数理解析研究所講究録
第 321 巻 1978 年 121-131

Feynman path integral.

名大. 理. 土屋昭博.

§0. 一次元 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$
\begin{cases}
i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(q,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\varphi(q,t) + V(q)\varphi(q,t) \\
\varphi(q,t) = \varphi_0(q).
\end{cases}
$$

を考えよう。ここに $V(q)$ は適当な条件をみたす実数値の Potential 函数。φ_0 は初期値。

Feynman [1] は上の方程式の解を

$$\varphi(q,t) = \frac{1}{A}\int_{C_{t,q}} e^{\frac{i}{2}\int_0^t \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 d\tau - i\int_0^t V(\gamma(\tau))d\tau}\varphi(\gamma(0))\mathcal{D}\gamma$$

と path 空間 $C_{t,q} = \{\gamma : [0,t] \to R \,;\, \gamma(t) = q\}$ 上の Lebesgue like measure "$\mathcal{D}\gamma$" による積分で表わす事を試みた。ここに A はある無限大の定数。

ここでは $\frac{1}{A}e^{\frac{i}{2}\int_0^t\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 d\tau}\mathcal{D}\gamma = d\mu_F$ とみなして、

$\int_{C_{t,q}} F(\gamma)d\mu_F$ を $F(\gamma)$ に対する Functional

とみなして $\int ?\, d\mu_F$ なる積分を定義しよう。

§1. H を R上の separable Hilbert space とする。$H' = H$: dual of Hilbert space H. このH上で積分 $\int_H F(x)\, d\mu_F(x)$ を定義したい。$\langle x, \xi \rangle$: dual paring, $x \in H$, $\xi \in H'$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$: 内積とする。

定義1

(1) $\xi \in H'$ について $f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$ と表わされるH上の function f について

$$\int_H f(x)\, d\mu_F \equiv e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \quad \text{とおく.}$$

(2) 変換 $\mathfrak{F}$: $f(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle}$, $\eta \in H'$ について

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) \equiv e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \int_H f(x)\, e^{-i\langle x, \xi \rangle}\, d\mu_F(x)$$

$$= e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} e^{-\frac{i}{2}\|\xi - \eta\|^2} = e^{-\frac{i}{2}\|\eta\|^2 + i\langle \xi, \eta \rangle}$$

なる H' 上の function を考える。

今 $E'_H = E' = \{ \sum a_j e^{i\langle x, \eta_j \rangle} = f(x),\ a_j \in \mathbb{C},\ \eta_j \in H' \}/\sim$ なるH上の functions のつくる $\mathbb{C}$-上の vector space を考える。ただし $f \sim f' \Leftrightarrow f(x) = f'(x)\ \forall x \in H$.

$\mathfrak{F}$ を linear に拡張する事により、$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}: E'_H \longrightarrow E'_{H'}$ なる linear map を定義する。

$\mathcal{F}$の逆変換 $\hat{\mathcal{F}}$ を次のようにつくる事が出来る。

1) $x \in H$ について H' 上の function $g(\xi) = e^{+i\langle x, \xi\rangle}$ に対し $\int_{H'} e^{+i\langle x, \xi\rangle} d\hat{\mu}_F(\xi) \equiv e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}$ とおく。

2) $g(\xi) = e^{+i\langle y, \xi\rangle}$, $y \in H$ について

$$\hat{\mathcal{F}}(g)(x) \equiv e^{-\frac{i}{2}\|x\|^2} \int_{H'} g(\xi) e^{+i\langle x, \xi\rangle} d\hat{\mu}_F(\xi)$$
$$= e^{\frac{i}{2}\|y\|^2 + i\langle y . x\rangle}$$

この時 $\hat{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathcal{F}\hat{\mathcal{F}} = id$ が成立し $\mathcal{F} : E'_H \longrightarrow E'_{H'}$ の isomorphism of vector space を与える。

ここで H' 上の C-valued functions のつくる topological vector space を二つ導入しよう。

定義 2.

(1) $\mathcal{C} = \{\varphi : H' \longrightarrow C$: 連続, $|\varphi| \equiv \sup_{\xi} |\varphi(\xi)| < \infty\}$

Banach space with norm $|\cdot|$.

(2) $\mathcal{A} = \{\varphi : H' \longrightarrow C,\ \|\varphi\|^2 < \infty\}$ ただし φ は次の表現 $\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)$ をもつ.

$$\varphi_n(\xi) = \langle f_n, \xi \otimes \cdots \otimes \xi\rangle, \quad {}^{\exists} f_n \in \widehat{H^{\otimes n}},$$

ここに $\widehat{H^{\otimes n}}$ は H の n 次対称 tensor 積 かつ $\|\varphi\|^2 \equiv \sum_n \|f_n\|^2$ で定義される。

この時 $\mathcal{A}$ は $\|\ \|^2$ で Hilbert space となる。

E' は $\mathcal{C}$ 及び $\mathcal{A}$ の subspace になっている事に注意しよう。

変換 $\mathcal{T}: E'_H \cong E'_{H'}$ により C 及び A の norm $|\ |$, $\|\ \|$ で E'_H を completion した topological vector space を $E(C)$ 及び $E(A)$ で表わす。単に E と表わした時には $E(C)$ 又は $E(A)$ のどちらかを表わすものとする。H を表わしたい時は $E_H(C)$, $E_H(A)$ 又は E_H と表わす事にする。

定義3

(1) E の元達を H 上の Feynman integrable elements と呼ぶ

(2) $f \in E$ に対し $\int_H f d\mu_F \equiv \mathcal{T}(f)(0)$ で定義する。

注意

(1) $f \in E$ の元は H 上の各点で定義された function としての意味は一般にはもっていない。$f \in E$ については $\int_H f(\sum_j a_j e^{i\langle x, \eta_j \rangle}) d\mu_F \equiv \sum_j a_j \mathcal{T}(f)(\eta_j) \cdot e^{-\frac{i}{2}\|\eta_j\|^2}$ が意味をもつ。

(2), $f, g \in E$ について 積 $f \cdot g$ は一般には意味をもたない。

Proposition 1.

$\mathcal{T}: E(A) \longrightarrow A$ は iso. of Hilbert space.

証明. injection は定義より O.K. onto のみが問題.
$s_1,\cdots,s_l \in R$, $\eta_1,\cdots,\eta_l \in H'$ について $f(x;s_1,\cdots s_l)$
$\equiv e^{\frac{1}{2}\|\sum s_j\eta_j\|^2 + \sum_j i\langle x, s_j\eta_j\rangle}$ とおく。

$\mathfrak{I}(f)(\xi) = e^{-i\langle\sum_j s_j\eta_j,\xi\rangle}$

$$= \sum_n \sum_{n_1+\cdots+n_l=n} \frac{(-i)^n n_1!\cdots n_l!}{n!} s_1^{n_1}\cdots s_l^{n_l}$$

$$\cdot\langle\eta_1,\xi\rangle^{n_1}\cdots\langle\eta_l,\xi\rangle^{n_l}$$

故は $\mathfrak{I}(f)(\cdot;\cdot)$; $R^l \longrightarrow A$ として real analytic function。だからその係数達 $\langle\eta_1,\xi\rangle^{n_1}\cdots\langle\eta_l,\xi\rangle^{n_l}$ は $E(A)$ の image. 一方 A は $\langle\eta_1,\xi\rangle^{n_1}\cdots\langle\eta_l,\xi\rangle^{n_l}$ の形の元達で張られる。故に onto が言えた。

次に $\eta_1,\cdots\eta_l\in H'$ について $f(x)\equiv\langle x,\eta_1\rangle^{n_1}\cdots\langle x,\eta_l\rangle^{n_l}$ と表わされる H 上の function を考えよう。この形の C 上の一次結合を H 上の多項式と呼ぼう.

Proposition 2.

多項式は $E(A)$ の元である。

証明. $\langle x,\eta_1\rangle^{n_1}\cdots\langle x,\eta_l\rangle^{n_l}\in E(A)$ をいえばよい。
$g(x;s_1,\cdots,s_l) = e^{i\sum_j\langle x, s_j\eta_j\rangle}$ とおく

$$g(x;s) = \sum_n \sum_{n_1+\cdots+n_l=n} \frac{i^n n_1!\cdots n_l!}{n!} s_1^{n_1}\cdots s_l^{n_l}$$

$$\langle x,\eta_1\rangle^{n_1}\cdots\langle x,\eta_l\rangle^{n_l}$$

一方 $\mathcal{T}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\sum \lambda_j \eta_j\|^2 + i\langle \sum \lambda_j \eta_j, \xi\rangle}$

この函数は $R^l \longrightarrow A$ と考えて real analytic.

だから その $\lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_l^{n_l}$ についての係数も A の元. 故に $\mathcal{T}(\langle x, \eta_1\rangle^{n_1} \cdots \langle x, \eta_l\rangle^{n_l}) \in \mathcal{A}$. 故に $\langle x, \eta_1\rangle^{n_1} \cdots \langle x, \eta_l\rangle^{n_l} \in F(A)$.

例. $\eta \in H'$ について $f(x) = \langle x, \eta\rangle^n$ を考える。

$$g(x, s) = e^{i\langle x, s\eta\rangle} = \sum_n \frac{i^n}{n!} s^n \langle x, \eta\rangle^n.$$

$$\mathcal{T}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2 s^2 + i\langle \eta, \xi\rangle s}$$

$$= \sum_n \sum_{l+2m=n} \frac{(-i)^m (i)^l}{l!\, m!\, 2^m} s^n \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta\rangle^l.$$

$$\mathcal{T}(\langle x, \eta\rangle^n)(\xi)$$

$$= \sum_{l+2m=n} \frac{n!\, i^m}{l!\, m!\, 2^m} \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta\rangle^l$$

$$\int_H \langle x, \eta\rangle^n d\mu_F = \begin{cases} \dfrac{(2m)!\, i^m}{m!\, 2^m} \|\eta\|^{2m} & \text{if } n = 2m \\ 0 & n : \text{odd}. \end{cases}$$

今 $H = H_1 \oplus H_2$ direct sum of Hilbert spaces とする。

Proposition 3

(1) $\varphi_1 \in E_{H_1}$, $\varphi_2 \in E_{H_2}$ に対し 積 $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in E_H$ が 定義できて

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathcal{F}_{H_1}(\varphi_1)(\xi_1) \cdot \mathcal{F}_{H_2}(\varphi_2)(\xi_2).$$

$$\int_H \varphi \, d\mu_F = \left(\int_{H_1} \varphi_1 \, d\mu_F\right) \cdot \left(\int_{H_2} \varphi_2 \, d\mu_F\right)$$

(2) $p : H \longrightarrow H_1$: orthogonal projection とする。
$\varphi \in E_{H_1}$ について pull-back $p^*\varphi \in E_H$
が定義できて.

$$\mathcal{F}_H(p^*\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathcal{F}_{H_1}(\varphi)(\xi_1), \quad \xi_1 \oplus \xi_2$$

$\in H_1 \oplus H_1^{\perp} = H$.

$$\int_H p^*\varphi \, d\mu_F = \int_{H_1} \varphi \, d\mu_F$$

証明. 定義にもどればよい。

$H = R^n$ finite dim. Hilbert space とする。
$f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$, $\xi \in R^n$ について. 定義より.

$$\int_{R^n} f(x) \, d\mu_F = e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$$

一方 $\int_{R^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} dx$

$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{R^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2 - \varepsilon\|x\|^2} dx$ と考えて

$= (\sqrt{2\pi i})^n e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$

ただし $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}}$ と考える。

この事より R^n 上では

$$d\mu_F = \frac{e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n}\,dx$$ と考えてよい。

Proposition 4.

R^n 上で考えて

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{R^n} \frac{f(x)\,e^{\frac{i}{2}\|x-\xi\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n}\,dx$$ が成立する。

$$\int_{R^n} f(x)\,d\mu_F = \int_{R^n} \frac{f(x)\,e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n}\,dx.$$

§2. $t>0$, $\xi \in R$ を仮定しよう。Hilbert space H として $H = \{\gamma : [0,t] \longrightarrow R,\ \gamma(t)=\xi,\ \gamma$: 絶対連続 $\int_0^t |\dot\gamma(\tau)|^2 d\tau < \infty\}$ として、$\|\gamma\|^2 = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)|^2 d\tau$ で Hilbert space とする。$H \ni \gamma \longrightarrow \dot\gamma \in L^2([0,t])$ によって H と $L^2([0,t])$ は Hilbert space の同型を与える。

$0 \leq t_1 < t_2 \leq t$ $\Delta = [t_1, t_2]$ について χ_Δ で Δ の特性関数を表わす。この時 $\chi_\Delta \in L^2$, $\|\chi_\Delta\|^2 = |\Delta| = |t_2 - t_1|$.

1) $s \in [0,t]$ に対し、$H \ni \gamma \longrightarrow \gamma(s) \in R$ なる関数を考える。$\gamma(s) = \xi + \int_s^t \dot\gamma(\tau)\,d\tau = \xi + \langle \dot\gamma, \chi_{[s,t]} \rangle$ と書わされる。ここに $\langle\ ,\ \rangle$ は $L^2([0,t])$

の内積.（$\gamma \to \dot{\gamma}$ で H を $L^2([0,t])$ と identify し内積, norm は $L^2([0,t])$ の内積 norm で表わす事とする。）この時 $\gamma \in H \longrightarrow \gamma(s) \in R$ なる function は $E(A)$ の元.

2) $\Delta = [t_1, t_2] \subseteq [0,t]$ $t_1 < t_2$ について.

$H \ni \gamma \longrightarrow \gamma(\Delta) \equiv \gamma(t_2) - \gamma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\gamma}(\tau)d\tau$

$= \langle \dot{\gamma}, \chi_\Delta \rangle$ と表わされる. 故にこの函数も $E(A)$ の元.

3) $\Delta_i = [t_i, t_i'] \subseteq [0,t]$, $t_i < t_i'$ $i = 1, \cdots n$.

今 $\mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j = \phi$ if $i \neq j$ とする。$\langle \frac{\chi_{\Delta_i}}{\sqrt{|\Delta_i|}}, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{|\Delta_j|}} \rangle = \delta_{ij}$.

$\frac{\gamma(\Delta_j)}{\sqrt{|\Delta_j|}} = \langle \dot{\gamma}, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{|\Delta_j|}} \rangle$ と表わされるから

$H \ni \gamma \longrightarrow \left(\frac{\gamma(\Delta_1)}{\sqrt{|\Delta_1|}}, \cdots \frac{\gamma(\Delta_n)}{\sqrt{|\Delta_n|}} \right) \in R^n$ は Hilbert 空間の間の orthogonal projection を与える。よって $\varphi \in E_{R^n}$ について $\varphi\left(\frac{\gamma(\Delta_1)}{\sqrt{|\Delta_1|}}, \cdots, \frac{\gamma(\Delta_n)}{\sqrt{|\Delta_n|}} \right)$ は E_H の元を与える.（Prop. 3 より）. 特に $\varphi \in L^1(R^n)$ として $\varphi_0(\gamma) = \varphi(\gamma(\Delta_1), \cdots, \gamma(\Delta_n))$ とすると $\varphi_0 \in E(C)$ である。$\mathcal{T}(\varphi_0)(\xi)$ を explict に表わそう. Prop. 3, 4 より

$$\mathcal{T}(\varphi_0)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi i})^n} \int_{R^n} \varphi(\sqrt{|\Delta_1|}y_1, \cdots, \sqrt{|\Delta_n|}y_n)$$

$$e^{\frac{i}{2}\sum_j |y_j - \langle \xi, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{|\Delta_j|}} \rangle|^2} dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\sqrt{2\pi i\,|\Delta_j|}}\int_{R^n}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,e^{\frac{i}{2}\sum_j\frac{|x_j-\langle\xi,\chi_{\Delta_j}\rangle|^2}{|\Delta_j|}}\,.$$

$dx_1\cdots dx_n$.

$$\int_H \varphi_\delta\, d\mu_F = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\sqrt{2\pi i\,|\Delta_j|}}\int_{R^n}\varphi(x_1\cdots x_n)\,e^{\frac{i}{2}\sum_j\frac{x_j^2}{|\Delta_j|}}\,dx_1\cdots dx_n.$$

4) $F(x_0,x_1,\cdots x_n)\in L^1(R^{n+1})$ について $\varphi_F(\gamma)\equiv \int_0^{t}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} F(\gamma(0),\gamma(\tau_1),\cdots\gamma(\tau_n))\,d\tau_1\cdots d\tau_n \in E(C)$ を次のまで定義しよう.

$$\mathcal{T}(\varphi_F)(\xi)=\int_0^{t}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_{R^{n+1}}\frac{F(q+\sum_{j=0}^{n}\sqrt{t_{j+1}-t_j}\,y_j,\cdots,q+\sqrt{t_{n+1}-t_n}\,y_n)}{(\sqrt{2\pi i})^{n+1}}$$

$$e^{\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n}|y_j-\langle\xi,\frac{\chi_{[t_j,t_{j+1}]}}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}\rangle|^2}\,dy_0\cdots dy_{n+1}\,dt_1\cdots dt_n.$$

ただし $t_0=0$, $t_{n+1}=t$. この積分は well defined.

変数変換をして

$$\mathcal{T}(\varphi_F)(\xi)=\int_0^{t}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_{R^{n+1}}\frac{F(q+\sum_{j=0}^{n}x_j,\,q+\sum_{j=1}^{n}x_j,\cdots,q+x_n)}{\prod_{j=0}^{n}\sqrt{2\pi i\,(t_{j+1}-t_j)}}$$

$$e^{\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{|x_j-\langle\xi,\chi_{[t_j,t_{j+1}]}\rangle|^2}{|t_{j+1}-t_j|}}\,dx_0\cdots dx_n\,dt_1\cdots dt_n$$

$$\int_H\varphi_F\,d\mu_F=\int_0^{t}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\int_{R^{n+1}}\frac{F(q+\sum_{j=0}^{n}x_j,\cdots,q+x_n)}{\prod_{j=0}^{n}\sqrt{2\pi i\,(t_{j+1}-t_j)}}$$

$$e^{\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{x_j^2}{|t_{j+1}-t_j|}}\,dx_0\cdots dx_n\,dt_1\cdots dt_n$$

5) 最後に $V \in L^1(R)$, $\varphi \in L^1(R)$ について

$$\varphi(\gamma) \equiv e^{-i\int_0^t V(\gamma(\tau))d\tau}\varphi(\gamma(0)) \in E(C)$$

を次の才で定義しよう。

$$\varphi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^t \cdots \int_0^{t_2} \varphi(\gamma(0))V(\gamma(t_1))\cdots V(\gamma(t_n))\,dt_1\cdots dt_n$$

右辺の各項は $\varphi(x_0)V(x_1)\cdots V(x_n) \in L^1(R^{n+1})$ より、4) の結果より、$E(C)$ の元を定義している。

φ は Banach space $E(C)$ valued の級数として絶対収束し、$\varphi \in E(C)$ である事が分る。

$$\int_H e^{-i\int_0^t V(\gamma(\tau))d\tau}\varphi(\gamma(0))\,d\mu_F = \int_H \varphi(\gamma)\,d\mu_F$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^t \cdots \int_0^{t_2} \int_{R^{n+1}} \frac{\varphi(q+\sum_{j=0}^{n} x_j)V(q+\sum_{j=1}^{n} x_j)\cdots V(q+x_n)}{\prod_{j=0}^{n}\sqrt{2\pi i\,|t_{j+1}-t_j|}}$$

$$e^{\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{x_j^2}{|t_{j+1}-t_j|}}\,dx_0\cdots dx_n\,dt_1\cdots dt_n$$

文献

[1] R. Feynman. Rev. Mod. Phys. 20 367. (1948)

[2] 飛田武幸：ブラウン運動. 岩波書店(1975)