数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 151-161

W^*- Dirichlet algebra と Flow

都留文科大　田中純一
早大 教育　和田淳蔵

§1. 序.

Forelli [1] によって導入された flow による解析性は、Forelli 自身および Muhly 等によって かなり詳しく調べられてきた. 他方 群上の不変部分空間の理論は flow による解析性を 主要な道具として用いながら エルゴード理論の枠組で再構成されつつある ([8],[5]). ここでは 69 年に Forelli によって提出された 解析測度の全変動に関する問題を取りあげ, 関数環的側面からの考察を与えてみたい. 加えていくつかの 最近の結果を紹介する.

X を compact Hausdorff 空間, (X, R) を X 上の flow, 即ち $t\in R$ に対し T_t は X から X への位相同型で $T_s\circ T_t = T_{s+t}$ および $(t, x)\mapsto T_t x$ が $R\times X$ から X への連続写像とする. $C(X)$ を X 上の連続関数の全体, $M(X)$ を X 上の有界 Baire 測度の全体とおく. このとき R 上の群代数 $L^1(R)$

に対し $f\in L^1(R)$ と $\varphi\in C(X)$, $\mu\in M(X)$ との convolution を次のように定義する。

$$\varphi * f(x) = \int_R \varphi(T_t x)\, f(t)\,dt \quad ,$$

$$\mu * f(E) = \int_R \mu(T_{-t}E)\, f(t)\,dt \quad .$$

次に $J(\varphi)$ を $\varphi * f = 0$ となる $f\in L^1(R)$ の全体，同様に $J(\mu)$ を $\mu * f = 0$ となる $f\in L^1(R)$ の全体，とおくと $J(\phi)$, $J(\mu)$ はおのおの $L^1(R)$ の閉 ideal となる．そこで φ の spector, $Sp(\phi)$, を $J(\phi)$ の hull および μ の spector, $sp(\mu)$, を $J(\mu)$ の hull と定義する．即ち；

$$sp(\phi) = \bigcap_{f\in J(\phi)} \hat{f}^{-1}(\{0\}) \quad , \quad sp(\mu) = \bigcap_{f\in J(\mu)} \hat{f}^{-1}(\{0\}) \quad .$$

<u>定義</u>　$C(X)\ni\varphi$ が解析的とは $sp(\phi)\subset[0,\infty)$ となること，同様に $M(X)\ni\mu$ が解析的とは $sp(\mu)\subset[0,\infty)$ となることとする．

解析的連続関数の全体 $\mathfrak{A}$ は $C(X)$ における定数を含む閉 subalgebra となる．$\mathfrak{A}_0$ を $\varphi\in\mathfrak{A}$ で $sp(\varphi)\subset(0,\infty)$ となるものの全体とすると $\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{A}$ の ideal となる．$M(X)$ の元 μ が解析測度となる必要十分条件は $\mu\in\mathfrak{A}_0^{\perp}$, 即ち $\mathfrak{A}_0\ni\varphi$ に対し $\int f\,d\mu = 0$ となることが知られている（[1；Proposition 2]）．$R\ni t$ に対し $C[t,\infty) = \{\varphi\in C(X);\ sp(\phi)\subset(t,\infty)\}$ とおく．$M(X)\ni\sigma\geq 0$ に対し M_t を $C(t,\infty)$ の $L^2(\sigma)$-closure とする．このとき $\mathfrak{D}(\sigma) = \bigcap_{-\infty<t<\infty} M_t$ を $L^2(\sigma)$ に

おける distant future と呼ぶ．（[1],[6],[12] 参照）

§2. 問題の設定.

Forelli は [1] において解析測度の全変動は distant future $=(0)$ となることを示めし，F. and M. Riesz の定理を flow による解析測度へ拡張した．そして [2] において，この定理の逆が成立するか否か？という次の問題を提出した．

問題（[2]）．$M(X)\ni\sigma\geq 0$ とし $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とする．このとき σ は解析測度の全変動となるか？

この問題に関し次のような結果が知られている．

結果1．(Forelli [2]) $M(X)\ni\sigma\geq 0$ とし $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とする．このとき $L^{\infty}(\sigma)\ni\varphi$ で $0<|\varphi|\leq 1$ a.e.-σ に対して $\varphi d\sigma$ が解析的とできる．

結果2．(Helson [4]) X を compact 可換群でその双対群が archimedean order を持つとする．このとき自然に X に flow が定義される．いま $M(X)\ni\sigma\geq 0$ が Haar 測度に絶対連続で $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とすると σ は解析測度の全変動となる．

結果3．(田中 [10]) $M(X)\ni\sigma\geq 0$ で σ は ergodic な $\mathfrak{A}$ の表現測度に絶対連続とする．このとき $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とすると σ は解析測度の全変動となる．

結果2は群上の不変部分空間の理論において重要な定理である，これより「全ての cocycle は analytic cocycle に

cohomologeous」という結果を得，不変部分空間の分類は analytic cocycle の構造を調べる問題へ転換される．また結果2，3は Segö の定理に強く依存していることを注意する（[3]参照）．

§3 Forelli の定理への考察．

測度を分類する煩わしさを避けるため，ここでは $\mathfrak{A}$ を Dirichlet 環（または logmodular 環）と仮定する（§5 参照）．

<u>定理1</u>．$M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする．$L^1(\sigma) \ni w > 0$ および $L^\infty(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ とする．このとき $\mathfrak{A}\varphi$ の $L^2(wd\sigma)$ - closure，$[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(wd\sigma)}$，は $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ となる要素 g をふくむ．

<u>系</u>　$M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする．$\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とするとある $g \in L^2(\sigma)$ に対し $g\,d\sigma$ が解析測度，および $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ とできる．

定理1を証明するために次の補題が必要となる．証明は簡単なので省略する．

<u>補題1</u>．$C_R(X) \ni u > 0$ とする．このとき $\mathfrak{A} \ni f_n$ で $\| |f_n| - u \|_\infty \to 0 \ (n \to \infty)$ とできる．

<u>補題2</u>．$M(X) \ni \mu \geq 0$ とする．X における互いに交わらない可測集合列 $\{K_n\}$ が全ての n に対し；

$$\mu(K_n) > \tfrac{1}{2}\mu(X \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1}))$$

とするならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(K_n)=\mu(X) \quad および \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu(K_n)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

となる。

<u>定理1の証明</u>. $d\mu=\varpi d\sigma$ とおく。仮定より μ と σ は互いに絶対連続となる。また

$$H_n=\{x\in X\ ;\ 1/n<|\varphi(x)|\leq 1\}$$

とすると $\mu(\bigcup_{n=2}^{\infty}H_n)=\mu(X)$ となる。帰納法を用いて、次の様な compact set の列 $\{K_n\}$, および $\mathfrak{A}$ における関数列 $\{f_n\}$ を作ることができる: 全ての N に対して、

1) $\left|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi\right|>1/2$ on $K_1\cup\cdots\cup K_N$,

2) $\mu(K_N)>\frac{1}{2}\mu(X\setminus(K_1\cup\cdots\cup K_{N-1}))$,

3) $\|f_N\varphi\|_2<\mu(K_N)^{\frac{1}{2}}+1/2^N$

実際、適当な n_1 に対して $\mu(H_{n_1})>1/2$ とできる。Lusin の定理より $H_{n_1}\supset K_1$ となる compact set を取って $\mu(K_1)>1/2$ かつ φ は K_1 上で連続とできる。補題1から $1/n_1<|\varphi|\leq 1$ となることより $f_1\in\mathfrak{A}$ で $|f_1\varphi|>1/2$ on K_1, $\|f_1\varphi\|_2<\mu(K_1)^{\frac{1}{2}}+1/2$ とできる。これによって K_1 および f_1 を定める。次に互いに交わらない compact set の列 $\{K_1\cdots\cdots K_N\}$ と $\mathfrak{A}$ の関数列 $\{f_1\cdots\cdots f_N\}$ が 1)～3) をみたし、φ が $K_1\cup\cdots\cup K_N$ 上で連続に取れたと仮定する。

$$E_{N+1}=\{x\in X\mid \left|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi\right|>1/2\}\setminus(\bigcup_{n=1}^{N}K_n)$$

とおく。また十分大きい n_{N+1} に対して;

$$\mu(H_{m_{N+1}} \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_N)) > \tfrac{1}{2}\,\mu(X \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_N))$$

とできる．$H_{m_{N+1}} \cap E_{N+1} \supset F_{N+1}$ となる適当な compact set F_{N+1} および $H_{m_{N+1}} \setminus (E_{N+1} \cup K_1 \cup \cdots \cup K_N) \supset F'_{N+1}$ となる適当な compact set F'_{N+1} を取って，φ は $F_{N+1} \cup F'_{N+1}$ の上で連続，$\mu(F_{N+1} \cup F'_{N+1}) > \tfrac{1}{2}\,\mu(X \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_N))$ とできる．これより

$$\min\{\, |\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi| \;;\; x \in F_{N+1} \cup K_1 \cup \cdots \cup K_N \,\} = \alpha_N \quad (> \tfrac{1}{2}),$$

$$\max\{\, |\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi| \;;\; x \in F'_{N+1} \,\} \quad (\leq \tfrac{1}{2}).$$

となる．補題1を用いて，$\mathfrak{A} \ni f_{N+1}$ を次の様に定める．

$$|f_{N+1}\varphi| > 1 \quad \text{on } F'_{N+1},$$

$$|f_{N+1}\varphi| < (\alpha_N - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{3} \quad \text{on } F_{N+1} \cup K_1 \cup \cdots \cup K_N,$$

$$\|f_{N+1}\varphi\|_2 < \mu(F'_{N+1})^{1/2} + 2^{-(N+1)}.$$

ここで $K_{N+1} = F_{N+1} \cup F'_{N+1}$ とおくとよい．(2)，(3) をみたすことは明らか，また

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{N+1} f_n \varphi| &\geq |\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi| - |f_{N+1}\varphi| \\
&> \alpha_N - (\alpha_N - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= (2\alpha_N + \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&> \tfrac{1}{2} \quad \text{on } K_1 \cup \cdots \cup K_N \cup F_{N+1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{N+1} f_n \varphi| &\geq |f_{N+1}\varphi| - |\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi| \\
&> 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \quad \text{on } F'_N
\end{aligned}
$$

これより (1) をみたすことがわかる．いま $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi(x)$

とおくと (3) より $g(x)$ は収束して $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\mu)}$ に属す．また (1) と補題2 より $|g(x)| \geq 1/2$ a.e. となることが簡単に確かめられる．（証明終り）．

<u>系の証明</u>．Forelli の定理（結果1）より $L^\infty(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ で $\varphi d\sigma$ が解析測度とできる．一方 $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\sigma)}$ の任意の g に対し $g d\sigma$ は解析測度となる．なぜなら適当な $\mathfrak{A}$ の関数列 $\{f_n\}$ に対し $f_n\varphi \longrightarrow g$ in $L^2(\sigma)$ より任意の $h \in \mathfrak{A}_0$ に対して $\int h f_n \varphi d\sigma = 0$ から

$$\left|\int h g d\sigma\right| \leq \|h\|_\infty \int |f_n\varphi - g| d\sigma$$
$$\leq \|h\|_\infty \cdot \|f_n\varphi - g\|_2 \rightarrow 0$$

これより [1; Proposition 2] より $g d\sigma$ は解析測度となる．よって 定理1 より明らかとなる（証明終り）．

（注意） 補題1 より $\mathfrak{A}$ の元で絶対値が $|g|^{-1}$ に L^2-norm でいくらでも近いものが取れる．これと quasi-invariant 測度の性質を考えあわせると Forelli の問題はほぼ肯定的であろうと推察される．

§4．定理1の応用．

ここでは 定理1と系を用いて 正測度が解析測度の全変動となる十分条件を考える．いま系において σ が $\mathfrak{A}$ のある表現測度に絶対連続とすれば Szegö の定理より簡単に σ は解析測度の全変動となることがわかる．

命題2. $M(X) \ni \sigma > 0$ とする. 任意の $f \in \mathfrak{A}$ に対し, 適当な invariant 関数 $\varphi_f \in [\mathfrak{A}]_{L^2(\sigma)} \cap \overline{[\mathfrak{A}]}_{L^2(\sigma)}$ が存在し, $f + \varphi_f \perp \mathfrak{A}$ in $L^2(\sigma)$ とする. このとき $L^2(\sigma) \ni \varpi > 0$ に対して $\mathfrak{D}(\varpi d\sigma) = (0)$ とすれば $\varpi d\sigma$ は解析測度の全変動となる.

証明 $L^\infty(\varpi d\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ となり $\varphi \varpi d\sigma$ が解析的とできる. 定理1より $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\sigma)} \ni g$ で 適当な $\alpha > 0$ に対し $|g| > \alpha$ a.e とできる. $-\log|g| \leq -\log\alpha$ より $\mathfrak{A}$ が Dirichlet 環より $\mathfrak{A} \ni f_n$ に対して;

$$\mathrm{Re} f_n \leq -\log\alpha \quad , \quad \| \mathrm{Re} f_n - (-\log|g|) \|_2 \to 0$$

とできる. 一方 $f \in \mathfrak{A}$ に対して

$$2\|\mathrm{Re} f\|_2^2 = \| f + \bar{f} \|_2^2$$
$$= \| (f + \varphi_f) + (\bar{f} - \varphi_f) \|_2^2$$
$$\geq \| f + \varphi_f \|_2^2 \ , \ \| \bar{f} - \varphi_f \|_2^2 .$$

これより $\{\mathrm{Re} f_n\}$ は $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列 となることから $\{f_n + \varphi_{f_n}\}$, $\{f_n - \overline{\varphi_{f_n}}\}$ も $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列となり, その和 $\{f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n}\}$ もまた Cauchy 列となる. ここで部分列を取り各点収束させる. $\exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n}) \cdot g \cdot \varpi d\sigma$ は解析測度となることが簡単に確められ,

$$|\exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n}) \cdot g \cdot \varpi| \leq 1/\alpha \cdot g \cdot \varpi$$

および 適当な $F \in L^\infty(\sigma)$ で $|F| = |g|^{-1}$ となる関数 F に

$$\lim \exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\psi_{f_n}) = F \quad a.e-\sigma$$

これより Lebesgue の収束定理より 全ての $h \in \mathfrak{A}_0$ に対し $\int h \cdot F \cdot g \cdot \varpi \, d\sigma = 0$ となり [1; Proposition 2] より, $\varpi d\sigma$ を全変動とする 解析測度 $F \cdot g \cdot \varpi d\sigma$ を得る (証明終り).

(注意) この命題の仮定をみたす例は多い. 各 orbit に一点で交わる可測関数が取れるとき 多くの quasi-invariant 測度は それと同値な測度で 仮定をみたす正測度をもつ.

§5 一般の場合.

ここでは $\mathfrak{A}$ を Dirichlet 環と仮定してきた. しかしこの条件はいくつかの考察の下に不要となる. 一般に次のことが成立する ([11] 参照).

(i) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が (有限) invariant 測度に 絶対連続とすれば σ は解析測度の全変動となる.

(ii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が全ての (有限) invariant 測度に 特異とすれば $L^2(\sigma) \ni g$ で $g^{-1} \in L^q(\sigma)$ となり $g\,d\sigma$ が解析測度となる.

(iii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ は上の2つの タイプ の測度に一意に分解される.

文 献

[1] F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math., 118 (1967), 33—59.

[2] F. Forelli, What makes a positive measure the total variation measure of an analytic measure? J. London Math. Soc. (2), 2 (1970), 713—718.

[3] 荷見守助, 不変部分空間の理論, 岩波「数学」28巻 1号 (1976), 47—57.

[4] H. Helson, Compact groups with orderd duals IV. Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 67—69.

[5] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Academic Press, New York (1975), 1—62.

[6] 泉池敬司, Flow による generalized analytic functions よりなる環の分類, 数理解析研究所講究録 (1976).

[7] P. Muhly, Function algebras and flows, Acta Sci. Math. (Szeged), 35 (1973) 111—121.

[8] P. Muhly, The distant future, Indiana Math. J. 24 (1974), 149—159.

[9] J. Tanaka, Some remarks on simply invariant subspaces on compact abelian groups (to appear in J. Math. Soc. Japan)

[10] J. Tanaka, A note on Helson's existence theorem, (to appear

in Proc. Amer. Math. Soc.)

[11] J. Tanaka, A certain class of total variation measures of analytic measures (in preparation).

[12] 富山淳, 関数環とFlowについて, 岩波「数学」28巻 1号 (1976), 35−46.

[13] 和田淳蔵, ノルム環, 共立出版, (1969).

[14] 和田淳蔵, Function algebra と flow, 数理解析研究所講究録, 232 (1975), 90−96.

〈付記〉 この講究録を記すにあたり, 伊藤雄二先生 (立教大. 理) に多くの御助言を頂いたことを付記致します.