数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 73-118

フォン・ノイマン環の連続接合積
(Co-作用と Roberts の作用)

九大・理　　中神祥臣

序論．此こでは，竹崎正道氏と準備中の仕事の一部を紹介する．

フォン・ノイマン環の連続接合積の研究は「フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ 上に可換な局所コンパクト群 G が作用 α を通して働いているとき，その接合積 $(\mathcal{M}\times_{\alpha}G)\times_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ を作ると，これが $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}(L^2(G))$ と同型になる」という竹崎の双対定理に端を発している．初めに問題に成ったのは，G が非可換な場合にこの命題がどう成るか，ということであったが，その背景には Haag，Doplicher，Roberts がこれに先立ち発展させていた代数的場の理論に現われるゲージ理論が在った，[2, 3]．非可換な G の双対としては，フーリエ環 $A(G)$ とか十分沢山なユニタリー表現の自己共役表現環 $\mathcal{R}$ があり，それに応じて，それぞれのフォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ 上への作用 δ と ρ が考えられる．こゝでは，δ を Co-作用，ρ を Roberts の作用という．ちなみに，δ はホップ－フォン・ノイ

マン環での C_0-積との類似から考え出されたものであり，ρ はゲージ理論の中から発見されたものである．これらを使って二種の接合積 $\mathcal{N}\times_\delta G$ と $\mathcal{N}\times_\rho \mathcal{R}$ を定義し，それらの上に自然な双対作用を与え，見掛け上同一視し難いこの二つの共変系が，実は同値に成ることを示すのがここでの目的である．

全体は才1部と才2部に分れ，才1部では C_0-作用に関する結果を用意し，才2部では Roberts $\propto$ 作用に関するものを準備して，最後に両者の関係を付ける．

才1部　フーリエ環による接合積

§1．正則表環とフーリエ環

$\{G, dt, \Delta\}$ をそれぞれ局所コンパクト群，右不変ハール測度，モジュラー関数とする．右と左の正則表現

$$(\rho(s)\xi)(t) = \xi(ts), \qquad (\lambda(s)\xi)(t) = \Delta(s)^{1/2}\xi(s^{-1}t)$$

により導かれる $L^\infty(G)$（または $\mathcal{L}(L^2(G))$）上の作用(*) を

(*) G からフォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ 上の自己同型写像群の中への準同型写像 α で $t\in G \longmapsto \langle \alpha_t(x), \varphi\rangle$，$x\in\mathcal{M}$，$\varphi\in\mathcal{M}_*$ が連続なものを G の $\mathcal{M}$ 上への作用という．

$$\rho_t(x) = \rho(t)x\rho(t)^*, \quad \lambda_t(x) = \lambda(t)x\lambda(t)^*$$

とする．$(\rho(x))(t) = \rho_t(x)$ と置けば，$\rho(x)$ は $L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G) = L^\infty(L^\infty(G), G)$ の元と見做すことができる．したがって，ρ は $L^\infty(G)$ から $L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G)$ の中への同型写像になる．さらに，$(\rho(f))(s,t) = f(st)$ であるから，$\rho_s\rho_t = \rho_{st}$ は

(1.1) $$(\rho\otimes\iota)\circ\rho = (\iota\otimes\rho)\circ\rho$$

と表わせる．同じように，$(\lambda(f))(s,t) = f(t^{-1}s)$ だから，

(1.2) $$(\lambda\otimes\iota)\circ\lambda = (\iota\otimes\alpha'_G)\circ\lambda$$

となる．ただし，$(\alpha'_G f)(s,t) = f(ts)$．

次に，$\rho(G)$ と $\lambda(G)$ から生成されるフォン・ノイマン環をそれぞれ $\mathcal{R}(G)$，$\mathcal{R}'(G)$ と書き，

$$A(G) = \{g^\# * f : f, g \in L^2(G)\}, \quad g^\#(t) = \overline{g(t^{-1})}$$

とおく．この $A(G)$ はフーリエ環と呼ばれ，対応：

$$\omega_{f,g} \in \mathcal{R}(G)_* \longleftrightarrow g^\# * f \in A(G) \quad (f, g \in L^2(G))$$

により $\mathcal{R}(G)_*$ と同一視される．良く知られているように，$A(G)$ は積 $(\varphi\psi)(t) = \varphi(t)\psi(t)$ と $\mathcal{R}(G)_*$ のノルムにより，半単純で正則な対合バナッハ環に成る．とりわけ，次の交換関係の定理や双対定理を通して，$A(G)$ が G の双対の一つであることが推測される．

定理 1.1 (von Neumann - Mackey)　u を G のヒルベルト

空間 $\mathfrak{H}$ 上へのユニタリー表現，π を $L^\infty(G)$ または $A(G)$ の $\mathfrak{H}$ 上への＊表現とする．もし

$$u(t)\pi(f) = \pi(\rho_t(f))u(t), \quad t \in G, \ f \in L^\infty(G)$$

ならば，ヒルベルト空間 $\mathfrak{K}$ と全射等距離線形写像 $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, L^2(G)\otimes\mathfrak{K})$ が存在して

$$U u(t) U^{-1} = \rho(t) \otimes 1_{\mathfrak{K}}, \quad t \in G$$

$$U \pi(f) U^{-1} = f \otimes 1_{\mathfrak{K}}, \quad f \in L^\infty(G) \text{ または } A(G).$$

定理 1.2（Steinspring - Eymard - 斉藤，辰馬）$\mathcal{R}(G)$ の元 $x \neq 0$ に対し次の 2 条件は同値である：

(i) 或る $t \in G$ が存在して，$x = \rho(t)$．

(ii) 任意な $\varphi, \psi \in A(G)$ に対して，$\langle x, \varphi\psi\rangle = \langle x, \varphi\rangle\langle x, \psi\rangle$．

さて，G が可換な場合には，$L^2(G)$ から $L^2(\hat{G})$ の上へのフーリエ変換 $\mathfrak{F}$ を通して

$$\mathfrak{F} L^\infty(G) \mathfrak{F}^{-1} = \mathcal{R}(\hat{G}), \quad \mathfrak{F}\mathcal{R}(G)\mathfrak{F}^{-1} = L^\infty(\hat{G})$$

となる．$\hat{G}$ の正則表現により $L^\infty(\hat{G})$ 上へ導かれる作用 $\hat{\rho}$ は，前と同様に，$L^\infty(\hat{G})$ から $L^\infty(\hat{G})\bar{\otimes}L^\infty(\hat{G})$ の中への同型写像になり，$(\hat{\rho}\otimes\iota)\circ\hat{\rho} = (\iota\otimes\hat{\rho})\circ\hat{\rho}$ をみたしている．これをフーリエ変換を使って $L^2(\hat{G})$ から $L^2(G)$ の議論へ引き戻してみると次のように云い代えられる．

$$\delta_G = (Ad_{\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}})^{-1}\circ\hat{\rho}\cdot Ad_{\mathfrak{H}}$$

は $\mathcal{R}(G)$ から $\mathcal{R}(G)\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$ の中への同型写像で

(1.3) $$(\delta_G\otimes\iota)\circ\delta_G = (\iota\otimes\delta_G)\circ\delta_G$$

をみたしている．ここで，δ_G は $\delta_G(\rho(t)) = \rho(t)\otimes\rho(t)$ をみたしている．したがって，このような δ_G は，$\hat{G}$ の作用の言い換えである以上に，非可換な G に対しても，G の双対の作用としての働きをするものと解釈することができる．

§2 作用と Co-作用

前節で与えた $L^\infty(G)$ 上の作用 ρ と $\mathcal{R}(G)$ 上の作用 δ_G の概念を一般のフォン・ノイマン環に拡張して以後の議論の準備とする．いま，G の $\mathcal{M}$ 上への作用 α が与えられたときに

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(t) = \alpha_t(x)\xi(t),\quad \xi\in\mathfrak{H}\otimes L^2(G)$$

とすれば，π_α は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G)$ の中への同型写像であり，(1.1)式と同じように，

$$(\pi_\alpha\otimes\iota)\circ\pi_\alpha = (\iota\otimes\alpha_G)\circ\pi_\alpha,\quad (\alpha_G=\rho)$$

をみたしている．次の命題により逆も成りたつ．

命題 2.1. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G)$ の中への同型写像 π が

(2.1) $$(\pi\otimes\iota)\circ\pi=(\iota\otimes\alpha_G)\circ\pi$$

をみたすなら，G の $\mathcal{M}$ 上への作用 α が存在して $\pi=\pi_\alpha$.

証明．任意な $x\in\mathcal{M}$ と $g\in L^1(G)$ に対し $\pi(x)_g$ を

(2.2) $$\langle\pi(x)_g,\omega\rangle=\langle\pi(x),\omega\otimes g\rangle,\quad\omega\in\mathcal{M}_*$$

で定義する．$f,g\in L^1(G)$ に対し

$$\langle\pi(\pi(x)_g),\omega\otimes f\rangle=\langle\pi(x)_g,\pi_*(\omega\otimes f)\rangle$$
$$=\langle\pi(x),\pi_*(\omega\otimes f)\otimes g\rangle=\langle(\pi\otimes\iota)(\pi(x)),\omega\otimes f\otimes g\rangle$$
$$=\langle(\iota\otimes\alpha_G)(\pi(x)),\omega\otimes f\otimes g\rangle=\langle(\iota\otimes\rho_g)(\pi(x)),\omega\otimes f\rangle,$$

ただし，$\rho_g=\int g(t)\rho_t\,dt$．したがって

$$\pi(\pi(x)_g)=(\iota\otimes\rho_g)(\pi(x))$$

となる．作用 ρ は連続だから，$g(t)dt$ を点 $s\in G$ のディラック測度へ収束させれば，右辺は $(\iota\otimes\rho_s)(\pi(x))$ へ収束し，左辺の $\pi(x)_g$ は $\mathcal{M}$ の或る元 $\pi(x)_s$ へ収束する．したがって，$(\iota\otimes\rho_s)(\pi(x))$ は $\pi(\mathcal{M})$ の元である．ここで

$$\alpha_s=\pi^{-1}\circ(\iota\otimes\rho_s)\circ\pi,$$

つまり，$\alpha_s(x)=\pi(x)_s$ とすれば，α は G の $\mathcal{M}$ 上への作用であり，$\alpha_g(x)=\pi(x)_g$ をみたす．したがって，(2.2) 式により，$\pi(x)=\pi_\alpha(x)$．証了．

この命題により，次の定義が意味を持つ．

定義 2.2（作用と Co-作用）(a) $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G)$ の中への同型写像 α が (2.1) 式をみたすとき，α を G の $\mathcal{M}$ 上への作用という．

(b) $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$ の中への同型写像 δ が

(2.2) $$(\delta\otimes\iota)\circ\delta=(\iota\otimes\delta_G)\circ\delta$$

をみたすとき，δ を G の $\mathcal{N}$ 上への Co-作用という．

例えば，(1.1) 式により $\alpha_G=\rho$ は G の $L^\infty(G)$ 上への作用であり，(1.3) 式により δ_G は G の $\mathcal{R}(G)$ の上への Co-作用である．

このような作用と Co-作用を，左正則表現を使っても定義することができる．$\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G)$ の中への同型写像 α' が $(\alpha'\otimes\iota)\circ\alpha'=(\iota\otimes\alpha'_G)\circ\alpha'$ をみたすとき，α' を $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の $\mathcal{M}$ 上への作用といい，$\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$ の中への同型写像 δ' が $(\delta'\otimes\iota)\circ\delta'=(\iota\otimes\delta'_G)\circ\delta'$ をみたすとき，δ' を $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の $\mathcal{N}$ 上への Co-作用という．ただし，δ'_G は $\mathcal{R}'(G)$ から $\mathcal{R}'(G)\bar{\otimes}\mathcal{R}'(G)$ の中への同型写像で $\delta'_G(\lambda(t))=\lambda(t)\otimes\lambda(t)$ をみたすものである．

次に，作用と Co-作用を使ってそれぞれの接合積を与えよう．

定義 2.3（接合積）(a) $\alpha(\mathcal{M})$ と $\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}(G)$ が生成する $\mathfrak{H}\otimes L^2(G)$ 上のフォン・ノイマン環 $\mathcal{M}\times_\alpha G$ を $\mathcal{M}$ と G の α に関する<u>接合積</u>という．

(b) $\delta(\mathcal{N})$ と $\mathbb{C}\otimes L^\infty(G)$ が生成する $\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ 上のフォン・ノイマン環 $\mathcal{N}\times_\delta G$ を $\mathcal{N}$ と G の δ に関する<u>接合積</u>という．

接合積上で双対作用や双対 C_0-作用を考えるとき重要になる $L^2(G)\otimes L^2(G)$ 及び $L^2(G)$ 上のユニタリー作用素を挙げておこう．

$$(\mathbb{W}_G\xi)(s,t)=\xi(s,ts),\quad (\mathbb{W}'_G\xi)(s,t)=\Delta(s)^{1/2}\xi(s,s^{-1}t)$$

$$(\mathbb{V}_G\xi)(s,t)=\xi(st,t),\quad (\mathbb{V}'_G\xi)(s,t)=\Delta(t)^{1/2}\xi(t^{-1}s,t)$$

$$(J\xi)(t)=\Delta(t)^{1/2}\xi(t^{-1}).$$

これらの定義から直ぐにわかることは

$$\mathbb{W}_G^*(\rho(t)\otimes 1)\mathbb{W}_G=\rho(t)\otimes\rho(t),\quad \mathbb{W}'_G(1\otimes J)=(1\otimes J)\mathbb{W}_G,$$

$$\mathbb{V}_G(f\otimes 1)\mathbb{V}_G^*=\rho(f),\quad \mathbb{V}'_G(f\otimes 1)\mathbb{V}'^*_G=\lambda(f).$$

などがある．

命題 2.4（双対）(a) 各 $y\in\mathcal{M}\times_\alpha G$ に対し

$$\hat{\alpha}(y)=(1\otimes\mathbb{W}_G^*)(y\otimes 1)(1\otimes\mathbb{W}_G)=\mathrm{Ad}_{1\otimes\mathbb{W}_G^*}(y\otimes 1)$$

とすれば，$\hat{\alpha}$ は G の $\mathcal{M}\times_\alpha G$ 上への C_0-作用になる．これを

α の<u>双対</u>という.

(b) 各 $x \in \mathcal{N} \times_\delta G$ に対し

$$\hat{\delta}(x) = (1 \otimes V_G')(x \otimes 1)(1 \otimes V_G'^*) = \mathrm{Ad}_{1 \otimes V_G'}(x \otimes 1)$$

とすれば, $\hat{\delta}$ は G の $\mathcal{N} \times_\delta G$ 上への作用となる. これを δ の<u>双対</u>という.

証明. (a) $\mathcal{M} \times_\alpha G$ の生成元 $\alpha(x)$ と $1 \otimes \rho(r)$ に対し

(2.3) $$\hat{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$$

(2.4) $$\hat{\alpha}(1 \otimes \rho(r)) = 1 \otimes \rho(r) \otimes \rho(r).$$

したがって, $\hat{\alpha}$ は $\mathcal{M} \times_\alpha G$ から $(\mathcal{M} \times_\alpha G) \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ の中への同型写像である. 更に生成元の上で

$$(\hat{\alpha} \otimes \iota) \circ \hat{\alpha} = (\iota \otimes \alpha_G) \circ \hat{\alpha}$$

が確かめられるので, $\hat{\alpha}$ は G の $\mathcal{M} \times_\alpha G$ 上への Co-作用である.

(b) 上と同様に $\mathcal{N} \times_\delta G$ の生成元 $\delta(y)$ と $1 \otimes f$ に対し

(2.5) $$\hat{\delta}(\delta(y)) = \delta(y) \otimes 1$$

(2.6) $$\hat{\delta}(1 \otimes f) = 1 \otimes \lambda(f).$$

したがって, $\hat{\delta}$ は生成元上で $(\hat{\delta} \otimes 1) \circ \hat{\delta} = (\iota \otimes \delta_G) \circ \hat{\delta}$ をみたすので, $\hat{\delta}$ は G の $\mathcal{N} \times_\delta G$ 上への作用である. 証了.

この他にも有用な作用や Co-作用の例が知られている, [6].

§3　竹崎の双対定理

この節では後で必要となる竹崎の双対定理を紹介する．この定理は連続接合積を研究する際の出発点であった．

定理 3.1（双対定理）(a)　α を G の $\mathcal{M}$ 上への作用，σ を $x\otimes y \longmapsto y\otimes x$ なる同型写像とすれば，

$$\tilde{\alpha} = \mathrm{Ad}_{1\otimes V'_G}\circ(\iota\otimes\sigma)\circ(\alpha\otimes\iota) \tag{3.1}$$

は G の $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ 上への作用になり，$\tilde{\alpha}_t=\alpha_t\otimes\lambda_t$ かつ

$$\{(\mathcal{M}\times_\alpha \hat{G})\times_{\hat{\alpha}} G,\ \hat{\hat{\alpha}}\} \cong \{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)),\ \tilde{\alpha}\}. \tag{3.2}$$

(b)　δ を G の $\mathcal{N}$ 上への Co-作用とすれば，

$$\tilde{\delta} = \mathrm{Ad}_{1\otimes W_G^*}\circ(\iota\otimes\sigma)\circ(\delta\otimes\iota) \tag{3.3}$$

は G の $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ 上への Co-作用になり

$$\{(\mathcal{N}\times_\delta G)\times_{\hat{\delta}} G,\ \hat{\hat{\delta}}\} \cong \{\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)),\ \tilde{\delta}\}.$$

この定理の証明には次の補題が本質的である．

補題 3.2.　(a)　$\mathcal{M}\bar{\otimes} L^\infty(G) = \alpha(\mathcal{M})\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))$.

(b)　$\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)) = \delta(\mathcal{N})\vee(\mathbb{C}\otimes\mathcal{L}(L^2(G)))$.

証明．(a)　$\mathcal{M}$ の表現空間を調節して，作用 α は G のユ

ニタリー表現 u により $\alpha(x)=u(x\otimes 1)u^*$ と表わされているものと仮定できる． $u\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})\bar{\otimes}L^\infty(G)$ だから

$$\alpha(\mathcal{M})\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))=u(\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G))u^*$$
$$=\mathcal{M}\bar{\otimes}L^\infty(G).$$

(b) 証明はフーリエ環の表現論を使って行うが，ここでは省く．（この命題の簡単な証明は未だない）．証了．

定理 3.1 の証明． (a) $\mathcal{L}(L^2(G))=\mathcal{R}(G)\vee L^\infty(G)$ だから，補題 3.2 (a) により， $\alpha(x)$， $1\otimes\rho(r)$， $1\otimes f$ は $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ の生成元である．命題 2.4 (a) により， $\hat{\alpha}(\alpha(x))=\alpha(x)\otimes 1$ ， $\hat{\alpha}(1\otimes\rho(r))=1\otimes\rho(r)\otimes\rho(r)$ ， $1\otimes 1\otimes f$ は $(\mathcal{M}\times_\alpha G)\times_{\hat{\alpha}}G$ の生成元である． $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ から $\mathcal{L}(\mathfrak{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(G))$ の中への写像を

(3.5) $$\pi=Ad_{1\otimes V_G^*}\circ(\alpha\otimes\iota)$$

とすれば，

(3.6) $$\pi(\alpha(x))=\alpha(x)\otimes 1$$

(3.7) $$\pi(1\otimes\rho(r))=1\otimes\rho(r)\otimes\rho(r)$$

(3.8) $$\pi(1\otimes f)=1\otimes 1\otimes f$$

をみたす．したがって， π は $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ から $(\mathcal{M}\times_\alpha G)\times_{\hat{\alpha}}G$ の上への同型写像である．さらに

$$\hat{\alpha}(\alpha(x))=\alpha(x)\otimes 1 \qquad \hat{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha}(y))=\hat{\alpha}(y)\otimes 1$$
$$\hat{\alpha}(1\otimes\rho(r))=1\otimes\rho(r)\otimes 1 \qquad \hat{\hat{\alpha}}(1\otimes 1\otimes f)=1\otimes 1\otimes\lambda(f)$$

$$\tilde{\alpha}(1\otimes \hat{f}) = 1\otimes\lambda(f)$$

より，$\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ 上で $(\pi\otimes\iota)\circ\tilde{\alpha} = \hat{\hat{\alpha}}\circ\pi$ を得る．

(b) 上と同様に，$\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ から $\mathcal{L}(\mathfrak{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(G))$ の中への写像を

(3.9) $$\pi = Ad_{(1\otimes 1\otimes J)(1\otimes W_G)}\circ(\delta\otimes\iota)$$

とすれば，π は $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ の生成元 $\delta(y)$，$1\otimes\hat{f}$，$1\otimes\lambda(r)$ を $(\mathcal{N}\times_\delta G)\times_{\hat{\delta}} G$ の生成元 $\hat{\delta}(\delta(y)) = \delta(y)\otimes 1$，$\hat{\delta}(1\otimes\hat{f}) = 1\otimes\lambda(f)$，$1\otimes 1\otimes\rho(r)$ へ移す．さらに

$$\tilde{\delta}(\delta(y)) = \delta(y)\otimes 1 \qquad \hat{\hat{\delta}}(\hat{\delta}(x)) = \hat{\delta}(x)\otimes 1$$

$$\tilde{\delta}(1\otimes\hat{f}) = 1\otimes\hat{f}\otimes 1 \qquad \hat{\hat{\delta}}(1\otimes 1\otimes\rho(r)) = 1\otimes 1\otimes\rho(r)\otimes\rho(r)$$

$$\tilde{\delta}(1\otimes\lambda(r)) = 1\otimes\lambda(r)\otimes\rho(r)$$

だから，$\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ 上で $(\pi\otimes\iota)\circ\tilde{\delta} = \hat{\hat{\delta}}\circ\pi$ をみたす．証了．

§4　接合積の不動点

双対作用，双対 co-作用の不動点を調べる．G が離散的な場合には，ほとんど自明な結果である．

定理 4.1. (a)　$(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat{\alpha}} = \alpha(\mathcal{M})$．

(b)　$(\mathcal{N}\times_\delta G)^{\hat{\delta}} = \delta(\mathcal{N})$．

定理の証明には次の補題が使われる．

補題 4.2. (a) $L^\infty(G)=\{x\in\mathcal{L}(L^2(G)):\overline{W}_G^*(x\otimes 1)\overline{W}_G=x\otimes 1\}$.

(b) $\mathcal{R}(G)=\{y\in\mathcal{L}(L^2(G)):\overline{V}_G'(y\otimes 1)\overline{V}_G'^*=y\otimes 1\}$.

証明. (a) $\alpha_G=\rho$ は G の $L^\infty(G)$ 上への作用だから，補題 3.2 (a) より，$\alpha_G(L^\infty(G))\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))=L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G)$ を得る．他方，$\alpha_G(L^\infty(G))=\overline{W}_G'^*(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))\overline{W}_G'$ と $\overline{W}_G'=(1\otimes J)\overline{W}_G(1\otimes J)$ に注意すれば，

$$(\overline{W}_G^*(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))\overline{W}_G)\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))=L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G)$$

を得る．ここで，$\overline{W}_G^*(x\otimes 1)\overline{W}_G=x\otimes 1$ を仮定すれば

$$x\otimes 1\in(\overline{W}_G^*(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))\overline{W}_G)'\wedge(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))'.$$

したがって，$x\in L^\infty(G)$. 逆は明らかである．

(b) $\overline{V}_G'(1\otimes\lambda(r))\overline{V}_G'^*=\lambda(r)\otimes\lambda(r)$ だから

$$(\overline{V}_G'(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))\overline{V}_G'^*)\vee(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))=\mathcal{R}'(G)\bar{\otimes}\mathcal{R}'(G).$$

したがって，$\overline{V}_G'(y\otimes 1)\overline{V}_G'^*=y\otimes 1$ は上と同様に，$y\in\mathcal{R}'(G)'=\mathcal{R}(G)$ と同値である．証了．

定理 4.1 の証明. (a) (2.3) 式により $\alpha(\mathcal{M})\subset(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat{\alpha}}$ だから，逆の包含関係を示せばよい．先ず $\hat{\alpha}(y)=\mathrm{Ad}_{1\otimes\overline{W}_G^*}(y\otimes 1)$ だから，補題 4.2 (a) により，$(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat{\alpha}}$ は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})\bar{\otimes}$

$L^\infty(G)$ に含まれている．また，この定理は共変系の同値関係により保存される性質であり，$\{\mathcal{M},\alpha\}\cong\{\alpha(\mathcal{M}),\ \iota\otimes\alpha_G\}$ だから，α は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリー表現 u により $\alpha(x)=u(x\otimes1)u^*$ と表わされているものと仮定できる．このとき，$u(1\otimes\lambda(t))u^*=u(t)\otimes\lambda(t)$ かつ $\mathrm{Ad}_{u(t)\otimes\lambda(t)}(\alpha(x))=\alpha(x)$ だから

$$\mathcal{M}\times_\alpha G\subset(\mathcal{M}'\otimes\mathbb{C})'\cap(u(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))u^*)'$$

である．したがって

(4.1) $\quad(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat\alpha}\subset(\mathcal{M}'\otimes\mathbb{C})'\cap(u(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))u^*)'\cap(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))'.$

他方，

$$\alpha'(x')=u^*(x'\otimes1)u\ ,\quad x'\in\mathcal{M}'$$

と置けば，α' は $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の $\mathcal{M}'$ 上への作用である．ここで補題 3.2 (a) を使うと

$$\mathcal{M}'\bar\otimes\mathcal{L}(L^2(G))=(u^*(\mathcal{M}'\otimes\mathbb{C})u)\vee(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G)).$$

両辺に Ad_u を作用させて Commutant を考えると

$$\alpha(\mathcal{M})=(\mathcal{M}'\otimes\mathbb{C})'\cap(u(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))u^*)'\cap(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))'.$$

したがって，(4.1) より $(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat\alpha}\subset\alpha(\mathcal{M})$ を得る．

(b) (2.4) 式により $\delta(\mathcal{N})\subset(\mathcal{N}\times_\delta G)^{\hat\delta}$ だから逆の包含関係を示す．先ず $\hat\delta(x)=\mathrm{Ad}_{1\otimes V_G'}(x\otimes1)$ だから，補題 4.2 (b) により，$(\mathcal{N}\times_\delta G)^{\hat\delta}\subset\mathcal{L}(\mathfrak{K})\bar\otimes\mathcal{R}(G)$ となる．$\{\mathcal{N},\delta\}\cong\{\delta(\mathcal{N}),\ \iota\otimes\delta_G\}$ だから δ は

(4.2) $\quad(w\otimes1)(\iota\otimes\sigma)(w\otimes1)=(\iota\otimes\delta_G)(w)$

をみたす $\mathcal{L}(\mathfrak{K})\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$ のユニタリー作用素 w により，$\delta(y) = w^*(y\otimes 1)w$ と表わされているものと仮定できる．

さて，各 $f\in L^\infty(G)$ に対し $\pi(f)=w^*(1\otimes f)w$ と置けば，(4.2) 式より

$$\mathrm{Ad}_{1\otimes W_G}(\pi(f)\otimes 1)=\pi(f)\otimes 1$$

を得る．補題 4.2 (a) により，$\pi(f)\in\mathcal{L}(\mathfrak{K})\bar{\otimes}L^\infty(G)$ だから，

$$\mathcal{N}\times_\delta G\subset(\mathcal{N}'\otimes\mathbb{C})'\cap\pi(L^\infty(G))'$$

となる．したがって

(4.3) $\qquad (\mathcal{N}\times_\delta G)^{\hat{\delta}}\subset(\mathcal{N}'\otimes\mathbb{C})'\cap\pi(L^\infty(G))'\cap(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))'.$

他方，

$$w'=(1\otimes J)\,w\,(1\otimes J)$$

$$\delta'(y')=w'(y'\otimes 1)w'^*,\quad y'\in\mathcal{N}'$$

とすれば，$w'\in\mathcal{L}(\mathfrak{K})\bar{\otimes}\mathcal{R}'(G)$ かつ

$$(w'\otimes 1)(\iota\otimes\sigma)(w'\otimes 1)=(\iota\otimes\delta_G')(w')$$

となり，δ' が $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の $\mathcal{N}'$ 上への Co-作用であることがわかる．ここで補題 3.2 (b) を使うと

$$\mathcal{N}'\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))=(w'(\mathcal{N}'\otimes\mathbb{C})w'^*)\vee(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}(G))\vee(\mathbb{C}\otimes L^\infty(G))$$

を得る．両辺に $\mathrm{Ad}_{w^*(1\otimes J)}$ を作用させて Commutant を考えると

$$\delta(\mathcal{N})=(\mathcal{N}'\otimes\mathbb{C})'\cap(\mathbb{C}\otimes\mathcal{R}'(G))'\cap\pi(L^\infty(G))'.$$

したがって，(4.3) より $(\mathcal{N}\times_\delta G)^{\hat{\delta}}\subset\delta(\mathcal{N})$ を得る．証了.

竹崎の双対定理と定理4.2を組み合わせると次の定理が得られる.

定理4.3. (a) $(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{M}\times_\alpha G$.

(b) $(\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\delta}} = \mathcal{N}\times_\delta G$.

証明. (a) (3.5)式で与えられた $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ から $(\mathcal{M}\times_\alpha G)\times_{\hat{\alpha}} G$ の上への同型写像 π を使うと

$$\pi((\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}}) = \hat{\alpha}(\mathcal{M}\times_\alpha G)$$

となる. (2.3), (2.4), (3.6), (3.7) より $\hat{\alpha}$ と π は $\mathcal{M}\times_\alpha G$ の生成元上で一致している. したがって, (a) が得られる.

(b) (3.9)式で与えられた $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ から $(\mathcal{N}\times_\delta G)\times_{\hat{\delta}} G$ の上への同型写像 π を使うと

$$\pi((\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\delta}}) = \hat{\delta}(\mathcal{N}\times_\delta G)$$

となる. $\mathcal{N}\times_\delta G$ 上で $\hat{\delta}=\pi$ だから, (b) が得られる. 証了.

§5. 接合積の特徴付

先ず, 作用に関する接合積の特徴付けを述べる.

定理 5.1. δ を G の $\mathcal{N}$ 上への C_0-作用としたとき，次の 3 条件は同値である：

(i) 作用の共変系 $\{\mathcal{M}, \alpha\}$ が存在して

$$\{\mathcal{N}, \delta\} \cong \{\mathcal{M} \times_\alpha G, \hat{\alpha}\}.$$

(ii) $\mathcal{N}$ の G の中へのユニタリー表現 u が存在して

$$\delta(u(t)) = u(t) \otimes \rho(t), \quad t \in G.$$

(iii) ユニタリー作用素 $u \in \mathcal{N} \bar{\otimes} L^\infty(G)$ が存在して

$$(u \otimes 1)(\iota \otimes \sigma)(u \otimes 1) = (\iota \otimes \alpha_G)(u),$$

$$\bar{\delta}(u) = (u \otimes 1)(1 \otimes W_G). \quad (\bar{\delta} \overset{\text{def}}{=} (\iota \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \iota))$$

特に，条件 (ii) の下で，$\mathcal{N} = \mathcal{N}^\delta \vee u(G)''$.

これを双対化したものは次のようになる．

定理 5.2. α を G の $\mathcal{M}$ 上への作用としたとき，次の 3 条件は同値である：

(i) C_0-作用の共変系 $\{\mathcal{N}, \delta\}$ が存在して

$$\{\mathcal{M}, \alpha\} \cong \{\mathcal{N} \times_\delta G, \hat{\delta}\}.$$

(ii) $\mathcal{M}$ の中への $L^\infty(G)$ または $A(G)$ の $*$ 表現 π が存在して，$L^\infty(G)$ または $A(G)$ 上で

$$(5.1) \qquad \alpha_t \circ \pi = \pi \circ \lambda_t. \quad ((\alpha \otimes \iota) \circ \pi = (\pi \otimes \iota) \circ \lambda)$$

(iii) ユニタリー作用素 $w \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ が存在して

(5.2) $\qquad (w\otimes 1)(\iota\otimes\sigma)(w\otimes 1)=(\iota\otimes\delta_G)(w)$,

(5.3) $\qquad \tilde{\alpha}(w^*)=(w^*\otimes 1)(1\otimes V_G)$. $((\alpha_t\otimes\iota)(w^*)=w^*(1\otimes\rho(t)))$.

特に条件(ii)の下で，$\mathcal{M}=\mathcal{M}^\alpha\vee\pi(L^\infty(G))$.

上の条件で(i)と(iii)は第2部でCo-作用とRobertsの作用との関係を論ずる際に必要となる．紙数の関係上，後で使う定理5.2の証明だけを与える．

証明．(i) $\Rightarrow$ (ii) 明らか．

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\mathcal{M}$ の表現空間を選び直して，α は G のユニタリー表現 $\{u,\mathfrak{H}\}$ により，$\alpha(x)=u(x\otimes 1)u^*$ と表わされているものと仮定できる．このとき，(5.1)式は交換関係

$$u(t)\pi(f)=\pi(\lambda_t f)u(t),\quad t\in G,\ f\in L^\infty(G)$$

と同値であるから，定理1.1により，或るヒルベルト空間 $\mathfrak{K}$ が存在して，$\mathfrak{H}=\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ かつ

$$\pi(f)=1_{\mathfrak{K}}\otimes f$$

$$u(t)=1_{\mathfrak{K}}\otimes\lambda(t)\qquad(\text{または，}u=1_{\mathfrak{K}}\otimes V_G')$$

と仮定できる．ここで

$$w=1_{\mathfrak{K}}\otimes W_G$$

と置けば，$w\in\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$．また，直接計算により

$$(W_G\otimes 1)(\iota\otimes\sigma)(W_G\otimes 1)=Ad_{1\otimes W_G^*}(W_G\otimes 1)$$

$$(1\otimes\sigma)((u\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1_{\mathfrak{K}}\otimes \overline{W}_G^*\otimes 1)(u\otimes 1)^*) = (1_{\mathfrak{K}}\otimes \overline{W}_G^*\otimes 1)(1_{\mathfrak{K}}\otimes 1\otimes V_G)$$

だから，それぞれ

$$(w^*\otimes 1)(1\otimes\sigma)(w^*\otimes 1) = (1\otimes\delta_G)(w^*)$$

$$\overline{\alpha}(w^*) = (w^*\otimes 1)(1\otimes V_G) \quad ((\alpha_t\otimes 1)(w^*) = w^*(1\otimes\rho(t)))$$

と成る．

(iii) ⇒ (ii) 先ず

$$w_J = (1\otimes J)w$$

$$\pi_0(f) = w_J(1\otimes f)w_J^*, \quad f\in L^\infty(G)$$

と置けば，$\pi_0(f)\in \mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ である．条件 (5.3) より

$$\overline{\alpha}(w_J^*) = (w_J^*\otimes 1)(1\otimes V_G').$$

したがって，$\mathrm{Ad}_{w_J\otimes 1}\circ\overline{\alpha} = \tilde{\alpha}\circ \mathrm{Ad}_{w_J}$ となる．したがって，$\tilde{\alpha}(\pi_0(f)) = \pi_0(f)\otimes 1$．定理 4.3 (a) により，$(\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{M}\times_\alpha G$ だから

$$\pi_0(f)\in\mathcal{M}\times_\alpha G.$$

他方，条件 (5.2) より

$$(1\otimes\overline{W}_G)(w\otimes 1)(1\otimes\sigma)(w\otimes 1) = (w\otimes 1)(1\otimes\overline{W}_G).$$

ここで，$\overline{W}_G^* = (J\otimes 1)\overline{W}_G(J\otimes 1)$ であることを使って

$$(1\otimes\overline{W}_G^*)(w_J\otimes 1)(1\otimes\sigma)(w\otimes 1) = (w_J\otimes 1)(1\otimes W_G)$$

を得る．したがって

$$\mathrm{Ad}_{1\otimes\overline{W}_G^*}(\pi_0(f)\otimes 1) = \pi_0(f)\otimes 1$$

となる．定理 4.1 (a) により，$(\mathcal{M}\times_\alpha G)^{\hat{\alpha}} = \alpha(\mathcal{M})$ だから

$$\pi_0(f) \in \alpha(\mathcal{M}).$$

さて，ここで

$$\pi = \alpha^{-1} \circ \pi_0$$

とすれば，π は $L^\infty(G)$ から $\mathcal{M}$ の中への同型写像である．α は $\alpha \circ \sigma_t = (\iota \otimes \rho_t) \circ \alpha$ なる共変表現だから，$L^\infty(G)$ 上で

$$\alpha \circ \sigma_t \circ \pi = (\iota \otimes \rho_t) \circ \alpha \circ \pi = (\iota \otimes \rho_t) \circ \pi_0$$
$$= \pi_0 \circ \lambda_t = \alpha \circ \pi \circ \lambda_t.$$

したがって，(5.1) 式が得られる．

(ii) かつ (iii) $\Rightarrow$ (i)　先ず

$$\delta(y) = w^*(y \otimes 1)w, \quad y \in \mathcal{M}^\alpha$$

とすれば，$\delta(y) \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$．条件 (5.3) を使って

$$\bar{\alpha}(\delta(y)) = \bar{\alpha} \circ Ad_{w^*}(y \otimes 1)$$
$$= Ad_{w^* \otimes 1} \circ Ad_{1 \otimes V_G} \circ \bar{\alpha}(y \otimes 1)$$
$$= \delta(y) \otimes 1$$

と成るので，$\delta(y) \in \mathcal{M}^\alpha \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$．ところで，$w \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ だから，δ は $\mathcal{M}^\alpha$ から $\mathcal{M}^\alpha \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ の中への同型写像である．条件 (5.2) により，δ は G の $\mathcal{M}^\alpha$ 上への Co-作用である．

さて，条件 (5.3) により，$Ad_{w_j^*}$ は $\{\bar{\mathcal{M}}, \tilde{\alpha}\}$ から $\{\bar{\mathcal{M}}, \bar{\alpha}\}$ の上への同型写像を与える．ただし $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$．補題 3.2 (a) により，$\mathcal{M} \times_\alpha G = \bar{\mathcal{M}}^{\tilde{\alpha}}$ だから，$\bar{\mathcal{M}}$ は $\bar{\mathcal{M}}^{\bar{\alpha}} = \mathcal{M}^\alpha \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ と $Ad_{w_j^*}(\mathbb{C} \otimes L^\infty(G))$ により生成される．ここで，(ii) $\Rightarrow$ (iii) の証

明での記号を使って

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} \otimes L^2(G), \quad \pi(f) = 1_{\mathfrak{K}} \otimes f, \quad \alpha \circ \pi = (\pi \otimes \iota) \circ \lambda$$

と仮定する. $w = 1 \otimes W_G$ だったから, 補題 4.2 (a) により

$$w_J^*(\mathcal{L}_{\mathfrak{H}} \otimes L^\infty(G)) w_J \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{K}} \otimes L^\infty(G) \otimes L^\infty(G).$$

したがって, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}^\alpha$ と $\pi(L^\infty(G))$ により生成される.

もし, $y \in \mathcal{M}^\alpha$, $f \in L^\infty(G)$ とすれば,

(5.4) $\qquad w_J^* \alpha(y) w_J = w_J^*(y \otimes 1) w_J = \delta(y)$

(5.5) $\qquad w_J^* \alpha(\pi(f)) w_J = w_J^* \pi_0(f) w_J = 1 \otimes f$

となる. したがって, $\mathrm{Ad}_{w_J^*} \circ \alpha$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^\alpha \times_\delta G$ の上への同型写像である. また, 条件 (5.4) と (5.5) により, $\mathcal{M}^\alpha$ と $\pi(L^\infty(G))$ 上で

$$\mathrm{Ad}_{w_J^* \otimes 1} \circ (\alpha \otimes \iota) \circ \alpha = \hat{\delta} \circ \mathrm{Ad}_{w_J^*} \circ \alpha$$

をみたすので, $\{\mathcal{M}, \alpha\} \cong \{\mathcal{M}^\alpha \times_\delta G, \hat{\delta}\}$ を得る. 証了.

才2部　表現環による接合積

§6　表現環と結合作用素

才1部では, 局所コンパクト群 G の双対として, フーリエ環を使った. 才2部では, 表現論の立場にたち, 双対として十分沢山なユニタリー表現からなる環を採用する. 話の煩

雑さを避けるために，以後 G は可分なコンパクト群，フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が作用するヒルベルト空間 $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ も可分と仮定することにする．さらに，G でのハール測度は正規化しておく．

定義 6.1．G の（連続な）ユニタリー表現の作る集合 $\mathcal{R}$ で次の2条件をみたすものを G の表現環という：

(i)　$\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}$ ならば $\pi_1 \oplus \pi_2,\ \pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}$．

(ii)　自明な表現 $\{\iota, \mathfrak{H}_\iota\}$ が存在して

$$\pi = \pi \otimes \iota = \iota \otimes \pi, \quad \pi \in \mathcal{R}.$$

特に，表現環 $\mathcal{R}$ が次の条件をみたすとき自己共役という．

(iii)　$\pi \in \mathcal{R}$ ならば，$\bar{\pi} \in \mathcal{R}$．

次に，お互の表現を結び付ける，結合作用素を考えることにする．$\{\pi_1, \mathfrak{H}_1\}, \{\pi_2, \mathfrak{H}_2\} \in \mathcal{R}$ に対し

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) = \{a \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1) : \pi_1(t)a = a\pi_2(t),\ t \in G\}$$

と置く．この定義より直ちに，

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2)\,\mathcal{I}_G(\pi_2, \pi_3) \subset \mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_3)$$

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) \oplus \mathcal{I}_G(\pi_1', \pi_2') \subset \mathcal{I}_G(\pi_1 \oplus \pi_1', \pi_2 \oplus \pi_2')$$

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) \otimes \mathcal{I}_G(\pi_1', \pi_2') \subset \mathcal{I}_G(\pi_1 \otimes \pi_1', \pi_2 \otimes \pi_2')$$

がわかる．フォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ のすべての $*$ 自己準同型

写像全体を $\mathrm{End}(\mathcal{N})$ と書く．各 $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{End}(\mathcal{N})$ に対し，それらの結合作用素全体を

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2) = \{ b \in \mathcal{N} : \rho_1(y) b = b \rho_2(y),\ y \in \mathcal{N} \}$$

と置く．この定義より直ちに

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2)\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_2, \rho_3) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_3)$$

$$\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2)) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho\circ\rho_1, \rho\circ\rho_2)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1\circ\rho, \rho_2\circ\rho) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2)$$

がわかる．これらの包含関係を組み合わせて

$$\rho_1'(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2))\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1', \rho_2') \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1'\circ\rho_1, \rho_2'\circ\rho_2)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1, \rho_2)\rho_2(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1', \rho_2')) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_1\circ\rho_1', \rho_2\circ\rho_2').$$

最後に，表現環の大切な例を与えるために，フォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ の<u>中の</u>ヒルベルト空間なる概念を導入する．

定義 6.2. $\mathcal{N}$ の閉部分ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ が次の２条件をみたすとき，$\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間という：

(i) $x, y \in \mathfrak{H}$ ならば，$y^*x \in \mathbb{C}$.

(ii) $a \in \mathcal{N}$ かつ $a \neq 0$ ならば，$a\mathfrak{H} \neq \{0\}$.

$\mathfrak{H}$ の内積 $(x|y)$ は条件 (i) の y^*x で与えられている．もし $\mathcal{N}$ が有限型ならば，常に $\dim \mathfrak{H} = 1$ である．$\mathfrak{H}$ の正規直交基底を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ とすれば，各 v_j は等距離作用素

で $\sum v_j v_j^* = 1$ をみたす．ここで

$$\rho_{\mathfrak{H}}(y) = \sum v_j y v_j^*, \quad y \in \mathcal{N}$$

とすれば，$\rho_{\mathfrak{H}}$ は $\mathrm{End}(\mathcal{N})$ の元である．

$\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ に対し，もし $x \in \mathfrak{H}_1$，$y \in \mathfrak{H}_2$ たら yx^* は $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ の元と同一視できるので，$\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) \subset \mathcal{N}$ と考えられる．さらに，$\rho_{\mathfrak{H}}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cap \mathcal{L}(\mathfrak{H})'$ だから，

$$\mathcal{N} = \rho_{\mathfrak{H}}(\mathcal{N}) \bar{\otimes} \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

となる．

再び，$\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ に対し，$\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 = \{xy : x \in \mathfrak{H}_1, y \in \mathfrak{H}_2\}$ はテンソル積 $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ の $\mathcal{N}$ の中での実現である．w_1, w_2 を $w_1w_1^* + w_2w_2^* = 1$ をみたす $\mathcal{M}^\alpha$ の等距離作用素としたとき，$w_1\mathfrak{H}_1 + w_2\mathfrak{H}_2$ は直和 $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ の $\mathcal{N}$ の中での実現の一つである．

さて，$\mathcal{M}^\alpha$ が真無限型の共変系 $\{\mathcal{M}, G, \alpha\}$ を考える．α で不変な $\mathcal{M}$ の中のヒルベルト空間全体を $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ とする．$\mathfrak{H} \in \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ に対し，もし $x, y \in \mathfrak{H}$ なら，

$$(\alpha_t(x) | \alpha_t(y)) = \alpha_t(y^*x) = y^*x = (x | y)$$

となるから，α の $\mathfrak{H}$ 上への制限は G の $\mathfrak{H}$ 上へのユニタリー表現になる．これを $\{\alpha, \mathfrak{H}\}$ と書くことにする．こうして $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ は G の表現の集合と考えられ，しかも次の

$$\{\alpha, \xi_1\xi_2\} \cong \{\alpha, \xi_1\} \otimes \{\alpha, \xi_2\}$$

$$\{\alpha, w_1\xi_1 + w_2\xi_2\} \cong \{\alpha, \xi_1\} \oplus \{\alpha, \xi_2\}$$

$$\{\alpha, \mathbb{C}\} \cong \{\iota, \xi_\iota\}$$

の意味で表現環になる．

§7　Roberts の作用と接合積

以後 $\mathcal{R}$ は常に G の表現環とする．ここでは，この $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ に作用させることを考えよう．

定義 7.1.　$\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用 $\{\rho, \eta\}$ とは次の5条件をみたす $\rho_\pi \in \mathrm{End}(\mathcal{N})$，$(\pi \in \mathcal{R})$ と弱連続な線形写像 $\eta_{\pi,\pi'} : \mathcal{I}_G(\pi, \pi') \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\rho_\pi, \rho_{\pi'})$，$(\pi, \pi' \in \mathcal{R})$ の集まりを云う：

(i)　$\rho_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \rho_{\pi_1} \circ \rho_{\pi_2}$.

(ii)　$a \in \mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2)$，$a' \in \mathcal{I}_G(\pi_1', \pi_2')$ に対し

$$\eta_{\pi_1 \otimes \pi_1', \pi_2 \otimes \pi_2'}(a \otimes a') = \eta_{\pi_1, \pi_2}(a)\, \rho_{\pi_2}(\eta_{\pi_1', \pi_2'}(a'))$$
$$= \rho_{\pi_1}(\eta_{\pi_1', \pi_2'}(a'))\, \eta_{\pi_1, \pi_2}(a) .$$

(iii)　$\eta_{\pi,\pi}(1) = 1$.

(iv)　$a \in \mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2)$ に対し　$\eta_{\pi_1, \pi_2}(a)^* = \eta_{\pi_2, \pi_1}(a^*)$.

(v)　$a \in \mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2)$，$b \in \mathcal{I}_G(\pi_2, \pi_3)$ に対し

$$\eta_{\pi_1,\pi_2}(a)\,\eta_{\pi_2,\pi_3}(\tilde{a}) = \eta_{\pi_1,\pi_3}(a\tilde{a}) .$$

Robertsの作用はGが可換な場合には，第1部での作用に成っていることに注意しよう．非可換な場合は，前節で与えた表現環 $\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{M})$ を使って

$$\rho_{\alpha\lceil\mathfrak{H}}(y)=\gamma_{\mathfrak{H}}(y)\ ,\quad \mathfrak{H}\in\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{M})$$

$$\eta_{\alpha\lceil\mathfrak{H}_1,\alpha\lceil\mathfrak{H}_2}(a)=a\ ,\quad a\in\mathcal{G}_G(\alpha\lceil\mathfrak{H}_1,\alpha\lceil\mathfrak{H}_2)$$

と置く事により，$\{\rho_{\alpha\lceil\mathfrak{H}},\ \eta_{\alpha\lceil\mathfrak{H}_1,\alpha\lceil\mathfrak{H}_2} : \mathfrak{H},\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2\in\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{M})\}$ が，$\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{M})$ の $\mathcal{M}^\alpha$ 上へのRobertsの作用であることがわかる．

さて，これから，$\mathcal{N}$ と $\mathcal{R}$ との接合積を作るに先立ち，二つの表現 $\pi_\mathcal{R}$ と $v_\mathcal{R}$ を考えることから始めよう．

$$\{\pi_\mathcal{R},\mathfrak{H}_\mathcal{R}\}=\sum\nolimits^{\oplus}_{\pi\in\mathcal{R}}\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}$$

と置く．$\mathfrak{H}_\mathcal{R}$ 上の連続作用素は行列 $(a_{\pi,\pi'})_{\pi,\pi'\in\mathcal{R}}$ の形に表わせる．結合作用素の性質を使って

$$(a_{\pi,\pi'})\in\pi_\mathcal{R}(G)' \iff a_{\pi,\pi'}\in\mathcal{G}_G(\pi,\pi') \quad (\forall\pi,\pi'\in\mathcal{R})$$

を得る．各既約表現 $\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}\in\mathcal{R}$ と各 $\xi\in\mathfrak{H}_\pi$ に対し

$$v_\mathcal{R}(\xi)\sum\nolimits^{\oplus}\eta_{\pi'}=\sum\nolimits^{\oplus}\eta_{\pi'}\otimes\xi\ ,\quad \eta_{\pi'}\in\mathfrak{H}_{\pi'} ,$$

とすれば，

$$\|v_\mathcal{R}(\xi)\|=\|\xi\| ,\qquad \xi\in\mathfrak{H}_\pi$$

$$v_\mathcal{R}(\xi\otimes\eta)=v_\mathcal{R}(\eta)\,v_\mathcal{R}(\xi) ,\qquad \eta\in\mathfrak{H}_{\pi'}$$

が成り立つ．特に，$\|\xi\|=1$ ならば，$v_\mathcal{R}(\xi)$ は等距離作用素に

なる．さらに，$\pi_{\mathcal{R}}$ と $U_{\mathcal{R}}$ は交換関係

$$\pi_{\mathcal{R}}(t)\,U_{\mathcal{R}}(\xi)=U_{\mathcal{R}}(\pi(t)\xi)\,\pi_{\mathcal{R}}(t),\quad \xi\in\mathfrak{H}_{\pi}$$

をみたす．

次に，Roberts の作用による接合積が作用するヒルベルト空間を考えよう．$\mathfrak{H}_{\mathcal{R}}$ から $\mathfrak{K}$ への有界線形作用素 Φ で

$$\eta_{\pi,\pi'}(a)\Phi\xi=\Phi a\xi\,,\quad a\in\mathcal{J}_G(\pi,\pi'),\ \xi\in\mathfrak{H}_{\pi'}$$

をみたすもの全体を $F(\rho,\mathfrak{K})$ とする．Φ の $\mathfrak{H}_{\pi}$ への制限を $\Phi(\pi)$ と書くことにすれば，Φ の定義は

$$\eta_{\pi,\pi'}(a)\Phi(\pi')=\Phi(\pi)a\,,\quad a\in\mathcal{J}_G(\pi,\pi')$$

とも表わせる．ここで，$\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現 $\{\pi_r,\mathfrak{H}_r\}$ を含んでいるものと仮定しよう．θ を $\pi_r(G)''$ から $\mathcal{R}(G)$ 上への同型写像で $\theta(\pi_r(t))=\rho(t)$ をみたすものとする．$\mathcal{J}_G(\pi_r,\pi_r)=\pi_r(G)'$ だから，$\theta(\Phi(\pi_r)^*\Phi(\pi_r))$ は $\mathcal{R}(G)$ の元である．Φ のセミノルムを，$\mathcal{R}(G)$ 上のプランシェレル重み φ_G （$\varphi_G(\rho(f)\rho(g)^*)=(f|g)=f*g^b(e)$）を使って

(7.1) $$\|\Phi\|^2=\varphi_G(\theta(\Phi(\pi_r)^*\Phi(\pi_r)))$$

で与える．$F(\rho,\mathfrak{K})$ の元 Φ で $\|\Phi\|<\infty$ をみたすもの全体を $F_0(\rho,\mathfrak{K})$ とする．次の補題により，(7.1) で与えられたセミノルムは，$F_0(\rho,\mathfrak{K})$ 上でノルムに成っていることがわかる．

補題 7.2．$\Phi(\pi_r)=0$ ならば，$\Phi=0$．

証明. θ を上で与えられた, $\pi_r(G)''$ から $\mathcal{R}(G)$ 上への同型写像とする. ある重複度をもつ自明な表現を 1 と置けば

$$\Phi(\pi_r\otimes 1)a=\eta_{\pi_r\otimes 1,\,\pi_r}(a)\,\Phi(\pi_r)$$

が任意な $a\in\mathcal{I}_G(\pi_r\otimes 1,\pi_r)$ に対して成り立ち, $\Phi(\pi_r\otimes 1)=0$ を得る. 任意な表現 $\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}$ に対し, $L^\infty(G)\bar{\otimes}\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\pi)$ のユニタリー作用素 U を $(U\xi)(t)=\pi(t)\xi(t)$, $\xi\in L^2(G)\otimes\mathfrak{H}_\pi$ で与えれば,

(7.2) $$\mathrm{Ad}_{(\theta\otimes 1)^{-1}(U)}(\pi_r(t)\otimes 1)=\pi_r(t)\otimes\pi(t)$$

となる. したがって, $\Phi(\pi_r\otimes\pi)=0$ である. さらに

$$\Phi(\pi)b=\eta_{\pi,\,\pi_r\otimes\pi}(b)\,\Phi(\pi_r\otimes\pi)$$

が任意な $b\in\mathcal{I}_G(\pi,\pi_r\otimes\pi)$ で成り立つから, $\Phi(\pi)=0$ となる. π は $\mathcal{R}$ の任意な元であったから, $\Phi=0$ である. 証了.

定義 7.3. $F_0(\rho,\mathcal{R})$ を (7.1) で与えられたノルムにより完備にしたものを $L^2(\rho,\mathcal{R})$ と書く.

補題 7.4. $y\in\mathcal{N}$ かつ $\xi\in\mathfrak{H}_\pi$ とする. もし $\Phi\in F(\rho,\mathcal{R})$ ならば, $\rho(y)\Phi$, $\Phi v_{\mathcal{R}}(\xi)\in F(\rho,\mathcal{R})$. ただし, $(\rho(y)\Phi)(\pi)=\rho_\pi(y)\Phi(\pi)$ である.

証明. $\Phi\in F(\rho,\mathcal{R})$ とする. 先ず, 任意な $b\in\mathcal{I}_G(\pi,\pi')$ に対し, $\rho_\pi(y)\eta_{\pi,\pi'}(b)=\eta_{\pi,\pi'}(b)\rho_{\pi'}(y)$ である. したがって, 任

意な $a \in \mathfrak{g}_G(\pi, \pi')$ に対し $\tilde{a} = \eta_{\pi,\pi'}(a)$ と置けば

$$\tilde{a}\,(\rho(y)\Phi)(\pi') = \tilde{a}\,\rho_{\pi'}(y)\Phi(\pi') = \rho_\pi(y)\,\tilde{a}\,\Phi(\pi')$$
$$= \rho_\pi(y)\Phi(\pi)\,a = (\rho(y)\Phi)(\pi)\,a$$

となる．つまり，$\rho(y)\Phi \in F(\rho, \mathfrak{H})$ である．

定義 7.1 (ii) より，任意な $a \in \mathfrak{g}_G(\pi, \pi')$ に対し

$$(a \otimes 1_\pi)^\sim = \tilde{a}\,\rho_{\pi'}(\tilde{1}_\pi) = \tilde{a}$$

となるので

$$\Phi\, v_{\mathcal{R}}(\xi)\, a\, \xi_{\pi'} = \Phi(\pi' \otimes \pi)(a \otimes 1_\pi)(\xi_{\pi'} \otimes \xi) = (a \otimes 1_\pi)^\sim\, \Phi(\pi' \otimes \pi)(\xi_{\pi'} \otimes \xi)$$
$$= \tilde{a}\,\Phi(\pi' \otimes \pi)(\xi_{\pi'} \otimes \xi) = \tilde{a}\,\Phi\, v_{\mathcal{R}}(\xi)\,\xi_{\pi'}$$

となる．つまり，$\Phi v_{\mathcal{R}}(\xi) \in F(\rho, \mathfrak{H})$．証了．

定義 7.5（接合積） $\mathcal{R}$ を右正則表現と準同値な元を含む表現環とする．$\rho(y)$ と $\nabla(\xi)$ を，$\Phi \in F_0(\rho, \mathfrak{H})$ に対し，

(7.3) $\qquad (\rho(y)\Phi)(\pi) = \rho_\pi(y)\Phi(\pi), \qquad y \in \mathcal{N},$

(7.4) $\qquad \nabla(\xi)\Phi = \Phi\, v_{\mathcal{R}}(\xi), \qquad \xi \in \mathfrak{H}_\pi$

で与えられる $L^2(\rho, \mathfrak{H})$ 上の作用素としたとき，$\rho(\mathcal{N})$ と全ての既約な $\pi \in \mathcal{R}$ に対する $\nabla(\mathfrak{H}_\pi)$，により生成されるフォン・ノイマン環 $\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}$ を $\mathcal{N}$ と $\mathcal{R}$ の Roberts の作用 $\{\rho, \eta\}$ に関する<u>接合積</u>という．

特に，(7.3) と (7.4) 式より

(7.5) $\quad V(\xi)\rho(y) = \rho(\rho_\pi(y))V(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{h}_\pi,$

が成りたつ.

§8 Robertsの作用の双対とその不動点

ここでは，接合積 $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ 上に双対作用 $\hat{\rho}$ を与え，$\mathcal{R}$ に含まれる任意な既約表現が $\hat{\rho}$ を $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ の中の或るヒルベルト空間へ制限して実現されることと $(\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R})^{\hat{\rho}} = \rho(\mathcal{N})$ を示す. G が可換な場合，前者は，任意な $p \in \hat{G}$ に対し

$$\hat{\alpha}_p(1\otimes\rho(t)) = \overline{\langle t, p\rangle}\,(1\otimes\rho(t)),$$

つまり，p は $\hat{\alpha}$ を $\mathcal{M}\times_\alpha G$ の中の1次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}(1\otimes\rho(t))$ へ制限して実現されていることに対応している.

さて，G の $L^2(\rho, \mathfrak{h})$ 上への表現 U を

$$U(t)\Phi = \Phi\pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1}, \quad \Phi \in F_0(\rho, \mathfrak{h})$$

で与えれば，直ちに

(8.1) $\quad U(t)\rho(y) = \rho(y)U(t), \qquad y \in \mathcal{N},$

(8.2) $\quad U(t)V(\xi) = V(\pi(t)\xi)U(t), \qquad \xi \in \mathfrak{h}_\pi$

を得る. このように，作用 $t \mapsto \mathrm{Ad}_{U(t)}$ は $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ を不変にするので，$\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ 上への制限 $\hat{\rho}_t$ を Robertsの作用 $\{\rho, \eta\}$ の双対という.

命題 8.1. $\{\rho, \eta\}$ を $\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts 作用，$\hat{\rho}$ をその双対とする．もし $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\} \in \mathcal{R}$ が既約ならば，

(i) $\{\hat{\rho}, \nabla(\mathfrak{H}_\pi)\} \in \mathcal{H}_{\hat{\rho}}(\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R})$.

(ii) $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\} \cong \{\hat{\rho}, \nabla(\mathfrak{H}_\pi)\}$.

補題 8.2. もし $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\} \in \mathcal{R}$ が既約ならば，

$$\nabla(\eta)^* \nabla(\xi) = (\xi | \eta) 1, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{H}_\pi. \tag{8.3}$$

証明. (7.2) 式により，π_r は $\pi_r \otimes \pi$ と準同値である．したがって，$\sigma(\pi_r(t)) = \pi_r(t) \otimes \pi(t)$ なる $\pi_r(G)''$ から $((\pi_r \otimes \pi)(G))''$ 上への同型写像が在る．もし $a \in \mathcal{J}_G(\pi_r \otimes \pi, \pi_r)$ が等距離作用素かつ e がその値域への射影 aa^* ならば，$e(\mathfrak{H}_r \otimes \mathfrak{H}_\pi)$ 上で

$$e(\sigma(\pi_r(t)))e = a\pi_r(t)a^* \tag{8.4}$$

となる．もし $f = \eta_{\pi_r \otimes \pi, \pi_r}(a)^* \eta_{\pi_r \otimes \pi, \pi_r}(a)$ ならば，

$$\begin{aligned} a(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r))a^* &= a(\Phi(\pi_r)^* f\, \Phi(\pi_r))a^* \\ &= e(\Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi))e. \end{aligned} \tag{8.5}$$

ここで，a は $\mathcal{J}_G(\pi_r \otimes \pi, \pi_r)$ の任意な等距離作用素であるし，$\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r) \in \pi_r(G)''$ かつ $\Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi) \in ((\pi_r \otimes \pi)(G))''$ であるから，(8.4)，(8.5) と a の任意性により

$$\sigma(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r)) = \Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi)$$

を得る．もし $\Phi, \Psi \in F_0(\rho, \mathfrak{K})$ かつ $\xi, \eta \in \mathfrak{H}_\pi$ ならば

$$(8.6)\qquad \begin{aligned}(\nabla(\xi)\Phi \mid \nabla(\eta)\Phi) &= \psi_G(\theta(v_{\mathcal{R}}(\eta)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi) v_{\mathcal{R}}(\xi))) \\ &= \psi_G(\theta(v_{\mathcal{R}}(\eta)^* \sigma(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r)) v_{\mathcal{R}}(\xi))).\end{aligned}$$

他方，$f \in A(G)$ かつ $\zeta \in \mathfrak{h}_r$ ならば，

$$\begin{aligned}&v_{\mathcal{R}}(\eta)^* \sigma(\pi_r(f)) v_{\mathcal{R}}(\xi)\zeta = v_{\mathcal{R}}(\eta)^* \sigma(\pi_r(f))(\zeta \otimes \xi) \\ &= v_{\mathcal{R}}(\eta)^* \int f(t)(\pi_r(t)\zeta \otimes \pi(t)\xi)\,dt = \int f(t)(\pi(t)\xi \mid \eta)\pi_r(t)\zeta\,dt \\ &= \pi_r(g)\zeta, \qquad (g(t) = f(t)(\pi(t)\xi \mid \eta)).\end{aligned}$$

したがって，(8.6) 式の右辺は，(7.1) 式により $(\xi \mid \eta)(\Phi \mid \Phi)$ となり，(8.3) 式を得る．証了．

命題8.1の証明．(i) $\{\iota, \mathfrak{h}_\iota\}$ を $\pi = \pi \otimes \iota = \iota \otimes \pi$ なる自明な表現，ε_0 を $\mathfrak{h}_\iota = \mathbb{C}\varepsilon_0$ なる正規化されたベクトルとする．$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d\}$, $\{\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_d\}$ を $\mathfrak{h}_\pi$, $\mathfrak{h}_{\bar{\pi}}$ の対応する正規直交基底とする．$a \in \mathcal{I}_G(\bar{\pi} \otimes \pi, \iota)$ と $\bar{a} \in \mathcal{I}_G(\pi \otimes \bar{\pi}, \iota)$ を

$$a\varepsilon_0 = \sum \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_j, \quad \bar{a}\varepsilon_0 = \sum \varepsilon_j \otimes \bar{\varepsilon}_j$$

に選ぶ．$(a\varepsilon_0 \mid \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_k) = \delta_{j,k}$ だから，

$$(1_\pi \otimes a^*)(\bar{a} \otimes 1_\pi)(\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_k) = (1_\pi \otimes a^*)\sum_j \varepsilon_j \otimes \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_k = \varepsilon_k \otimes \varepsilon_0.$$

ところで，$\pi = \pi \otimes \iota = \iota \otimes \pi$ だから，$(1_\pi \otimes a^*)(\bar{a} \otimes 1_\pi) = 1_\pi$，すなわち，

$$(8.7)\qquad \rho_\pi(\eta_{\bar{\pi} \otimes \pi, \iota}(a)^*)\eta_{\pi \otimes \bar{\pi}, \iota}(\bar{a}) = 1$$

となる．再び，$\pi = \pi \otimes \iota = \iota \otimes \pi$ だから，$\nabla(\varepsilon_0) = 1$ である．また，$\xi \in \mathfrak{h}_\pi$，$a \in \mathcal{I}_G(\pi', \pi)$ に対し，$\nabla(a\xi) = \rho(\eta_{\pi', \pi}(a))\nabla(\xi)$

であるから，

$$\rho(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a)) = \rho(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a))\nabla(\varepsilon_0) = \nabla(a\varepsilon_0)$$
$$= \sum \nabla(\bar{\varepsilon}_j\otimes\varepsilon_j) = \sum \nabla(\bar{\varepsilon}_j)\nabla(\varepsilon_j).$$

したがって，補題 8.2 により，

$$\sum \nabla(\varepsilon_j)\nabla(\varepsilon_j)^* = \sum \nabla(\varepsilon_j)\rho(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a))^*\nabla(\bar{\varepsilon}_j) \qquad (\text{By } (8.3))$$
$$= \sum \rho(\rho_\pi(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a))^*)\nabla(\varepsilon_j)\nabla(\bar{\varepsilon}_j) \qquad (\text{By } (7.5))$$
$$= \rho(\rho_\pi(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a))^*)\nabla(\bar{a}\varepsilon_0)$$
$$= \rho\big(\rho_\pi(\eta_{\bar{\pi}\otimes\pi,\iota}(a))^*\eta_{\pi\otimes\bar{\pi},\iota}(\bar{a})\big) = 1. \qquad (\text{By } (8.7))$$

したがって，$\nabla(\mathfrak{H}_\pi)$ は $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ の中のヒルベルト空間になる．
また，(8.2) 式により，$\hat{\rho}_t(\nabla(\xi)) = \nabla(\pi(t)\xi)$，$\xi\in\mathfrak{H}_\pi$ だから，
$\{\hat{\rho}, \nabla(\mathfrak{H}_\pi)\} \in \mathcal{H}_{\hat{\rho}}(\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R})$ となる．

(ii) これは

$$\nabla(\eta)^*\hat{\rho}_t(\nabla(\xi)) = \nabla(\eta)^*\nabla(\pi(t)\xi) = (\pi(t)\xi|\eta)1$$

より明らか．証了．

最後に $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ における $\hat{\rho}$ の不動点を調べよう．

命題 8.3. $(\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R})^{\hat{\rho}} = \rho(\mathcal{N})$.

証明. (8.1) により，$(\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R})^{\hat{\rho}}\subset\rho(\mathcal{N})$ を示せばよい．もし $\pi\in\mathcal{R}$ が自明でない既約表現なら，$\int\pi(t)\xi\,dt = 0$ である．

したがって，$\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ が既約なら，すべての $\xi \in \mathfrak{H}_\pi$ に対し $V(\xi) \in \mathcal{U} 1$ となる.

さて，$\mathcal{E}$ を $\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}$ から $(\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R})^{\hat{\rho}}$ 上への正規な期待値：

$$\mathcal{E}(x) = \int \hat{\rho}_t(x)\, dt, \quad x \in \mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}$$

とする. 任意な $y_j \in \mathcal{N}$, $\xi_j \in \mathfrak{H}_{\pi_j}$ により，$\sum \rho(y_j) V(\xi_j)$ と表わされる元全体は $\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}$ で σ-弱位相に関して稠密で，しかも

$$\mathcal{E}\left(\sum \rho(y_j) V(\xi_j)\right) = \sum \rho(y_j) V\left(\int \pi(t) \xi_j\, dt\right) \in \rho(\mathcal{N})$$

をみたすので，補題が証明された.

§9 作用のスペクトル

前節の結果を念頭に，G が可換な場合に知られている作用のスペクトルを，非可換な G による共変系 $\{\mathcal{M}, G, \alpha\}$ に対しても考えることができる. G のユニタリー表現 $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ に対し

$$\mathcal{M}^\alpha(\pi) = \{x \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(\mathfrak{H}_\pi) : (\alpha_t \otimes \iota)(x) = x(1 \otimes \pi(t))\}$$

と置く. 特に，π が既約な場合には，対応する固有空間の役を果している.

命題 9.1 もし $\mathcal{M}^\alpha$ が真無限型なら，次の 2 条件は同値で

ある：

(i) $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ は $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ とユニタリー同値な元を持つ．

(ii) $\mathcal{M}^\alpha(\pi)$ はユニタリー作用素を持つ．

証明．(i)⇒(ii) $\{\alpha, \mathfrak{K}\} \cong \{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ とする．$\mathfrak{H}_0$ を $\mathcal{M}^\alpha$ の中の $\mathfrak{K}$ と同じ次元をもつヒルベルト空間，$\{v_1, \cdots, v_d\}$, $\{w_1, \cdots, w_d\}$, $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d\}$ をそれぞれ $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}_\pi$ の正規直交基底とする．このとき，基底の選び方は

(9.1) $$(\pi(t)\varepsilon_j \mid \varepsilon_k) = w_k^* \alpha_t(w_j)$$

と仮定できる．$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_\pi$ 上への等距離作用素 V を

(9.2) $$V\xi = \sum v_j^*\xi\otimes\varepsilon_j, \quad \xi\in\mathfrak{H}$$

で与えると，$V^{-1}\sum \xi_j\otimes\varepsilon_j = \sum v_j\xi_j$ となる．ここで

$$W = V\sum w_j v_j^* \, V^{-1}$$

と置けば，W はユニタリーである．さらに $T_{\xi,\eta}\zeta = (\zeta|\eta)\xi$ と置けば，

$$W = \sum v_j^* w_k \otimes T_{\varepsilon_j,\varepsilon_k} \in \mathcal{M}\,\bar{\otimes}\,\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\pi)$$

と表わせる．(9.1)式より，

$$(\alpha_t\otimes\iota)(W) = \sum v_j^*\alpha_t(w_\ell)\otimes T_{\varepsilon_j,\varepsilon_\ell} = \sum v_j^* w_k w_k^*\alpha_t(w_\ell)\otimes T_{\varepsilon_j,\varepsilon_\ell}$$
$$= \sum v_j^* w_k\otimes T_{\varepsilon_j,\pi(t)\varepsilon_k} = W(1\otimes\pi(t)).$$

(ii)⇒(i) W を $\mathcal{M}^\alpha(\pi)$ のユニタリー作用素とする．$\mathfrak{H}_0$ を $\mathcal{M}^\alpha$ の中の $\mathfrak{H}_\pi$ と同じ次元をもつヒルベルト空間，$\{v_1, \cdots, v_d\}$,

$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d\}$ をそれぞれ $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_\pi$ の正規直交基底とする．$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_\pi$ 上への等距離作用素 ∇ を (9.2) で定義する．ここで，$w_j = \nabla^{-1} W \nabla v_j$ とすれば，$\{w_1, \cdots, w_d\}$ は $\mathfrak{K} \in \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ の基底に成る．実際，直接計算により，

$$(\alpha_t \otimes \iota)\circ \mathrm{Ad}_\nabla = \mathrm{Ad}_\nabla \circ \alpha_t$$

$$\nabla^{-1}(1\otimes\pi(t))\nabla = \sum_{j,k} (\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k)\, v_k v_j^*$$

を得るから，

$$\alpha_t(w_j) = \alpha_t(\nabla^{-1} W \nabla)v_j = (\nabla^{-1}W\nabla)(\nabla^{-1}(1\otimes\pi(t))\nabla)v_j$$
$$= \sum_k (\pi(t)\varepsilon_j|\varepsilon_k)\nabla^{-1}W\nabla v_k = \sum_k (\pi(t)\varepsilon_j|\varepsilon_k) w_k.$$

したがって，$\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\} \cong \{\alpha, \mathfrak{K}\}$．　証了．

命題 9.2. もし $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)$ のユニタリー作用素 w が存在して，$(\alpha_t\otimes\iota)(w^*) = w^*(1\otimes\rho(t))$ ならば，

(i)　G の任意な既約表現 $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ に対し，$\mathcal{M}^\alpha(\pi)$ はユニタリー作用素を含んでいる．

(ii)　$\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{R}(G)'$ のユニタリー作用素 w^J が存在して，$(\alpha_t\otimes\iota)(w^J) = w^J(1\otimes\lambda(t))$ をみたす．

証明．(i)　既約表現 $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ に対しては，$\mathcal{R}(G)'$ の射影 e と $eL^2(G)$ から $\mathfrak{H}_\pi$ 上への等距離作用素 u が存在して

$$\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\} = u\{\rho, L^2(G)\}_e u^*$$

となる．$e \in \mathcal{R}'(G)$ だから，$v = (1 \otimes u) w (1 \otimes u)^{-1}$ は $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(\mathfrak{H}_\pi)$ のユニタリー作用素で，しかも，$(\alpha_t \otimes \iota)(v) = v(1 \otimes \pi(t))$ をみたす．

(ii) $w^J = (1 \otimes J) w^* (1 \otimes J)$ とすれば

$$(\alpha_t \otimes \iota)(w^J) = Ad_{1 \otimes J} \circ (\alpha_t \otimes \iota)(w^*) = w^J (1 \otimes \lambda(t)).$$

証了．

命題 9.3．もし α が双対作用で $\mathcal{M}^\alpha$ が真無限型なら，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}^\alpha$ と $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ により生成されている．

証明．x を $\mathcal{M}$ の任意な元とする．命題 9.1 と 9.2 により，任意な既約表現 $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ とユニタリー同値な元 $\{\alpha, \mathfrak{K}\}$ が $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ に存在する．$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d\}$ と $\{v_1, \cdots, v_d\}$ を $\mathfrak{H}_\pi$ と $\mathfrak{K}$ の対応する正規直交基底とすれば，

$$(9.3) \qquad \int \overline{(\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k)}\, \alpha_t(x)\, dt = \mathcal{E}(x v_j^*) v_k$$

となる．ただし，$\mathcal{E}(y) = \int \alpha_t(y)\, dt$ である．ストーン－ワイエルシュトラスの定理により，$(\pi(t)\xi | \eta)$，$\xi, \eta \in \mathfrak{H}_\pi$ なる形をした G 上の関数全体は G の点を分離するので，$C(G)$ でノルム稠密である．したがって，G の単位元でのディラック関数を $(\pi(t)\xi | \eta)$ の1次結合で近似することにより，(9.3) の左辺は x に収束させることができる．証了．

§10　二種の接合積の同値性

これまでの結果を綜合して，我々の目的であった，C_0-作用による接合積と，Roberts の作用の接合積が同値なことを示す．

定理 10.1.　G は可分コンパクト群，$\mathcal{N}$ は可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のフォン・ノイマン環とする．

(i)　δ が G の $\mathcal{N}$ 上への C_0-作用ならば，右正則表現と準同値な元を持つ表現環 $\mathcal{R}$ と，$\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用 $\{\rho, \gamma\}$ が存在して

(10.1)　　$\{\mathcal{N} \times_\delta G, \hat{\delta}\} \cong \{\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}, \hat{\rho}\}.$

(ii)　$\mathcal{R}$ が右正則表現と準同値な元を持つ表現環で，$\{\rho, \gamma\}$ が $\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用ならば，(10.1) をみたす G の $\mathcal{N}$ 上への C_0-作用 δ が在る．

この定理からわかるように，次の手順の構成

$$\{\mathcal{N}, G, \delta_1\} \xrightarrow{(i)} \{\mathcal{N}, \mathcal{R}, \{\rho, \gamma\}\} \xrightarrow{(ii)} \{\mathcal{N}, G, \delta_2\}$$

を行うと，$\{\mathcal{N} \times_{\delta_1} G, \hat{\delta}_1\} \cong \{\mathcal{N} \times_{\delta_2} G, \hat{\delta}_2\}$ となる．つまり，$\mathcal{N} \times_{\delta_1} G$ から $\mathcal{N} \times_{\delta_2} G$ 上への同型写像 π が存在して

$$(\pi \otimes \iota) \circ \hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_2 \circ \pi$$

となる．このとき，$\bar{\pi}\circ\delta_1(\mathcal{N})=\delta_2(\mathcal{N})$ だから，$\pi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ が存在して，$\bar{\pi}\circ\delta_1(y)=\delta_2\circ\pi(y)$ と書け，しかも，$\mathcal{N}\times_{\delta_1}G$ 上で $\bar{\pi}=\pi\otimes\iota$ となる．したがって，

$$(\pi\otimes\iota)\circ\delta_1=\delta_2\circ\pi,$$

つまり，$\{\mathcal{N},\delta_1\}\cong\{\mathcal{N},\delta_2\}$ である．

同様に

$$\{\mathcal{N},\mathcal{R}_1,\{\rho_1,\gamma_1\}\}\xrightarrow{(ii)}\{\mathcal{N},G,\delta\}\xrightarrow{(i)}\{\mathcal{N},\mathcal{R}_2,\{\rho_2,\gamma_2\}\}$$

を考えると，$\{\mathcal{N}\times_{\rho_1}\mathcal{R}_1,\hat{\rho}_1\}\cong\{\mathcal{N}\times_{\rho_2}\mathcal{R}_2,\hat{\rho}_2\}$ である．これから，Roberts の作用の共役系の同値性を導くには若干の準備が必要となるが，$\rho_1(\mathcal{N})$ が $\rho_2(\mathcal{N})$ に対応し，命題 8.1 で $\mathcal{R}_1$ が $\mathcal{R}_2$ の中に実現されていることを見れば，ほぼ想像がつくだろう．

定理の証明に入る前に次の補題を用意する．

補題 10.2. $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ が G のすべての既約表現とユニタリー同値な元を含んでおり，作用 α が G のユニタリー表現 u により $\alpha(x)=u(x\otimes 1)u^*$ と表わされていれば，u の不動点全体は $\mathcal{M}$ に関して巡回的である．

証明．G の既約表現の同値類全体を $\hat{G}$ とする．$p\in\hat{G}$ の $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ での代表元を $\{\alpha,\mathcal{H}_p\}$ とする．$\mathcal{H}_p$ の正規直交基底を $\{v_1,\cdots,v_d\}$ とすれば，u の $\bar{p}$ の固有空間への射影 $E_{\bar{p}}$ は

$$E_{\bar{p}} = n \int \sum_{j=1}^{d} v_j^* \alpha_t(v_j)\, u(t)\, dt$$

で与えられる．ここで，$\iota \in \hat{G}$ を G の自明な表現とすれば E_ι は u の不動点全体への射影に外ならない．また

$$E_{\bar{p}} = n \sum_{j=1}^{d} v_j^* \int u(t) dt\ v_j = n \sum_{j=1}^{d} v_j^* E_\iota v_j$$

で，しかも，$\sum_{p \in \hat{G}} E_p = 1$ であるから，u の不動点全体は $\mathcal{M}$ に関して巡回的である．証了．

定理 10.1 の証明．(i) $\{\mathcal{M}, \alpha\} = \{\mathcal{N} \times_\delta G, \hat{\delta}\}$ とおく．$\mathcal{R} = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{M})$ は G の表現環である．§§ 6，7 で調べたように

$$\rho_\pi = \delta^{-1} \circ \mu_{\mathfrak{H}_\pi} \circ \delta, \qquad \mathfrak{H}_\pi \in \mathcal{R}$$

$$\eta_{\pi,\pi'}(a) = \delta^{-1}(a), \qquad a \in \mathcal{I}_G(\pi, \pi')$$

とすれば，$\{\rho, \eta\}$ は $\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用である．α は双対作用だから，定理 5.2 により，$(\alpha_t \otimes \iota)(w^*) = w^*(1 \otimes \rho(t))$ をみたす $\mathcal{M} \otimes \mathcal{R}(G)$ のユニタリー作用素 w が存在する．さらに，$\mathcal{M}^\alpha$ は真無限型だから，命題 9.1 により，$\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現 $\{\pi_r, \mathfrak{H}_r\}$ を含んでいる．したがって，接合積 $\mathcal{N} \times_\rho \mathcal{R}$ を作ることができる．ここで，$\mathfrak{K} \otimes L^2(G)$ から $\mathfrak{K} \otimes \mathbb{C}1$ への射影を E_0 とし，$\mathfrak{K}$ と $\mathfrak{K} \otimes \mathbb{C}1$ と同一視すれば，

(10.2) $\qquad E_0 \delta(y) = \delta(y) E_0 = y, \quad y \in \mathcal{N}$

(10.3) $\qquad E_0 a = a E_0 = \eta_{\pi,\pi'}(a), \quad a \in \mathcal{I}_G(\pi, \pi')$.

さて，各 $\xi\in\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ に対して Φ_ξ を

$$\Phi_\xi(\pi)a = E_0 a\xi\ ,\quad a\in\mathfrak{H}_\pi,\quad \pi\in\mathcal{R}$$

で与えると，Φ_ξ は $\sum^{\oplus}_{\pi\in\mathcal{R}}\mathfrak{H}_\pi$ から $\mathfrak{K}$ への有界な線形写像で，しかも，$\Phi_\xi\in F_0(\rho,\mathfrak{K})$．実際，もし $b\in\mathcal{I}_G(\pi',\pi)$ ならば，(10.3) により

$$\Phi_\xi(\pi')ba = E_0 ba\xi = \gamma_{\pi',\pi}(b)E_0 a\xi = \gamma_{\pi',\pi}(b)\Phi_\xi(\pi)a\ .$$

さらに，もし $\xi,\eta\in\mathfrak{K}$，$f,g\in L^2(G)$，$a,b\in\mathfrak{H}_\pi$ ならば，

$$\begin{aligned}(\Phi_{\eta\otimes g}(\pi_r)^*\Phi_{\xi\otimes f}(\pi_r)a\,|\,b) &= (b^*E_0 a(\xi\otimes f)\,|\,\eta\otimes g)\\ &= \int(b^*(1\otimes\lambda(t))a(\xi\otimes f)\,|\,\eta\otimes g)\,dt\\ &= \int b^*\hat{\delta}_t(a)(\xi|\eta)(\lambda(t)f|g)\,dt\ .\end{aligned}$$

a, b は $\mathfrak{H}_\pi$ の元だったから

$$\Phi_{\eta\otimes g}(\pi_r)^*\Phi_{\xi\otimes f}(\pi_r) = (\xi|\eta)\pi(\varphi)\ ,\quad \varphi(t)=(\lambda(t)f|g)$$

となる．$\mathcal{R}(G)$ 上のプランシェレル重み ψ_G を使うと

$$\|\Phi_{\xi\otimes f}\|^2 = \psi_G(\theta(\Phi_{\xi\otimes f}(\pi_r)^*\Phi_{\xi\otimes f}(\pi_r))) = \|\xi\otimes f\|^2.$$

したがって，$\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ から $L^2(\rho,\mathfrak{K})$ の<u>中へ</u>の等距離写像 W が $W\xi=\Phi_\xi$ で与えられる．

次に，(10.2) と (10.3) を使って

(10.4) $$W\delta(y) = \rho(y)W\ ,\qquad y\in\mathcal{N}\ ,$$

(10.5) $$W a = V(a)W\ ,\qquad a\in\mathfrak{H}_\pi\ ,$$

(10.6) $$W(1\otimes\lambda(t)) = U(t)W\ ,\qquad t\in G$$

を示そう．もし $\xi\in\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ かつ $b\in\mathfrak{H}_\pi$ ならば，$\Phi_{\delta(y)\xi}(\pi)b$

$= E_0 b\delta(y)\xi = E_0\rho_{\mathfrak{H}_\pi}(\delta(y))b\xi = \rho_{\mathfrak{H}_\pi}(\delta(y))E_0 b\xi = \delta(\rho_\pi(y))E_0 b\xi$
$= \rho_\pi(y)E_0 b\xi = \rho_\pi(y)\Phi_\xi(\pi)b$ となる．したがって，

$$W\delta(y)\xi = \Phi_{\delta(y)\xi} = \rho(y)\Phi_\xi = \rho(y)W\xi.$$

もし $\xi\in\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ かつ $b\in\mathfrak{H}_{\pi'}$ ならば，$\Phi_\xi v_{\mathcal{R}}(a)b = \Phi_\xi ba$
$= E_0 ba\xi = \Phi_{a\xi}(\pi')b$．したがって，

$$W a\xi = \Phi_{a\xi} = \Phi_\xi v_{\mathcal{R}}(a) = V(a)\Phi_\xi = V(a)W\xi.$$

もし $\xi\in\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ かつ $b\in\mathfrak{H}_\pi$ ならば，$\Phi_{(1\otimes\lambda(t))\xi}(\pi)b =$
$E_0 b(1\otimes\lambda(t))\xi = E_0\hat{\delta}_t^{-1}(b)\xi = \Phi_\xi\hat{\delta}_t^{-1}(b) = (\Phi_\xi\pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1})(\pi)b$．したがって

$$W(1\otimes\lambda(t))\xi = \Phi_{(1\otimes\lambda(t))\xi} = \Phi_\xi\pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1} = U(t)W\xi.$$

上の(10.4)，(10.5)，(10.6)を使って，W が $\mathfrak{K}\otimes L^2(G)$ から $L^2(\rho,\mathfrak{K})$ の上への写像であることを示そう．先ず，$\Phi = U(t)\Phi$ $(=\Phi\pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1})$，$t\in G$ とする．自明でない既約表現 $\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}$ に対しては，$\Phi(\pi)=0$ である．もし $\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}$ が自明な表現なら，$\mathfrak{H}_\pi\subset\delta(\mathcal{N})$ である．これは(10.2)によれば，$\rho_\pi(y)$ が $\mathcal{N}$ のユニタリー作用素 u_π により $u_\pi y u_\pi^*$ と表わされることである．したがって，もし $\{\pi,\mathfrak{H}_\pi\}$，$\{\pi',\mathfrak{H}_{\pi'}\}$ 共に自明なら，$\mathfrak{H}_\pi = \mathbb{C}\delta(u_\pi)$，$\mathfrak{H}_{\pi'} = \mathbb{C}\delta(u_{\pi'})$ なる $\mathcal{N}$ のユニタリー作用素 u_π，$u_{\pi'}$ が存在する．任意な $a\in\mathfrak{J}_G(\pi,\pi')$ は $\mu\delta(u_{\pi'}u_\pi^*)$，$\mu\in\mathbb{C}$ と表わされているから，(10.3)により $\eta_{\pi',\pi}(a) = \mu u_{\pi'}u_\pi^*$ となる．ここで，自明な表現 $\pi\in\mathcal{R}$ に

対して，$\xi_\pi = \Phi(\pi)\delta(u_\pi)$ とすれば，$\Phi = \Phi_{u_\pi^* \xi_\pi \otimes 1}$ となる．

実際に，π, π' を自明な表現とすれば

$$\Phi_{u_\pi^*\xi_\pi\otimes 1}(\pi)\delta(u_\pi) = E_0\delta(u_\pi)(u_\pi^*\xi_\pi\otimes 1) = \xi_\pi = \Phi(\pi)\delta(u_\pi);$$

$$\Phi_{u_\pi^*\xi_\pi\otimes 1}(\pi')\delta(u_{\pi'}) = u_{\pi'}u_\pi^*\xi_\pi = \mu^{-1}\eta_{\pi',\pi}(a)\xi_\pi$$

$$= \mu^{-1}\eta_{\pi',\pi}(a)\Phi(\pi)\delta(u_\pi) = \mu^{-1}\Phi(\pi')a\delta(u_\pi) = \Phi(\pi')\delta(u_{\pi'}).$$

したがって，Φ は $\mathbb{W}E_0\mathfrak{H}$ の元である．これより

(10.7) $\qquad \mathbb{W}E_0\mathfrak{H} = \{\Phi \in L^2(\rho, \mathfrak{K}) : U(t)\Phi = \Phi,\ t \in G\}$

となる事がわかる．$\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現を含んでいるので，命題 8.1 により，$\mathcal{N}_\rho(\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R})$ は任意な既約表現とユニタリー同値な元を含んでいる．したがって，補題 10.2 により，(10.7) の右辺は $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ に関して巡回的である．したがって，(10.2) と (10.3) により，$\mathbb{W}$ の値域は $L^2(\rho, \mathfrak{K})$ 全体となることがわかる．

最後に，命題 9.3 を使えば，$\mathcal{N}\times_\delta G$ は $\delta(\mathcal{N})$ と既約な $\pi \in \mathcal{R}$ に対応する $\mathfrak{H}_\pi$ 全体により生成されるので，(10.4) と (10.5) により，$Ad_{\mathbb{W}}$ は $\mathcal{N}\times_\delta G$ から $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ の上への同型写像を与えている．さらに，(10.6) は，この同型写像が $\hat{\delta}$ を $\hat{\rho}$ へ移していることもわかる．

(ii) $\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現を含むから，接合積 $\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}$ を考えることができる．ここで，$\{\mathcal{M}, \alpha\} \cong \{\mathcal{N}\times_\rho\mathcal{R}, \hat{\rho}\}$ とおく．命題 8.1 により，$\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M})$ は右正則表現と同値な表

現を含む．また $\mathcal{N}$ は真無限型だから，命題 9.1 により，$\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ にユニタリ作用素 w が存在して，$(\alpha_t\otimes\iota)(w^*) = w^*(1\otimes\rho(t))$．したがって，命題 9.2 (ii) により，$\{\bar{\mathcal{M}},\bar{\alpha}\} \cong \{\bar{\mathcal{M}},\tilde{\alpha}\}$，ただし，$\bar{\mathcal{M}}=\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(G))$ かつ $\bar{\alpha}=(\iota\otimes\sigma)\circ(\alpha\otimes\iota)$．$\mathcal{M}^{\alpha}$ は真無限型であるから，$\{\mathcal{M},\alpha\}\cong\{\bar{\mathcal{M}},\bar{\alpha}\}$．したがって，$\alpha$ は双対作用である．証了．

主要引用文献

[1] Araki, H., Kastler, D., Takesaki, M. and Haag, R.
Extention of KMS states and chemical potential.
Commun. math. Phys., 53 (1977), 97 – 134.

[2] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. E.
Fields, observables and gauge transformations.
I. Commun. math. Phys., 13 (1969), 1 – 23;
II. ibid., 15 (1969), 173 – 200.
Local observables and particle statistics.
I. ibid., 23 (1971), 199 – 230.
II. ibid., 35 (1974), 49 – 85.

[3] Doplicher, S. and Roberts, J. E.
Fields, statistics and non-abelian gauge groups.

Commun. math. Phys., 28(1972), 331–348.

[4] Haga, Y.

Cross products of von Neumann algebras by compact groups.

Tôhoku Math. J., 28(1976), 511–522.

[5] Landstad, M. B.

Duality theory for covariant systems.

Trans. Amer. Math. Soc.

Duality for dual covariance algebras.

Commun. math. Phys., 52(1977), 191–202.

[6] Nakagami, Y.

Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group.

Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12(1977), 727–775.

Essential spectrum $\Gamma(\beta)$ of a dual action on a von Neumann algebra.

Pacific J. Math. 46 (1977),

[7] Roberts, J. E.

Cross products of von Neumann algebras by group duals.

Inst. Nazionale di Alta Mat. Symposia Math. 20(1976)

[8] Strătilă, D., Voiculescu, D. and Zsidó, L.
On crossed products.
I. Rev. Roumaine Math., 21 (1976), 1411 − 1449;
II. ibid., 22 (1977), 83 − 117.

[9] Takesaki, M.
Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III.
Acta Math., 131 (1973), 249 − 310.

他の関連文献は［6, 8］に詳しく挙げられている．才1部は主として［5, 6, 8］を，才2部は［7］を参考にした．