数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 27-31

Locally Closedness of Unbounded Derivations in C^*-algebras

山形大 理　太田昇一

近年、C^*環上の非有界微分子(unbounded derivation)が、多くの人々によって研究されて来ました([3]の文献を参照)。物理数学においては、C^*環上の1助変数自己同型群の無限小作用素として、非有界微分子は現われて来ます。ここでは、その関連とは離れて、非有界微分子そのものの性質を調べることにします。

$\mathfrak{A}$をヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上の単位元$1(=1_{\mathfrak{H}})$をもつC^*環とします。$\mathfrak{A}$における線型写像δが<u>$*$-derivation</u>であるとは、次の各性質を満たすことである;

(イ) その定義域$\mathcal{D}(\delta)$は、$\mathfrak{A}$における稠密な$*$-部分環,

(ロ) 各$a, b \in \mathcal{D}(\delta)$に対して、

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

$$\delta(a^*) = \delta(a)^* \quad .$$

この稿では、以下証明は全て省きますが、$*$-derivationを調べ

る際に、有効な手段の一つである表現（Lorentz表現の特別なもの）について、最初に述べます。

定義域$\mathcal{D}(\delta)$から、$\mathcal{B}(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H})$（or $\mathfrak{A}\otimes M(2,\mathbb{C})$）への写像$\underline{\pi_\delta}$を次のように定義します；

$$a\in\mathcal{D}(\delta) \longrightarrow \pi_\delta(a)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ \delta(a) & a \end{pmatrix}$$

更に、$\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$上のhermitian unitary作用素Jを、

$J(\xi\oplus\eta)=\eta\oplus\xi$（ここに、$\xi,\eta\in\mathfrak{H}$）で定義します。そして、$A\in\mathcal{B}(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H})$に対して$A^J\equiv JA^*J$と定義すると、

<u>Lemma 1</u>. $\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))\equiv\{\pi_\delta(a)\,;\,a\in\mathcal{D}(\delta)\}$は*環（ここでの対合は$\pi_\delta(a)\to\pi_\delta(a)^J$で入れる）になる。特に$\delta$がclosedならば$\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))$はsemi-simple involutive Banach algebraになる。しかもそのinvolutionはhermitianでもある。

$a=a^*\in\mathfrak{A}$に対して、aと1で生成される部分C*環を$C(a)$で示すことにする。各$a=a^*\in\mathcal{D}(\delta)$に対して、$\delta$の$C(a)\cap\mathcal{D}(\delta)$への制限$\delta|_{C(a)\cap\mathcal{D}(\delta)}$がclosed（i.e., 各$\{a_n\}\subset C(a)\cap\mathcal{D}(\delta)$ s.t. $\lim a_n=b$, $\lim\delta(a_n)=c$ ならば、$b\in C(a)\cap\mathcal{D}(\delta)$で$\delta(b)=c$）ならば、$\delta$を<u>locally closed</u>と呼ぶことにします。

[注意] locally closed *-derivationは、必ずしもclosedでは

ない。 実際、UHF-環の *normal *-derivation* は、*locally closed* だが、*closed* ではない。

<u>Theorem 2</u>. δ を *locally closed *-derivation* とする。そのとき，次の 1°, 2° が成り立つ。

1°, $\mathfrak{A}$ の単位元 1 は、自動的に $\mathfrak{D}(\delta)$ に含まれる。

2°, $a = a^* \in \mathfrak{D}(\delta)$ と，$Sp(a;\mathfrak{A})$ を含む Jordan 閉曲線 ∂ の内部で、*analytic* な複素数値関数 $f(x)$ に対して，

$$f(a) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial} f(\lambda)(\lambda - a)^{-1}\,d\lambda \quad \text{は} \quad \mathfrak{D}(\delta) \text{ に含まれ，}$$

$\pi_\delta(f(a)) = f(\pi_\delta(a))$ が成り立つ。

<u>Corollary 3</u>. δ が *closed* ならば、各 $a = a^* \in \mathfrak{D}(\delta)$ に対して，

$$Sp(a;\mathfrak{A}) = Sp(\pi_\delta(a);\ \pi_\delta(D(\delta))).$$

<u>Theorem 4</u>. δ を **-derivation* とすると，次の条件は互いに同値である．

(1) 各 $a = a^* \in \mathfrak{D}(\delta)$ に対して， $C(a) \subset \mathfrak{D}(\delta)$.

(2) δ が *locally closed* で，$\mathfrak{D}(\delta)$ の $a \geq 0$ の元が $\mathfrak{D}(\delta)$ の中に平方根をもつ。

[注意] 上の Theorem 4 における (2) において *locally closed* を，*closed* で置き換えると，δ は有界 i.e., $\mathfrak{D}(\delta) = \mathfrak{A}$ になる ([1])。

前に述べたように locally closed からは一般に closed は出てこないが、自然な問題として、"locally closed ならば closable か?" を考える事にする。

<u>Theorem 5.</u> $\mathfrak{A}$ がコンパクト作用素全体からなる C^*-環を含んでいるとする。そのとき $\mathfrak{A}$ 上の locally closed $*$-derivation は closable である。

次に、δ が有界 ($\mathcal{D}(\delta)=\mathfrak{A}$) ならば、よく知られているように、ある $h=h^*\in\overline{\mathfrak{A}}^w$ があって、$\delta(a)=i[h,a]$ $(a\in\mathfrak{A})$ と書ける。以下では、δ が一般の unbounded derivation のとき、同じような事が起こるかという問題を考えます; i.e.,

"δ が closed $*$-derivation のとき、ある Hermitian 作用素 (一般に unbounded) が存在して、$\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{D}(H)$ で

$$\delta(a)=i[H,a] \quad \text{on } \mathcal{D}(H) \quad (a\in\mathcal{D}(\delta)) \quad ?\text{"。}$$

この問題に対しては、次のような定理が得られる。

<u>Theorem 6.</u> 次の条件は同値。

(1) $\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))$ が、ある maximal J-positive invariant closed subspace $\mathfrak{M}$ を不変部分空間としてもつ。

(2) ある稠密な定義域をもつ strict maximal accretive 作用素 T が $\mathfrak{H}$ 上に存在して、$\mathfrak{M}=G(T)$, $\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T)$ で、

$$\delta(a)=[T,a] \quad \text{on } \mathcal{D}(T) \quad (a\in\mathcal{D}(\delta)).$$ (詳しくは[1]参照)。

文献

[1] S. Ôta ; Certain operator algebras induced by *-derivations in C^*-algebras on an indefinite inner product space, to appear in J. Functional Anal.

[2] 〃 ; Locally Closedness of Unbounded Derivations in C^*-algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] S. Sakai ; Recent Developments in the Theory of unbounded Derivations in C^*-algebras, U.S-Japan seminor on C^*-algebras and their application to theoretical Physics, 1977, April 18-22.

[4] 〃 ; The Theory of Unbounded Derivations in C^*-algebras (Lecture Note) 1977.