcal{B}_\omega)^{\gamma^{\omega}}]'=\mathcal{B}_\omega$ となる。H_1 は有限群より命題2より $\mathcal{B}_\omega$ は (CCR) になる。よって次の結果を得る。

命題3、　$G=T^1\times F$ のとき　$(\mathfrak{A}^{\alpha})'\cap\mathfrak{A}$ は (GCR) である。

しかし　$G=T^2$ の場合には　$(\mathfrak{A}^{\alpha})'\cap\mathfrak{A}$ が (NGCR) となる C^* 力学系 $(\mathfrak{A},G,\alpha)$ が存在する。　実際、可算無限次元ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ に対して $\mathcal{H}=\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ とし、$(e_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の単位マトリックス系とする。そのとき　$u_1=\Sigma_k e_{k,k+1}\otimes 1$, $u_2=\Sigma_k 1\otimes e_{k,k+1}$ とし　$W(t_1,t_2)=\Sigma_{k_1,k_2}e^{i(k_1t_1+k_2t_2)}e_{k_1,k_1}\otimes e_{k_2,k_2}$　$((t_1,t_2)\in T^2)$ とおくとそれぞれ $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素になる。$v_1=W(0,\delta)u_1$ $v_2=u_2$ とおく。ただし $\delta/2\pi$ は無理数とする。　$\mathfrak{A}=C^*(v_1,v_2)$,

$\alpha_t = Ad(W(t_1, t_2))$ $(t = (t_1, t_2) \in T^2)$ とおくと $(\mathfrak{A}, T^2, \alpha)$ は C^*-力学系になり $\mathfrak{A}''$ は II_1-型ファクターで $Ad(W)$ は $\mathfrak{A}''$ 上でエルゴード的になる。更に $\Gamma(\alpha) = Sp(\alpha) = \mathbb{Z}^2$ となるから $T^2 \otimes_\alpha \mathfrak{A}''$ は I_∞ 型ファクターになる。よって次結果を得る。

命題4、 $G = T^2$ のとき $(\mathfrak{A}^\alpha)' \cap \mathfrak{A}$ は $(NGCR)$ になる C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, T^2, \alpha)$ が存在する。

これらの結果を使うと Paschke の結果が容易に導き出せる。何故なら $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H}) = \mathcal{L}(\mathfrak{H} \otimes L^2(G))^{\alpha \otimes Ad(\lambda)}$ より $\mathfrak{A} = \{x \in \mathcal{L}(\mathfrak{H} \otimes L^2(G)) : \| \alpha_g \otimes Ad(\lambda_g)(x) - x \| \xrightarrow[g \to e]{} 0\}$ とおくと $G = T^1, F, T^1 \times F$ に対して $(\mathfrak{A}^{\alpha \otimes Ad(\lambda)})' \cap \mathfrak{A}$ は (GCR) より $[\mathcal{L}(\mathfrak{H} \otimes L^2(G))^{\alpha \otimes Ad(\lambda)}]'$ は I型 W^*代数となる。よって $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は I型 W^*代数である。しかしながら $G = T^2$ に対しては上記の方法は使えないが次の Paschke による予想は正しい。

命題5、 G がコンパクト可換群のとき、 $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は I型 W^*代数である。

実際 $Tr \circ \alpha_g = Tr$ (ただし Tr は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の自然なトレースである) より Tr の双対重み $\widehat{Tr}$ は $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ のトレースになる。だから $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は半有限になる。 $\hat{\alpha}$ は $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の中心上でエルゴード的になるので $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は I型又は II型になる。もし II型とすると I型から II型の正規期待値が存在することになり矛盾を得る。

一方離散群に対しては一般に命題5の結論は正しくない。

例えば命題4で得た C^*-力学系に対して $T^2\otimes_\alpha \mathfrak{A}''$ は I_∞ 型ファクターで $\mathbb{Z}^2\otimes_{\hat{\alpha}}(T^2\otimes_\alpha \mathfrak{A}'')$ は II_∞ 型ファクターとなるので $\mathbb{Z}^2\otimes_\theta \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は II 型になる作用 θ が存在する。

命題6. $\mathbb{Z}^2\otimes_\theta \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ が II 型ファクターになる作用 θ が存在する。更に θ は可積分作用に選べる。

G を可分なコンパクト可換群とすると可換 W^* 代数 $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{A}=\{x\in\mathfrak{M} : \|\alpha_g(x)-x\|\xrightarrow[g\to e]{}0\}$ は $\mathfrak{M}$ の α-不変 C^* 部分代数で $\mathfrak{A}''=\mathfrak{M}$ となる。よって $(G\otimes_\alpha \mathfrak{A})''=G\otimes_\alpha \mathfrak{M}$ となる。今 $\mathfrak{A}=C(\Gamma)$ と表現しておくと $\Gamma=\bigcup_\iota G\gamma_\iota$, $G\gamma_\iota\cap G\gamma_j=\emptyset$ $(\iota\neq j)$ とできるので、$G\otimes_\alpha \mathfrak{A}=\bigoplus_\iota G\otimes_{\alpha^\iota} C(G\gamma_\iota)$ となる。$\xi\in G\gamma_\iota$ に対して $\sigma_\xi\in Z^2(G_\xi; T^1)$ をとる。ただし $G_\xi=G_{\gamma_\iota}$ は ξ での G の安定群とする。G_ξ の σ_ξ-表現 π は $G_{\gamma_\iota}\times_{\sigma_\iota}T^1$ の表現に一対一に対応するが $G_{\gamma_\iota}\times_{\sigma_\iota}T^1$ は作り方よりコンパクトになるから π は I 型の表現になる。よって、$G\otimes_{\alpha^\iota}C(G\gamma_\iota)$ は (GCR) となるので $G\otimes_\alpha \mathfrak{M}$ は I 型 W^* 代数である。

命題7. G を可分なコンパクト可換群とし、$\mathfrak{M}$ を可換 W^* 代数とすると $G\otimes_\alpha \mathfrak{M}$ は I 型 W^* 代数である。

最後に II 型の接合積が I 型になる場合を述べる。今 G を無限コンパクト可換群とすると、$\mathfrak{M}=\hat{G}\otimes_\tau L^\infty((\hat{G})^- : du)$ とおけば II_1 型ファクターになる。ただし $(\hat{G})^-$ は $\hat{G}$ の Bohr コンパクト化で du は $(\hat{G})^-$ 上の Haar 測度である。よって $G\otimes_{\hat{\tau}} \mathfrak{M}$ は I 型 W^* 代数になるので

命題8、 Gを無限コンパクト可換群としたとき $G \otimes_\alpha \mathcal{M}$がI型W*代数になる様なII型ファクター$\mathcal{M}$上の作用$\alpha$が存在する。

注意として上の命題に於いて $G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(2)$ (Cantor群)のとき、$\mathcal{M}$は超有限II型ファクターに選べる。

参考文献

[1] A. Ikunishi and H. Takai: *On crossed products with abelian group actions*, Preprint (1977).

[2] A. Kishimoto and H. Takai: *Some remarks on C*-dynamical systems with a compact abelian group*, Preprint (1977).