数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 62-72

非I型の群のユニタリー表現について

神戸大 数育　　船越俊介

§1. ここで，我々は非I型の局所コンパクト群の表現論に関するいくつかのことを，作用素環論との関連において，報告する．ここにいう「作用素環論との関連」とは，次のように局所コンパクト群とVon Neumann環，C^*-環が"表現を媒介にして"関連していることを意味する：

・Gを可分局所コンパクト群，πをGのヒルベルト空間$\mathcal{H}$上へのユニタリー表現とする．そして，$\pi(g)$，$g\in G$で生成されるVon Neumann環 $M_\pi=\{\pi(g)\,|\,g\in G\}''$を考える．このとき，表現$\pi$のある種の特徴——群$G$のある種の構造——がVon Neumann環$M_\pi$の構造に反映される．$M_\pi$が因子であるとき，$\pi$を因子表現という．$\pi$のtype(型)は$M_\pi$のVon Neumann環としてのtypeと定義する．そして，GがI型の群であるとはGのすべての表現がI型であることと定義する．

・Gの表現はC^*-環 $C^*(G)$の表現と対応している．Gが非I型の群であることと$C^*(G)$がNGCR C^*-環であることとは

同値である.

§2. 非I型の群の具体例.

(連結な) semi-simple リー群, nilpotent リー群はI型の群であることが知られている. また, solvable リー群が非I型の群であるための判定条件がいくつか知られている ([1], [2], [3]). ほとんどのディスクリート群は非I型の群である.

具体的な非I型の群の例を挙げる ([2] を参照):

- $\mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2$ (; Mautner group), $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}^2$ の半直積群.
- $\mathbb{R}^3 \times_s \mathbb{C}^4$ (; Extended Mautner group の例).
- $\mathbb{R}^2 \times_s \mathbb{R}^6$ (; Semi-simply regular, but not unipotently regular).
- $(\mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2) \times_s \mathbb{R}$ (; with a type I regular representation).
- J. Dixmier constructed a connected solvable Lie group of type I such that its universal covering group is not of type I.

この報告においては, Mautner 群の表現論を中心にする. そこで詳しく Mautner 群の定義を与える: $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}^2$ との半直積群 $\mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2$ である. 群演算は, $(t; z_1, z_2), (t'; z_1', z_2') \in \mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2$, $(t; z_1, z_2) \cdot (t'; z_1', z_2') = (t+t'; z_1 + e^{it} z_1', z_2 + e^{i\alpha t} z_2')$, α は一つの無理数, で与えられる. 要素の行列表示は

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ z, w \in \mathbb{C}$$

である．$\mathbb{R}$の$\mathbb{C}^2$上への作用V_tは　$V_t(z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{i\alpha t}z_2)$である．従って，力学系$(\mathbb{C}^2, \mathbb{R}, V)$が考えられる．この力学系は同双系の微分方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = -\alpha x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = \alpha x_3$$

から導びかれる．

§3．群及びC^*-環の表現論の基本的課題は

・（既約，因子）表現の構成，

・任意の表現の（既約，因子表現への）分解

の二つである．

群の表現の構成法としては「誘導表現」「Imprimitivity theory」等，分解の方法としては「直積分（連続和）」による方法が知られているが，非I型の群の場合は，I型の群に比べて，構成も分解も困難である —— うまくゆかない．

以下において，Mautner群を主な対象として，次のことを解説する：

⊙一般に，「可分局所コンパクト群が非I型であれば，II型及びIII型の表現を持つ」ことが知られている（[4]）．次の§4で，Mautner群のII型，III型の因子表現を具体的に構成する．

⊙・非I型の群の表現の既約表現への分解は一意的でない

ことが知られている．・非I型の群の表現の既約表現への分解に関連して次の定理が知られている；

$\exists\, \pi^i$: representation of type i $(i = \mathrm{II}, \mathrm{III})$ s.t.

$$\pi^{\mathrm{II}} = \int_P \pi_\gamma^{\mathrm{II}} d\mu^{\mathrm{II}}(\gamma), \quad \pi^{\mathrm{III}} = \int_P \pi_\gamma^{\mathrm{III}} d\mu^{\mathrm{III}}(\gamma) \quad (\text{:既約分解}),$$

where, $\pi_\gamma^{\mathrm{II}} \cong \pi_\gamma^{\mathrm{III}}$ $(\forall \gamma \in P)$.

前者に関して，§5 で Mautner群の正則表現の二通りの既約分解を A.A. Kirillov [5] に従って概説する．

後者に関して，§6でMautner群に対して，具体的に π^i, π_γ^i $(i = \mathrm{II}, \mathrm{III})$ を構成する．

§4. Mautner群のII型，III型の因子表現の構成．

(1). 道具として「力学系の理論」を用いる．ここで，(G, S, μ) が力学系であるとは，G，S は共に可分な局所コンパクト空間，完備距離付け可能な空間，さらに G は位相群，S は測度空間，そして (G, S) は位相変換群で，S 上の測度(measure) μ は G の作用のもとで quasi-invariant な正のラドン測度とする．

(G, S, μ) が ① free とは，$\forall g \in G\ (g \neq e)$，$\mu(\{x \in S \mid x = xg\}) = 0$．② ergodic とは，$S$ の Borel set P に対して $Pg = P$ (for all $g \in G$) ならば，$\mu(P) = 0$ か $\mu(S \setminus P) = 0$ かのいずれかである．③ measurable とは，$\nu \sim \mu$ (同値), $d\nu(xg) = \Delta(g) d\nu(g)$ $(g \in G$, $\Delta(g)$ は

modular function) なる σ-finite な positive measure ν が存在する. ④ measurable でないとき, non-measurable という.

(2). (G, S, μ) に対して, 次のような Von Neumann 環 $\mathcal{R}(G, S, \mu)$ を作る:

- $g \longrightarrow (T_g f)(s) = f(sg)\left(\frac{d\mu g}{d\mu}(s)\right)^{1/2}$, $f \in L^2(S, d\mu)$,
- $\varphi \in L^\infty(S, \mu)$, M_φ: multiplication by φ on $L^2(S, \mu)$,
- $R(g)$: the right regular representation of G,
- $\mathcal{H} = L^2(G, ds) \otimes L^2(S, \mu)$, ds: right invariant Haar measure,
- $\mathcal{R}(G, S, \mu)$: the Von Neumann algebra on $\mathcal{H}$ generated by $R(g) \otimes T_g$ and $I \otimes M_\varphi$ $(g \in G, \varphi \in L^\infty(S, \mu))$.

このとき, (G, S, μ) の性質と $\mathcal{R}(G, S, \mu)$ の構造との間に次の関係がある:

- (G, S, μ) が free, ergodic ならば $\mathcal{R}(G, S, \mu)$ は因子,
- (G, S, μ) が free, ergodic かつ measurable ならば $\mathcal{R}(G, S, \mu)$ は I_∞ 型または II_∞ 型の因子,
- (G, S, μ) が free, ergodic かつ non-measurable ならば $\mathcal{R}(G, S, \mu)$ は III 型の因子.

(3). Non-measurable 力学系の一つの構成法:

(G, S) を位相変換群 (G, S は (1) での仮定を満すものとする) とし, 次の仮定をする;

① Orbit space $S/G = \{Gs \mid s \in S\}$ が位相空間として T_0-空間

でない．

②Gは可換群である．

③GはSに effective に作用する．

いま，π をSから S/G への標準写像とし，S/G の任意の一点 p を固定して，$X \equiv \pi^{-1}(\{p\})$ とおけば，位相変換群 (G, X) が得られる．

このとき，(G, X, β) が free, ergodic かつ non-measurable な力学系となるような X 上の測度 β が構成できる．β の作り方の大筋を記す：

- $\forall n$, $M_n = \{0, 1\}$, $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$；加法群
- $\mu_n\{(0)\} = p$, $\mu_n\{(1)\} = q$, $p = 1-q$, $0 < p, q < 1$, $p \neq 1/2$.
- $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$, $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$
- $\mathcal{G}$: the set of those $a = (a_n \mid n = 1, 2, \cdots)$ in M for which $a_n \neq 0$ occurs for a finite number of n only；加算群

このとき，$(\mathcal{G}, M, \mu)$ は free, ergodic かつ non-measurable な力学系である．M から X の中への位相同型が存在する．M を X の部分集合とみなす．$\{i_1\} \times \{i_2\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots$，$i_j$ は 0 または 1，が基底をなす．

まず，X に次のような測度 λ を定義する：

$$\begin{cases} \lambda(\{i_1\} \times \{i_2\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots) = p^r q^{n-r} \\ \lambda(X \setminus M) = 0, \end{cases}$$

ここで，ν は $i_1, i_2, \cdots i_n$ の中の 0 の個数，したがって，$(n-\nu)$ は 1 の個数．

次に，ν を G 上の，right invariant Haar measure と同値な，有限測度とし，X の任意の Borel subset B に対して

$$\nu * \lambda(B) = \int_G \lambda(hB)\,d\nu(h)$$

と定義すれば，

$$\beta = \nu * \lambda$$

が求める測度である．

(4). Mautner 群の II_∞ 型及び III 型の因子表現の構成：

(3) での一般の場合の G として $\mathbb{R}$，S として $\mathbb{C}^2$，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}^2$ への作用は $T_t(z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{i\alpha t}z_2)$，したがって $X = \mathbb{T}^2$ (2次元トーラス) と考える．すると，$\mathbb{T}^2$ 上に測度 β が存在して $(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2, \beta)$ は free, ergodic かつ non-measurable な力学系となり，von Neumann 環 $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2, \beta)$ は III 型の因子である．

一方，Mautner 群 $\mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2$ の $L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \beta \times \nu)$，$\nu$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度，上へのユニタリー表現 Π を次のように定義する：

$$\mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2 \ni (t; z_1, z_2) \longmapsto \Pi_{(t; z_1, z_2)} f((\zeta_1, \zeta_2), p)$$
$$= \exp(i\,\mathrm{Re}(z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2))\, f((e^{it}\zeta_1, e^{i\alpha t}\zeta_2), t+p)$$
$$(f \in L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \beta \times \nu)).$$

すると，$\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2, \beta)$ と $\{\Pi_g \,;\, g \in \mathbb{R} \times_s \mathbb{C}^2\}''$ は同型である．従

って，ΠがIII型の因子表現である．

上述の表現の構成において，$\mathbb{T}^2$上の測度βの代りに，通常のLebesgue測度を用いれば，II_∞型の因子表現が得られる．

§5. Mautner群の正則表現の二通りの既約分解．

$G=\mathbb{R}\times_s\mathbb{C}^2$をMautner群，$G$の要素を$g=(t;z,w)$，$z=x+iy$，$w=u+iv$と書く．$dg=dt\,dx\,dy\,du\,dv$を$G$の両側不変Haar測度とする．

TをGの右正則表現とする．すなわち$f\in L^2(G,dg)$，

$$
\begin{aligned}
&(T_{(\tau;\xi,\eta)}f)(t;z,w)\\
&\qquad=f(t+\tau;z+e^{it}\xi,w+e^{i\alpha t}\eta).
\end{aligned}
$$

Tの二通りの既約分解（既約成分が同値でない）を与える：

[First Method]

$f(t;z,w)\in L^2(G,dg)$の(z,w)に関するFourier変換をする

；$$\tilde{f}(t;a,b)=\iiiint f(t;z,w)e^{i\mathrm{Re}(a\bar{z}+b\bar{w})}dx\,dy\,du\,dv.$$

このFourier変換によって，TはT_1になる；

$$
\begin{aligned}
&(T_{1(\tau;\xi,\eta)}\tilde{f})(t;a,b)\\
&\qquad=e^{i\mathrm{Re}(e^{it}a\bar{\xi}+e^{i\alpha t}b\bar{\eta})}\tilde{f}(t+\tau;a,b).
\end{aligned}
$$

T_1は，既約表現$U_{(a,b)}$，$(a,b)\in\mathbb{C}^2$，

$$(U_{(a,b)}(\tau;\xi,\eta)\phi)(t)=e^{i\mathrm{Re}(e^{it}a\bar{\xi}+e^{i\alpha t}b\bar{\eta})}\phi(t+\tau)$$

, acting in $L^2(\mathbb{R}, dt)$, の連続和である。

[Second Method]

まず, $f(t;z,w) \in L^2(G, dg)$ の変数変換

$$f(t;z,w) = \varphi(t; e^{-it}z, e^{-i\alpha t}w)$$

を考える. そして, φ の (t,z,w) に関する Fourier 変換をする;

$$\tilde{\varphi}(s;a,b) = \iiiint\!\!\int \varphi(t;z,w) e^{iRe(ts + a\bar{z} + b\bar{w})} dt\,dx\,dy\,du\,dv.$$

この Fourier 変換によって, T は T_2 になる;

$$(T_2(\tau;\xi,\eta)\tilde{\varphi})(s;a,b)$$
$$= e^{iRe(\tau s + e^{i\tau}a\bar{\xi} + e^{i\alpha\tau}b\bar{\eta})}\tilde{\varphi}(s; e^{i\tau}a, e^{i\alpha\tau}b) \quad \ldots(6).$$

ここで, $X_{r,\rho}$ を, r, ρ を非負の実数とし, $|a| = r$, $|b| = \rho$ で与えられる $\mathbb{C}^2$ の2次元 surface とする.

T_2 は, 既約表現 $V_{r,\rho,s}$,

$$(V_{r,\rho,s}(\tau;\xi,\eta)\varphi)(a,b)$$
$$= e^{iRe(\tau s + e^{i\tau}a\bar{\xi} + e^{i\alpha\tau}b\bar{\eta})}\varphi(e^{i\tau}a, e^{i\alpha\tau}b)$$

, acting in $L^2(X_{r,\rho})$, の連続和である.

「$\forall(a,b)$, $\forall(r,\rho,s)$; $U_{(a,b)} \not\cong V_{r,\rho,s}$」

従って, 正則表現の異なる二通りの既約分解が出来た.

§6.

$G = \mathbb{R} \times_S \mathbb{C}^2$ とし, μ^{II}, μ^{III} を $\mathbb{T}^2$ 上の測度で, 力学系

$(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2, \mu^{\mathrm{II}})$ が free, ergodic かつ measurable,

$(\mathbb{R}, \mathbb{T}^2, \mu^{\mathrm{III}})$ が free, ergodic かつ non-measurable,

となるようなものとする（§4 参照）．ν は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．このとき，§4 の結果より

① $(t; z_1, z_2) \longmapsto \Pi^{\mathrm{II}}_{(t; z_1, z_2)} f((a,b), p)$

$$= e^{(-i(\mathrm{Re}(e^{-it} a z_1 + e^{-i\alpha t} b z_2))} f((a,b), p-t)$$

を G の $L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \mu^{\mathrm{II}} \times \nu)$ への因子表現とする．

Π^{II} は II_∞ 型の因子表現である．

② $(t; z_1, z_2) \longmapsto \Pi^{\mathrm{III}}_{(t; z_1, z_2)} f((a,b), p)$

$$= e^{(-i(\mathrm{Re}(e^{-it} a z_1 + e^{-i\alpha t} b z_2))} f((a,b), p-t)$$

を G の $L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \mu^{\mathrm{III}} \times \nu)$ への因子表現とする．

Π^{III} は III 型の因子表現である．

次に，$(a,b) \in \mathbb{T}^2$ に対し

$(t; z_1, z_2) \longmapsto U^{(a,b)}_{(t; z_1, z_2)} \phi(p)$

$$= e^{(-i(\mathrm{Re}(e^{-it} a z_1 + e^{-i\alpha t} b z_2))} \phi(p-t)$$

なる G の $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ への表現を定義する．

このとき，次の結果を得る：

① $\forall (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{T}^2$, $U^{(a,b)}$ は既約表現である．

② $U^{(a,b)} \cong U^{(a',b')}$ であるための必要十分条件は $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$a' = e^{-it_0} a$, $b' = e^{-i\alpha t_0} b$ となることである．

③ Π^{II} は，測度 μ^{II} に関して，$U^{(a,b)}$, $(a,b) \in \mathbb{T}^2$ の連続和で

である．すなわち，$\pi^{\mathrm{II}}=\int_{\mathbb{T}^2} U^{(a,b)}\,d\mu^{\mathrm{II}}(a,b)$．

π^{III}は，測度μ^{III}に関して，$U^{(a,b)}$，$(a,b)\in\mathbb{T}^2$の連続和である．すなわち，$\pi^{\mathrm{III}}=\int_{\mathbb{T}^2} U^{(a,b)}\,d\mu^{\mathrm{III}}(a,b)$．

References

[1] L.Auslander and Kostant; Polarization and unitary representations of solvable Lie groups. Inventiones Math, 14(1971), 255 - 354.

[2] L.Auslander and C.C.Moore; Unitary Representations of Solvable Lie Groups. Memoirs of the A.M.S.62(1966).

[3] S.Funakosi; On Representations of Topological *-Algebras and σ-Compact Lie Groups. Math.Japonicae, 21(1976),1 - 17.

[4] J.Glimm; Type I C*-algebras. Ann of Math, (2) 73(1961), 572 - 612.

[5] A.A.Kirillov; Elements of the Theory of Representations. Springer - Verlag, (1976).

[6] M.Takesaki; On some representations of C*-algebras. Tôhoku Math Journ, 15(1963), 79 - 95.