数理解析研究所講究録
第 321 巻 1978 年 88-100

微分型式の環と双曲性

東京大学 理　　飯高 茂

§1　以下 $k=\mathbb{C}$ とおき，代数多様体，正則写像等は k スキームの圏でのそれと理解することにしよう．

V を n 次元代数多様体とすると，その上の対数的 i 型式は有限次元のベクトル空間 $T_i(V)$ を形成する．$T_i(V)$ の次元は，V の対数的 i 不正則数とよばれ $\bar{q}_i(V)$ で記される．$\bar{q}_1$ を $\bar{q}$ とかき，対数的不正則数とよぶ．さて，$\wedge^i T_1(V)$ から $T_i(V)$ に自然な写像ができるから，その像を $A_i(V)$ で書く．$A_1(V)=T_1(V)$ であり $A_0(V)=k$ とおけば $\oplus A_i(V)$ は次数環となる．かくしてえた環を $A(V)$ で表そう．これが標題に書いた微分型式の環であり，V の日輪代数 (solar algebra) とよぶことにしたい。

さて，一般に次数環 $A=\oplus A_j$ は次の条件を満たすとき，抽象日輪代数とよばれる．

1) $A_0=k$，A_1 は有限次元

ii) A_1 は $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_j$ と生成する,

iii) A は次数環として交代的. 即ち, $u \in A_i$, $v \in A_j$ とるとき, $uv = (-1)^{ij} vu$.

典型的な例は外積代数 $\wedge^{\cdot}(E)$ であって, これが最も普遍的である. 即ち, $\wedge^{\cdot}(A_1) \longrightarrow A$ に自然な全射ができるので, 同次イデアル I ($I_0 = I_1 = 0$) によって,

$$\wedge^{\cdot}(A_1)/I \xrightarrow{\sim} A$$

なる同型ができる. $A_n = 0$ なら $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$ であり, $\delta(A) = \max\{n\,;\, A_n \neq 0\}$ とおくと, A の不変量をえる. A を一つの太陽系とみたてるとき, $\delta(A)$ はその惑星の数にあたる. さて, 日輪代数 A, B の与えられたとき, 日輪代数としての最も不変的な積は次式で与えられる. 即ち,

$$\wedge^{\cdot}(B_1)/J \xrightarrow{\sim} B$$

と B も表わすと, 日輪代数 $\wedge^{\cdot}(A_1 \oplus B_1)/(I, J)$ がそれである. これを $A \odot B$ で表わし, A と B の日輪積 (solar product) とよぶ. 次の性質は容易にわかる : $n = \delta(A)$, $m = \delta(B)$ とおくとき,

$$A_n \otimes B_m \xrightarrow{\sim} A_n \cdot B_m \subset (A \odot B)_{n+m}.$$

これにより,

$$\delta(A \odot B) = \delta(A) + \delta(B)$$

をえる.

A_1 の元 $u_1, \cdots, u_{n+1}$ ($n = \delta(A)$ として) の与えられたとき、次の略記法を使う:

$$\hat{u}_1 = u_2 \cdots u_{n+1}, \quad \hat{u}_2 = u_1 u_3 \cdots u_{n+1}, \quad \cdots, \quad \hat{u}_{n+1} = u_1 \cdots u_n .$$

これらは、A_n の元である。さて、

A が非退化を、$\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_{n+1}$ が1次独立となるような A_1 の元 $u_1, \cdots, u_{n+1}$ の存在することと、と定義しよう。

このとき、$u_1, \cdots, u_{n+1}$ に1次変換して $v_1, \cdots, v_{n+1}$ をえても $\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_{n+1}$ は、同じく、1次独立である。従って、$u_1, \cdots, u_{n+1}$ らの張る $n+1$ 次元のベクトル空間 $E \subset A_1$ を考え、

$\hat{E} = \{ \sum u_{j_1} \cdots u_{j_n} \ ; \ u_{j_i} \in E \}$ とおけば、$\dim \hat{E} = n+1$ といいかえられる。

A, B が非退化なら $A \odot B$ も非退化である。

実際、定義に合致した $u_1, \cdots, u_{n+1} \in A_1$, $v_1, \cdots, v_{m+1} \in B_1$ をとるとき、$u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m, u_{n+1} + v_{m+1}$ とおくと

$$\hat{u}_1 = \pm \hat{u}_1 \cdot \hat{v}_{m+1}, \quad \cdots, \quad \hat{u}_n = \pm \hat{u}_n \hat{v}_{m+1}, \quad \hat{v}_1 = \pm \hat{u}_{n+1} \cdot \hat{v}_1,$$
$$\cdots, \quad (u_{n+1} + v_{m+1})^{\wedge} = \hat{u}_{n+1} \cdot \hat{v}_{n+1}$$

をえる。テンソル積との同型を用いれば、右辺の1次独立性は明らか。

しかし、一般に逆は成立しない。

命題1. A' を $\delta(A') > 0$ の外積代数とする。このとき、$A \odot B$ は必ず非退化でない。

証明 $n=\delta(A)$, $m=\delta(B)$ とおき, $\varphi_1\in A_1\oplus B_1,\cdots,\varphi_{n+m+1}\in A_1\oplus B_1$ をとり, $\varphi_j=u_j+v_j$ と $u_j\in A_1$, $v_j\in B_1$ により表わし, $\sum ku_j$ の底を $u_1,\cdots,u_r$ としよう. さて, A は外積代数だから, $r\leqq n=\dim A_1=\delta(A)$ である. $j>r$ について, $u_j=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}u_i$ と書こう. $\psi_j=\varphi_j-\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}\varphi_i$ とおくと, $\dim\sum_{j=1} k\psi_j=\dim\sum_{j=1}k\varphi_j$. しかし, $\psi_{r+1}\in B_1,\cdots,\psi_{n+m+1}\in B_1$ であって, $n+m+1-(r+1)+1=n+m-r+1\geqq m+1$. ゆえに,

$$\widehat{\psi_1}=\psi_2\cdots\psi_{n+m+1}=\cdots\psi_{r+1}\cdots\psi_{n+m+1}=0.$$

これは, $\widehat{\varphi_1},\cdots,\widehat{\varphi_{n+m+1}}$ が1次独立にならぬことを意味する.

さて, 代数多様体 V があって $A(V)$ としてえられる日輪代数を, 幾何的ということにしよう.

問題. 日輪代数はいつ幾何的か?

例. $V=\mathbb{C}^{*n}-V(f)$ (f は既約) としよう. すると,

$A_1(V)=\sum k\,dx_j/x_j+k\,df/f$.

$df/f=\sum(x_j\partial_j f)e_j/f$, $e_j=dx_j/x_j$.

と表わされるから, $e_{n+1}=df/f$ として,

$\widehat{e_{n+1}}=e_1\cdots e_n$ ($=\rho$ と記す),

$\widehat{e_j}=x_j\partial_j f/f\,\rho$.

よって，

$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_{n+1}$ が1次従属 $\Leftrightarrow$ $\sum a_j x_j \partial_j f = f$

$\Leftrightarrow$ f は準同次式．

従って，

$A(V)$ が非退化 $\Leftrightarrow$ f は準同次式でない，

が成立する．

上の $A(V)$ について $\Lambda^{\cdot}(A_1)/I \xrightarrow{\sim} A(V)$ となるイデアルは，$j < n+1$ について $I_j = 0$．そして $I_{n+1} = k$．

例2．V を $\mathbb{P}^n$ から超平面 $L_0, \cdots, L_q$ をとり去った残りとしよう．すると $A_j(V) = T_j(V)$ が成立つ（青本，Brieskorn）

§2. V, Wを代数多様体とするとき，強有理写像 $\phi: V \longrightarrow W$ に対して $\phi^*: A(W) \longrightarrow A(V)$ が定まる．ϕ^*を $A(\phi)$ とかくと，$(A(V), A(\phi))$ は関手となる．さて，

ϕが非常に一般でも $A(\phi)$ は同型になりうる．

命題2 i) ϕ が支配的なら ϕ^* は単射．

ii) さらに $\bar{q}(V) = \bar{q}(W)$ なら ϕ^* は同型．

証明．i) は $T_i(W) \to T_i(V)$ がすでに同型なので自明．

さて，ii) をみよう．$\bar{q}(V) = \bar{q}(W)$ により $A_1(W) \xrightarrow{\sim} A_1(V)$ である．$A_i(V)$ は $A_1(V)$ の元より生成されるから，自動的に $A_i(W)$ の像になる．

とくに $A(V)$ は固有（弱）双有理不変量である．さて，各 j につき $\bar{q}_j(V) = \dim A_j(V)$ とおこう．一の意味は，$q_j(V) = \bar{q}_j(\bar{V})$（$\bar{V}$ は V の完備化）とおきたいから，やはり対数的の形容詞の略である．

さて，V には準Albanese 写像 $\alpha_V: V \longrightarrow \mathcal{A}_V$ が付属したのだった．ここに $\mathcal{A}_V$ は V の準Albanese多様体をさす．V が非特異なら，α_V は正則．一般には α_V は強有理写像である．さて $\alpha_V(V)$ の $\mathcal{A}_V$ 内での閉包を B_V で示そう．すると，$\bar{q}(V) = \bar{q}(B_V) = \bar{q}(\mathcal{A}_V)$ であり，$\alpha_V: V \longrightarrow B_V$ は支配的な強有理写像なのである．命題2が直ちに使えて，

$$A(B_V) \xrightarrow{\sim} A(V)$$

をえる。即ち，$A(V)$ を調べるには，準Abel多様体の閉部分多様体 V についてみればよいことがわかった。次の定理を想定しよう。

定理 1（上野 [ ]）．V を準Abel多様体 $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし，$n = \dim V$ とおく．次の条件は同値．

a) V は準Abel多様体，

b)$_j$ $\overline{q}_j(V) = \binom{n}{j} \quad (1 \leq j \leq n)$,

c) $\overline{P}_m(V) = 1$,

d) $\overline{\kappa}(V) = 0$,

b)$_j^*$ $\dim A_j^\circ(V) = \binom{n}{j}$,

b)$_j^{**}$ $\overline{a}_j(V) = \binom{n}{j}$.

ここに $\overline{a}_j(V)$ は前に定義した通りであるが，$A_j^\circ(V)$ は次のように定義する．

$$A^\circ(V)_1 = \mathrm{Image}\,(T_1(\mathcal{A}) \longrightarrow T_1(V)) \subset A(V)_1 .$$

$A^\circ(V)_1$ の生成する $A(V)$ の部分日輪代数を $A^\circ(V)$ とおく．これは無論 V の $\mathcal{A}$ への埋入にも依存する．

そして，V が一般に，単なる閉部分多様体ならば，各 b)，c) d) で $\geq$ が成立するのである．

証明はくり返さないが，b)$_j$ $\Rightarrow$ b)$_j^*$（一般に $\dim A_j^\circ(V) \leq \overline{q}_j(V)$ ）だから b)$_j^*$ $\Rightarrow$ a) をいえば，よく原証明は

まさに $\theta_j)^* \Rightarrow a)$ をいっていることに注意すればよい.

とくに, $V \subset \mathcal{A}$ かつ $n = \dim V$ なら, $\overline{a_n}(V) \geqq 1$ であって, $\delta(V) = n$ がわかる.

ゆえに次の命題をえる.

命題 3. $\delta(A(V)) = \dim B_V$.

従って, $\delta(A(V))$ を V の Albanese 次元とよぶこともできよう.

命題 4 $A(V_1 \times V_2) \simeq A(V_1) \odot A(V_2)$.

従って,

$$A(V_1 \times V_2)_j = \sum_i A(V_1)_{j-i} \otimes A(V_2)_i,$$

$$\overline{a}(V_1 \times V_2)_j = \sum_{i=0}^{j} \overline{a}(V_1)_{j-i} \cdot \overline{a}(V_2)_i.$$

定理 2. V を $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし, $\overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}(V)$ とおく. すると, $\mathcal{A}$ のエタール被覆 $\pi: \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ があって $\pi^{-1}(V) = V'$ とおくと, $V' = \mathcal{A}_1 \times W \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ と直積に分解する. $\mathcal{A}_i$ はやはり準 Abel 多様体で, $W \subset \mathcal{A}_2$ は双曲型, かつ, $\dim \mathcal{A}_1 = n - \overline{\varkappa}$, $\dim W = \overline{\varkappa}$.

これを用いると,

$$A(V) \simeq A(V', \mathcal{A}') = \{T_1(W) \subset T_1(V') \text{ の生成する}\}.$$

さらに，$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ によれば，

$$A(V', \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = A(\mathcal{A}_1) \odot A(W, \mathcal{A}_2)$$

になる．

従って，$\dim \mathcal{A}_1 = n - \bar{\pi}(V) > 0$ ならば，$A(V)$ は非退化にならない．よって，

定理3 $V \subset \mathcal{A}$ があり，

$A(V)$ が非退化ならば，V は双曲型，即ち $\bar{\pi}(V) = n$

が示された．

双曲型の W が準 Abel 多様体 $\mathcal{A}$ の閉部分で，かつ W が $\mathcal{A}$ を生成するとき $A(W, \mathcal{A})$ を双曲型ということにすれば，一般の $A(V)$ は，外積代数と，双曲型の A の日輪積になるわけである．

もっとも，$A(W, \mathcal{A})$ などは，いささかしまりが悪いから次の定理2の変形を用いて，書き易くしておこう．

定理2*．条件は前定理と同じとしておく．射影 $\varpi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}_2'$（準 Abel），$\varpi^{-1}(a) = \mathcal{A}_1$ があり，$\varpi|V : V \to W'$ と分解し，$V \subset \mathcal{A}$ が α_V なら $W' \subset \mathcal{A}_2'$ も $\alpha_{W'}$ となる．そして $\varpi^{-1}(a) = \mathcal{A}_1$．$W'$ は双曲型で，$\varpi|V : V \to W'$ が，V の対数的標準ファイバー多様体．

これにより，$A(W, \mathcal{A}') = A(W')$ とする．かくて次の定理に到る

定理4. $A(V) = \Lambda(E) \odot A(W)$.

Eはベクトル空間. $\Lambda(E)$ はEの定める外積代数. Wは $\mathfrak{A}$ 内の双曲型多様体.

かくして, 幾何的日輪代数の条件が一つ求まった. 双曲型 $A(W)$ の代数的特徴づけが次の問題になる. 非退化であればよいわけだが, これがどの位必要かは勿論わからない.

§3 V を $\mathcal{A}$ の n 次元閉部分代数多様体とするとき、$A_n(V)$ の代数幾何的意味を考察しよう。

$X = \mathcal{A}$ とおき $\bar{X}$ を $\mathcal{A}$ の標準完備化とする。$\bar{V}$ を V の $\bar{X}$ 内での閉包とする。さて、$\bar{X}$ に2次変換（モノイダル変換を、こうよぶ）をとり返し、次の図式をえる

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{X} \\
& \bar{V} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \\
V^* \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X^* \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{X}^* \\
& \bar{V}^* \arrow[ur, phantom, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

$\mu : \bar{X}^* \longrightarrow \bar{X}$ は双有理正則、V^*, X^* は V, X の強変換、かつ、$\bar{V}^*$ は V^* の $\bar{X}^*$ 内での閉包。さて、μ をうまくえらぶと、$\bar{V}^*$ も非特異、$D^* = \bar{V}^* - V^*$ は単純正規交叉型因子にできる。

$$A(V)_n = A(V^*)_n \subset H^0(K^* + D^*),$$

(ここに $K^* = K(\bar{V}^*)$ は標準因子.) の定める $|K^* + D^*|$ の部分1次系があるなら それを $\mathbb{L}(V^*)$ で示す.

$\mathbb{L}(V^*)$ は, V^* の日輪代数に付属した1次系, 略して, V^* の日輪1次系という. 英語でかくと

solar (linear) system of V^*

である. 即ち, 太陽系みたいにきこえるものができた.

$\mathbb{L}(V^*)$ の定める有理写像 $\Phi : \bar{V}^* \longrightarrow \mathbb{P}^{\bar{a}_n - 1}$ を日輪写像 (solar map) とよぶ. $W = \Phi(\bar{V}^*)$ とおくと, この一般ファイバーの連結成分は著しい特長をもつのである.

さて,

$$
\begin{tikzcd}
\bar{V} & \bar{V}^* \arrow[l, "\mu"'] \arrow[ddr, "\Phi"] & \\
\cup & \cup & \\
V & V^* \arrow[l, "\mu"'] & \\
& & W \subset \mathbb{P}^{\bar{a}_n - 1}
\arrow[from=3-1, to=4-3, bend right]
\end{tikzcd}
$$

次のようにして, 支配的な有理写像 $\Phi\mu^{-1} : V \longrightarrow W$ をえる. $\psi = \Phi\cdot\mu^{-1}$ とかき $\psi : V \longrightarrow W$ を V の日輪写像という.

$w \in W$ を W の一般の点とする. $\Phi^{-1}(w)$ は一般に非連結であり, その連結成分を $\bar{\Gamma}_w^*$ とかく. $\Gamma_w^* = \bar{\Gamma}_w^* \cap V^*$ とおくと, これは V^* の閉部分多様体であり $\mu|V^*$ は固有正則なので, $\Gamma_w = \mu(\bar{V}_w^* \cap V^*)$ も V の閉部分多様体である.

さて，Γ_ω は準 Abel 多様体か？

このことは，結局証明できなかった．正しいとすると，すべてが旨くいきすぎるのではあるが，十分考えている余裕がないから何ともいえない．

$A_n(V)$ の考察から，次のことも考えてみた．

1-形式の空間 $T_1(V)$ の底 $\omega_1,\dots,\omega_q$ をとり，$n=\dim V$ とするとき，$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n\neq 0$ にとれたとしよう．

$\mathcal{J}=\{I\subset\{1,\dots,q\};\ \# I=n\}$ とおき，$I\in\mathcal{J}$ に対して，$\omega_I=\bigwedge_{i\in I}\omega_i$ とおくと，$\omega_I=\rho_I\,\omega_{[1,\dots,n]}$ として，有理関数 ρ_I が定まる．

$$
\begin{array}{ccc}
V & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\rho} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
p & \longmapsto & (\cdots:\rho_I:\cdots)
\end{array}
$$

とおくと，一つの有理写像をえる．これは，実質上前の Ξ と同じになる．このような有理写像の詳しい研究は是非とも望まれる．

そして，次の事も，一般に検証できなかった．

問題　$V\subset\mathcal{A}$ が双曲型のとき $A(V)$ は非退化か？

これは，落合・野口の問である．